Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere a função $f(x,y,z) = xyz$ e a hélice $\vec{r}(t) = (\cos(3t),\ \sin(3t),\ 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determine o vetor velocidade e a velocidade escalar da hélice quando $t = \pi/3$.

(b) Qual é a direção de maior crescimento de f no ponto $\vec{r}(\pi/3)$.

(c) Encontre a taxa de variação de f, ao longo da hélice no ponto $t = \frac{\pi}{3}$.

Solução:

(a) Como $\vec{r}\,'(t) = (-3\sin(3t),\ 3\cos(3t),\ 3)$, o vetor velocidade e a velocidade escalar pedidos são:

$$\vec{v} = \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{3}\right) = (0,\ -3,\ 3) \ \text{ e } v = \left\|\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\| = 3\sqrt{2}.$$

(b) Note que $P = \vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-1,\ 0,\ \pi)$ e que

$$\nabla f(x,y,z) = (yz,\ xz,\ xy)\,.$$

Daí, a direção de maior crescimento é:

$$\nabla f(P) = (0,\ -\pi,\ 0)\,.$$

(c) Primeiramente, vamos obter o vetor unitário de $\vec{v}$:

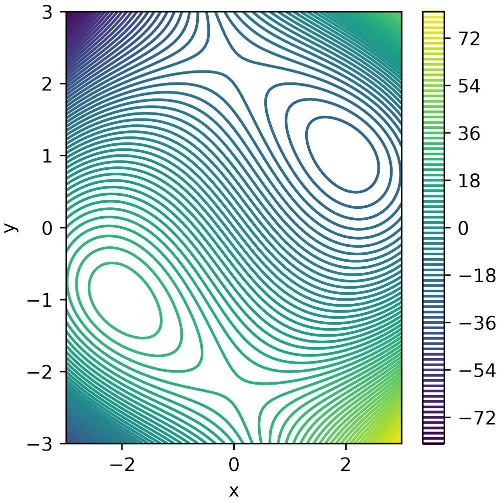
$$\vec{u} = \left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = (0,\ -\pi,\ 0)\cdot\left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Determine os pontos críticos da seguinte função $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$ e classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.



Mapa de contornos da função f

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy + 3y^2 - 15\right) = (0,0),$$

temos que os pontos críticos são:

$$P_1 = (-2,-1)\,,\ P_2 = \left(0, -\sqrt{5}\right), P_3 = \left(0, \sqrt{5}\right) \text{ e } P_4 = (2,1)\,.$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(-2,-1) = \det \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -18 \end{bmatrix} = 180, \text{ e } f_{xx}\left(0, \sqrt{5}\right) = -12, \text{ máximo local}$$

$$\det D^2 f(0,-\sqrt{5}) = \det \begin{bmatrix} 0 & -6\sqrt{5} \\ -6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \end{bmatrix} = -180, \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f\left(0, \sqrt{5}\right) = \det \begin{bmatrix} 0 & 6\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \end{bmatrix} = -180 \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f(2,1) = \det \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} = 180, \text{ e } f_{xx}\left(0, \sqrt{5}\right) = 12, \text{ mínimo local}$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Sua empresa foi solicitada a projetar um tanque de armazenamento para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente exigem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas e o tanque deve ter capacidade para 8.000 m^3 de gás. O cliente deseja também utilizar a menor quantidade possível de material na fabricação do tanque. Quais as dimensões do tanque você recomenda?

Solução: O volume do tanque é dado por $V(r,h) = \pi h r^2 + \frac{4\pi r^3}{3}$ e a área de superfície por $A(r,h) = 2\pi h r + 4\pi r^2$. Portanto, queremos minimizar

$$A(r,h) = 2\pi h r + 4\pi r^2,$$

sujeito à restrição

$$\pi h r^2 + \frac{4\pi r^3}{3} - 8000 = 0.$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos encontrar $r, h \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 2\pi\,(h+4r) \\ 2\pi r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi\lambda r\,(h+2r) \\ \pi\lambda r^2 \end{bmatrix} \text{ e } \pi h r^2 + \frac{4\pi r^3}{3} - 8000 = 0.$$

Da segunda equação do sistema vemos que $\lambda = 2/r$. Substituindo-se na primeira equação do sistema obtemos que $h = 0$. Donde, substituindo $h = 0$ na equação da restrição obtemos

$$r = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Logo, o tanque deve ter altura da parte cilíndrica $h = 0$ e raio $r = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{\pi}}$ m^3, isto é, o tanque deve ter forma esférica como raio encontrado.