GAN 00140 – Álgebra Linear – Turma H1
Primeira Verificação da Aprendizagem, 2016-2
Professora *Renata de Freitas*

---

1. (a) *(1,0 ponto)* Escreva o sistema linear associado à matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix}.$$

1 $\boxed{\text{RESPOSTA: } \begin{cases} x + hy = 1 \\ 2x + 3y = k \end{cases}}$

(b) *(1,5 pontos)* Determine os valores de h e k para os quais o sistema obtido no item (a):

(i) não tem solução;

(ii) tem uma única solução;

(iii) tem muitas soluções.

Dê respostas separadas para cada parte, *justificando cada uma.*

RESOLUÇÃO:

Iniciando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & -2h+3 & k-2 \end{bmatrix}$$

(i) O sistema não tem solução quando $-2h+3=0 \therefore 2h=3 \therefore h=3/2$ e $k-2 \neq 0 \therefore k \neq 2$. De fato, continuando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & -2h+3 & k-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (k-2 \neq 0)$$

que corresponde a um sistema impossível.

2 **(i)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } h = 3/2 \text{ e } k \neq 2.}$

(ii) O sistema tem uma única solução quando $-2h+3 \neq 0 \therefore 2h \neq 3 \therefore h \neq 3/2$. De fato, continuando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & -2h+3 & k-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{k-2}{-2h+3} \end{bmatrix} (-2h+3 \neq 0)$$

que corresponde a um sistema possível determinado.

2 (**ii**) $\boxed{\text{RESPOSTA: } h \neq 3/2 \text{ e } k \text{ tem qualquer valor.}}$

(iii) O sistema tem muitas soluções quando $-2h+3=0 \therefore 2h=3 \therefore h=3/2$ e $k-2=0 \therefore k=2$. De fato, continuando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & -2h+3 & k-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde a um sistema possível indeterminado.

2 (**iii**) $\boxed{\text{RESPOSTA: } h = 3/2 \text{ e } k = 2.}$

2. *(2,0 pontos)* Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-3,2)$, $\mathbf{v}_2 = (-3,9,-6)$ e $\mathbf{w} = (-2,6,h)$ e seja V o subespaço gerado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. *Justifique suas respostas.*

(a) Para que valor(es) de h o vetor $\mathbf{w}$ está em V?

RESOLUÇÃO: Considerando o sistema

$$\mathbf{w} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2,$$

temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 6 \\ 2 & -6 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema é possível (e, portanto, $\mathbf{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$) quando $h+4=0 \therefore h=-4$.

3 (**a**) $\boxed{\text{RESPOSTA: } h = -4.}$

(b) Para que valor(es) de h o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\}$ é linearmente *dependente*?

RESOLUÇÃO: Considerando o sistema

$$\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{w},$$

temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & -6 & h & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema é possível indeterminado (e, portanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\}$ é LD) para qualquer valor de h.

3 (**b**) $\boxed{\text{RESPOSTA: } h \in \mathbb{R}.}$

(c) O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base de V?

RESOLUÇÃO: Considerando o sistema

$$\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2,$$

temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema é possível indeterminado (e, portanto, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ não é LI). Como o conjunto não é LI, não é uma base para V.

3 **(c)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Não.}}$

(d) Qual é a dimensão de V?

RESOLUÇÃO: Temos que $\mathbf{v}_2 = (-3, 9, -6) = -3(1, -3, 2) = -3\mathbf{v}_1$. Logo, $V = \mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1\}$. Como $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, temos que $\{\mathbf{v}_1\}$ é LI. Logo, $\{\mathbf{v}_1\}$ é um conjunto de geradores LI para V, ou seja, é uma base de V.

3 **(d)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } \mathsf{dim}(V) = 1.}$

3. *(3,0 pontos)* A matriz A e uma matriz linha-equivalente a A são dadas a seguir:

$$A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine uma base para $W = \mathsf{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$, o subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$. *Escreva explicitamente os vetores da base.*

RESOLUÇÃO: Os vetores que correspondem a posições pivô $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$ formam uma base para W.

4 **(a)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } \{(1, -1, -2, 3), (4, 2, 2, 6), (-3, 3, 5, -5)\}.}$

(b) $W = \mathsf{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$. Qual o valor de m? Qual é a dimensão de W?

