GAN 00140 – Álgebra Linear – Turma E1
Professora *Renata de Freitas*
Primeira Verificação da Aprendizagem, 2017-1

---

1. *(1,0)* Para que valores de k o sistema a seguir é (a) possível determinado? (b) possível indeterminado? (c) impossível?

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 3x = 9 \\ y - z = k \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

Iniciando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

(c) O sistema impossível quando $k - 1 \neq 0 \therefore k \neq 1$. De fato, continuando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (k-1 \neq 0)$$

que corresponde a um sistema impossível.

1 **(c)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } k \neq 1.}$

(b) O sistema é possível indeterminado quando $k - 1 = 0 \therefore k = 1$. De fato, continuando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (k-1 = 0)$$

que corresponde a um sistema possível indeterminado.

1 **(b)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } k = 1.}$

(a) Os casos anteriores esgotam todas as possibilidades para valores de $k \in \mathbb{R}$. Assim, o sistema não é possível determinado, não importando o valor de k.

1 **(a)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Nenhum valor de } k.}$

2. *(1,0)* Determine a inversa de A, se existir, e calcule seu determinante, por escalonamento:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

Escalonamento a matriz A (junto com a matriz identidade), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a forma escalonada reduzida da matriz A não é a matriz identidade, temos que A não tem inversa e seu determinante é zero.

2 $\boxed{\text{RESPOSTA: A matriz } A \text{ não tem inversa e } \mathsf{det}(A) = 0.}$

3. *(4,0)* Considere o conjunto $B = \{(1,3,0), (-2,0,1), (2,0,-1)\}$.

   (a) Escreva o vetor $(1,9,6)$ como combinação linear dos vetores em B, se possível.

   (b) D é linearmente dependente ou independente?

   (c) Determine o subespaço gerado por B.

   (d) Exiba um sistema homogêneo cujo conjunto de soluções seja o subespaço gerado por B.

RESOLUÇÃO:

(a) Observando o escalonamento do item 1, temos que o vetor $(1,9,6)$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores em B (pois $6 \neq 1$).

3 **(a)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Não é possível.}}$

(b) Observando o escalonamento do item 1, temos que a forma escalonada da matriz cujas colunas são formadas pelas entradas dos vetores em B possui apenas duas colunas pivôs. Logo, um dos vetores em B pode ser escrito como combinação linear dos outros. Logo, B é LD.

3 **(b)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } B \text{ é LD.}}$

(c,d) Refazendo o escalonamento do item 1, com a última coluna substituída por uma coluna "genérica", temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & a \\ 3 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & a \\ 0 & 6 & -6 & -3a+b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & a \\ 0 & 6 & -6 & -3a+b \\ 0 & 0 & 0 & 3a-b+6c \end{bmatrix}$$

③ **(c)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } \mathsf{ger}(B) = \{(a, 3a+6c, c)/a, c \in \mathbb{R}\}.}$

③ **(d)** RESPOSTA: $\mathsf{ger}(B)$ é o conjunto de soluções do sistema: $\begin{cases} 3x - y + 6z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

---

4. *(1,0)* A sequência $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \to L_2 + (-3)L_1$, $L_2 \to \left(\frac{-1}{3}\right) L_2$, $L_1 \to L_1 + (-3)L_2$ de operações elementares transforma a matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ na matriz identidade de ordem 2.

(a) Calcule o determinante de C por escalonamento. (b) Encontre a inversa de C, se existir.

RESOLUÇÃO:

(a) $\mathsf{det}(C) = 1(-3)(-1) = 3$.

④ **(a)** $\boxed{\text{RESPOSTA: } \mathsf{det}(C) = 3.}$

(b) A sequência de operações que transformam a matriz C na matriz identidade transforma a matriz identidade em C^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

④ **(b)** RESPOSTA: $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$.

---

5. *(3,0)* Verdadeiro ou falso? Justifique <u>todos</u> os itens falsos e <u>um</u> dos verdadeiros.

(a) Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^3$, se o vetor v pertence ao subespaço gerado por A, então o conjunto de vetores $A \cup \{v\}$ é linearmente dependente.

⑤ **(a)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Verdadeiro.}}$ *Justificativa:*

Neste curso, estudamos apenas subespaços gerados por conjunto finitos. Assim: dado $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $v \in \mathsf{ger}(A)$ e $w \in \mathsf{ger}(A \cup \{v\})$, temos que

$$w = av + a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n,$$

para certos $a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Como $v \in \mathsf{ger}(A)$, temos que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n,$$

para certos $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Daí,

$$w = a(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) + a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

Logo,

$$w = (ab_1 + a_1)v_1 + (ab_2 + a_2)v_2 + \cdots + (ab_n + a_n)v_n.$$

Assim, $w \in \mathsf{ger}(A)$ e $\mathsf{ger}(A) = \mathsf{ger}(A \cup \{v\})$. Portanto, $A \cup \{v\}$ é LD.

(b) Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^3$, se $B \subseteq A$ e B é linearmente independente, então A é linearmente independente.

5 **(b)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Falso.}}$ *Justificativa:*
Dado $A = \{(1,0,0),(2,0,0)\}$ e $B = \{(1,0,0)\}$, temos que $B \subseteq A$ e B é LI pois B é unitário e seu único vetor é não-nulo. Mas A é LD, pois $(2,0,0)$ é múltiplo de $(1,0,0)$.

(c) Todo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ com menos de 3 elementos é linearmente independente.

5 **(c)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Falso.}}$ *Justificativa:*
Dado $A = \{(1,0,0),(2,0,0)\}$, temos que A tem menos de 3 elementos mas é LD.

(d) Todo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ com mais de 3 elementos é linearmente dependente.

5 **(d)** $\boxed{\text{RESPOSTA: Verdadeiro.}}$ *Justificativa:*
Dado $A \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto com mais de 3 vetores, temos que a forma escalonada da matriz cujas colunas são formadas pelas entradas dos vetores em A terá no máximo 3 colunas pivô e mais de 3 colunas. Logo, terá mais colunas que colunas pivô. Portanto, A é LD.
