Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª Chamada da
2ª Prova de Cálculo II
14/07/2023 – 2023-1
Turma C1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Determine a solução geral da EDO

$$yy' = 2xe^{y^2}$$

Solução: Podemos reescrever a EDO

$$ye^{-y^2}y' = 2x.$$

Integrando ambos os lados,

$$\int ye^{-y^2}\,dx = \int 2x\,dx \Rightarrow \int ye^{-y^2}\,dy = x^2 + C_1.$$

Fazendo a substituição $u = -y^2$, $du = -2ydy$, temos

$$\int ye^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-y^2} + C_2.$$

Com isso, temos que

$$-\frac{1}{2}e^{-y^2} = x^2 + C_3 \Rightarrow e^{-y^2} = -2x^2 + C_4 \Rightarrow y^2 = -\log\left(-2x^2 + C_4\right).$$

Logo a solução geral da EDO é dada de forma implícita pela equação

$$y^2 = -\log\left(-2x^2 + C_4\right).$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Dado $k > 0$, determine a solução do PVI

$$\begin{cases} y''(t) + 4\,y'(t) + (4 + k^2)\,y(t) = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Solução: Vamos primeiro determinar a solução geral da EDO.

Equação Característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 - ik, \quad \lambda_2 = -2 + ik$$

Com isso a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \left(C_2\cos(kt) + C_1\sin(kt)\right)e^{-2t},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo $y(0) = 1$, temos

$$C_2 = 1.$$

Assim

$$y(t) = (\cos(kt) + C_1 \sin(kt))\, e^{-2t},$$

Donde,

$$y'(t) = (-k\sin(kt) + C_1 k\cos(kt))\, e^{-2t} - 2(\cos(kt) + C_1\sin(kt))\, e^{-2t}.$$

Daí, substituindo $y'(0) = -2$, temos

$$-2 + C_1 k = -2.$$

Portanto,

$$y(t) = e^{-2t}\cos(kt), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$