RESOLUÇÃO: Como os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ são vetores de $\mathbb{R}^4$, temos que W é subespaço de $\mathbb{R}^4$. Como a base apresentada para W no item anterior possui 3 vetores, a dimensão de W é 3.

4 **(b)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } m = 4,\ \mathsf{dim}(W) = 3.}$

(c) Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{a}_5$ com relação à base de $W = \mathsf{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ determinada no item (a). *Dica*: Aproveite o trabalho já realizado.

RESOLUÇÃO: Considerando o sistema

$$\mathbf{a}_5 = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_4$$

e o escalonamento apresentado no enunciado, temos:

$$\begin{cases} x + 4y = 5 \therefore x = -2 + 5 = 3 \\ 2y = -1 \therefore y = -1/2 \\ z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

4 (c) $\boxed{\text{RESPOSTA: } [\mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 4 \end{bmatrix}.}$

4. *(3,0 pontos)* Verdadeiro? Sim ou não? *Justifique suas respostas* **negativas**.

(a) Se o conjunto $\{\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ é linearmente dependente, então algum de seus elementos está no subespaço gerado pelos demais.

5 (a) RESPOSTA: Sim.

(b) Se $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ for um conjunto linearmente independente, então o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_q, \mathbf{b}\}$ também será. Ou seja, se acrescentarmos vetores a um conjunto linearmente independente, o resultado permanecerá independente.

5 (b) RESPOSTA: Não.

JUSTIFICATIVA: Considere $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1)$ e $\mathbf{b} = (1, 2)$. Temos que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é LI, mas $\{(1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ é LD. De fato, o sistema $(0, 0) = x(1, 0) + y(0, 1)$ tem solução única:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e o sistema $(0, 0) = x(1, 0) + y(0, 1) + z(1, 2)$ tem infinitas soluções:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Quatro vetores de $\mathbb{R}^5$ *nunca* geram o $\mathbb{R}^5$.

5 (**c**) $\boxed{\text{Resposta: Sim.}}$

(d) Cinco vetores de $\mathbb{R}^5$ *sempre* geram o $\mathbb{R}^5$.

5 (**d**) $\boxed{\text{Resposta: Não.}}$

Justificativa: Considere $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6 \in \mathbb{R}^5$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1, 0, 0, 0, 0)\\
\mathbf{v}_2 &= (2, 0, 0, 0, 0)\\
\mathbf{v}_3 &= (3, 0, 0, 0, 0)\\
\mathbf{v}_4 &= (4, 0, 0, 0, 0)\\
\mathbf{v}_5 &= (5, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Temos que

$$\mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} = \{(a, 0, 0, 0, 0)/a \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^5.$$

De fato, o sistema

$$(a, b, c, d, e) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 + x_5\mathbf{v}_5$$

tem solução apenas quando $b = c = d = e = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

(e) Cinco vetores de $\mathbb{R}^5$ *nunca* geram o $\mathbb{R}^5$.

5 (**e**) $\boxed{\text{Resposta: Não.}}$

Justificativa: Considere $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \in \mathbb{R}^5$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1, 0, 0, 0, 0)\\
\mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0, 0, 0)\\
\mathbf{v}_3 &= (0, 0, 1, 0, 0)\\
\mathbf{v}_4 &= (0, 0, 0, 1, 0)\\
\mathbf{v}_5 &= (0, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

Temos que

$$\mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} = \{(a, b, c, d, e)/a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^5.$$

De fato, o sistema

$$(a, b, c, d, e) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 + x_5\mathbf{v}_5$$

tem solução para quaisquer valores de a, b, c, d, e:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{bmatrix}$$

Mais de cinco vetores de $\mathbb{R}^5$ *nunca* geram o $\mathbb{R}^5$.

5 **(f)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Não.}}$

JUSTIFICATIVA: Considere $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6 \in \mathbb{R}^5$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{v}_4 &= (0, 0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{v}_5 &= (0, 0, 0, 0, 1) \\ \mathbf{v}_6 &= (2, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Temos que

$$\mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\} = \{(a, b, c, d, e)/a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^5.$$

De fato, o sistema

$$(a, b, c, d, e) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 + x_5\mathbf{v}_5 + x_6\mathbf{v}_6$$

tem solução para quaisquer valores de a, b, c, d, e:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e \end{bmatrix}$$