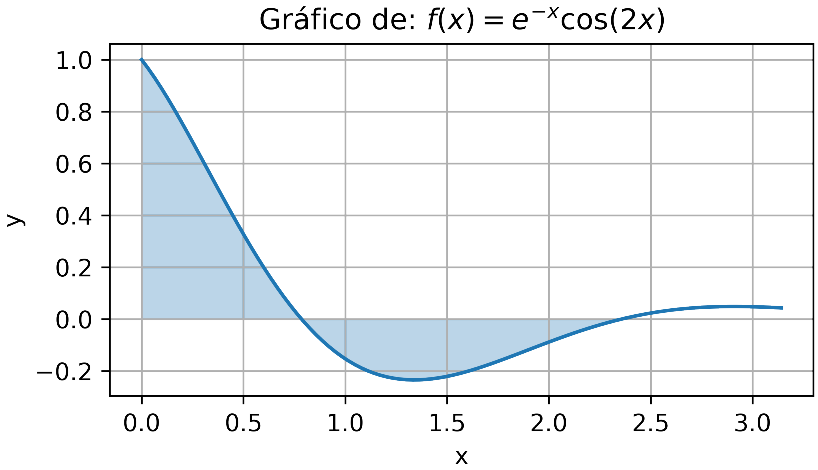
Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Abaixo temos o gráfico de $f(x) = e^{-x}\cos(2x)$, onde $0 \leq x \leq \pi$. Determine a área da região sombreada.



Solução:

Primeiramente, vamos encontrar os pontos que f intercepta o eixo x:

$$e^{-x}\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Neste caso, a área sombreada é dada por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\cos(2x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{-x}\cos(2x)\,dx.$$

Vamos calcular a integral indefinida. Fazendo integração por partes duas vezes, com $u = \cos(2x)$, $du = -2\sin(2x)$, $dv = e^{-x}dx$, $v = -e^{-x}$ temos

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos(2x)\,dx &= -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)\,dx \\
&= -e^{-x}\cos(2x) - 2\left(-e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)\,dx\right) \\
&= -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) - 4\int e^{-x}\cos(2x)\,dx
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int e^{-x}\cos(2x)\,dx = \frac{(2\sin(2x) - \cos(2x))\,e^{-x}}{5} + C.$$

Com isso,

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\cos(2x)\,dx = \left(\frac{(2\sin(2x) - \cos(2x))\,e^{-x}}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{5e^{\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{5}.$$

Analogamente,

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{-x}\cos(2x)\,dx = \left(\frac{(2\sin(2x) - \cos(2x))\,e^{-x}}{5}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{2}{5e^{\frac{\pi}{4}}} - \frac{2}{5e^{\frac{3\pi}{4}}}.$$

Logo,

$$A = A_1 - A_2 = \frac{2}{5e^{\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Determine a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \cos(t)\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t)\sin(t) = \sin^2(t)\cos^2(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solução:

(a) Primeiramente, vamos reescrever a EDO como:

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t)\tan(t) = \sin^2(t)\cos(t).$$

Podemos ver que a EDO é linear de 1ª ordem. Note que $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é o maior intervalo contendo $t = 0$ onde $p(t) = \tan(t)$ e $q(t) = \sin^2(t)\cos(t)$ são contínuas, logo este é o intervalo buscado.

(b) Multiplicando-se pelo fator integrante $\mu = e^{\int \tan(t)\,dt} = e^{-\log(\cos(t))} = \frac{1}{\cos(t)}$, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos(t)}y(t)\right) = \sin^2(t).$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$\frac{1}{\cos(t)}y(t) = \int \sin^2(t)\,dt.$$

Note que

$$\int \sin^2(t)\,dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = -\frac{\sin(2t)\cos(t)}{4} + \frac{t\cos(t)}{2} + C_1\cos(t).$$

Finalmente, fazendo $y(0) = 1$, obtemos que $C_1 = 1$, daí a solução do PVI é:

$$y(t) = \cos(t) - \frac{\sin(2t)\cos(t)}{4} + \frac{t\cos(t)}{2}, \ \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Questão 3. .... _______/ 3 pts

Determine a solução geral da EDO:

$$2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = te^{2t}.$$

Solução:

Resolvendo a EDO homogênea: $\quad 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = 0.$

$$2\lambda^2 + 0\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}i}{2}$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) + C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Encontrando uma solução particular da EDO não-homogênea:

Para isso, vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Vamos supor a solução particular da forma:

$$y_p = (B + At)\, e^{2t}$$

Com isso,

$$y_p' = 2\,(B + At)\, e^{2t} + Ae^{2t},$$
$$y_p'' = 4\,(B + A + At)\, e^{2t}$$

Substituindo na EDO não-homogênea, temos:

$$(9B + 8A + 9At)\, e^{2t} = te^{2t}.$$

A solução geral da EDO é:

$$y(t) = -\frac{8e^{2t}}{81} + \frac{te^{2t}}{9} + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) + C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$