GAN 00007 – Introdução à Álgebra Linear – Turma A1
Exercícios – 21/06/2016
Professora *Renata de Freitas*

Considere o operador linear[1] $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Verifique que $T(1,2) = (3,6)$.

2. Determine o conjunto S_3 dos vetores de $\mathbb{R}^2$ cuja imagem por T_A é um múltiplo do próprio vetor pelo escalar 3:

$$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x,y) = 3(x,y)\}.$$

> Sejam $T_A : V \to V$ um operador linear dado por uma matriz A e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. Dizemos que λ é um *autovalor* de T_A (ou um *autovalor* de A) quando existe um vetor $v \in V$ não nulo tal que $T_A(v) = \lambda v$.

3. Mostre que $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

> Sejam A uma matriz, $T_A : V \to V$ o operador linear dado por A e $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de A. O *subespaço de autovetores* associados a λ é definido por:
> $$S_\lambda = \{v \in V \ / \ T(v) = \lambda v\}.$$

4. Mostre que o subespaço S_3 de autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

---

[1]Um *operador linear* é uma transformação linear que tem domínio igual ao contradomínio.

5. Descubra quais são (todos) os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix},$$

verificando para que valores de λ a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

tem solução não trivial.

(a) Qual é o sistema homogêneo associado a esta equação matricial?

(b) Verifique que $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2, é a matriz dos coeficientes deste sistema.

(c) Lembre que um sistema homogêneo tem solução única quando a matriz dos coeficientes é inversível e isto ocorre quando seu determinante é não nulo. Assim, responda: para que valores de λ temos que $\mathsf{det}(A - \lambda I) = 0$?

> Dada uma matriz quadrada A, dizemos que a equação $\mathsf{det}(A - \lambda I) = 0$ na indeterminada λ, onde I é a matriz identidade, é a *equação característica* da matriz A.

6. Para cada autovalor λ da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix},$$

determine o subespaço S_λ de autovetores associados a λ.

7. Encontre uma base para cada subespaço de autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Encontre uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Refaça os exercícios 5, 6, 7 e 8 para as matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$