SEMINÁRIO DE ÁLGEBRA
Rodrigo Salomão
IMPA

Sobre o Teorema de Bertini em Característica Positiva

Introdução

Pelo Teorema de Bertini, sobre variação de pontos singulares em um sistema linear, temos que quase todas as fibras de um morfismo dominante entre variedades algébricas suaves sobre um corpo de característica zero são suaves. Um análogo na teoria das variedades diferenciáveis é conhecido como Teorema de Sard, que diz que a imagem dos pontos críticos de uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis tem medida nula.

Entretanto, em característica prima este teorema só vale sob hipóteses adicionais. Por exemplo quando a fibra geral do morfismo for racional. Os primeiros exemplos foram publicados em 1944 por O. Zariski [6].

Considere a superfície $S := \{(x, y, t) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) | f = y^2 + x^p + t\}$, onde k é um corpo algebricamente fechado de característica $p > 2$. Consideremos ainda a projeção na última coordenada $\pi : S \longrightarrow \mathbb{A}^1$.

No caso em que $p = 3$, Bombieri e Mumford [1] usaram esta fibração para provar que toda fibração de superfícies suaves sobre curvas suaves, cuja fibra geral admite uma cúspide, são localmente formalmente isomorfas.

Observe que para todo $t \in \mathbb{A}^1$ a fibra $X_t := \pi^{-1}(t)$ é uma curva com uma única singularidade $(t^{1/p}, 0)$ e a superfície S é suave. Desta forma, o morfismo π nos fornece um contra-exemplo para o Teorema de Bertini em característica $p > 2$. Com leves alterações encontramos exemplos em característica 2 também.

Porém não é simples de imaginar como construir famílias patológicas cujo grau das curvas sejam menores que a característica do corpo. Tais exemplos, bem como uma classificação, foram publicados em 2004 por K.-O. Stöhr [4].

Nós iremos apresentar uma fibração patológica, que surgiu em [5].

Uma Família Patológica de Quárticas Planas

Seja k algebricamente fechado de característica 5. Considere a superfície irredutível S em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ dos pontos $((x : y : z), t)$ satisfazendo a equação

$$x^3z + (x^2z^2 - xyz^2 + xy^2z - y^4)t + (y + 3z)z^3t^2 = 0,$$

juntamente com o morfismo projeção

$$\eta : S \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

induzido pela projeção da segunda coordenada de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$.

As fibras do morfismo η são da forma $C_t \times \{t\}$, onde C_t é uma quártica plana projetiva nas coordenadas x, y e z, determinada pela equação acima.

Homogenizando a equação acima podemos ver S como uma superfície projetiva em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ e $\eta : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

Se $t \neq 0$ e ∞, então pelo critério do Jacobiano temos que a curva irredutível C_t possui uma única singularidade

$$((t^4 + t^3)^{1/5} : (t^2 - t)^{1/5} : 2).$$

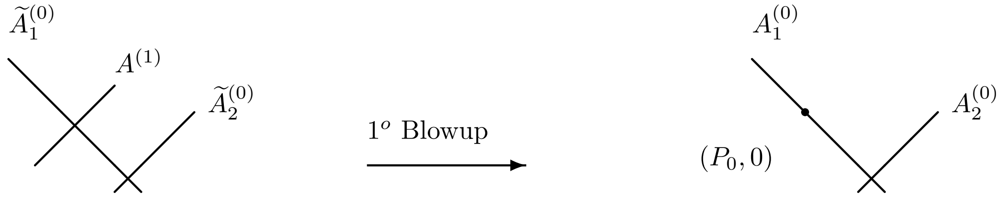
E mais, $P_0 = ((0 : 0 : 1), 0)$, $P_3 = ((4 : 3 : 1), 3)$ e $P_\infty = ((1 : 0 : 0), \infty)$ são as únicas singularidades de S.

Desta forma, $\eta : S \setminus \{C_0, C_3, C_\infty\} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 3, \infty\}$ nos fornece um morfismo dominante entre variedades suaves cujas fibras são todas singulares.

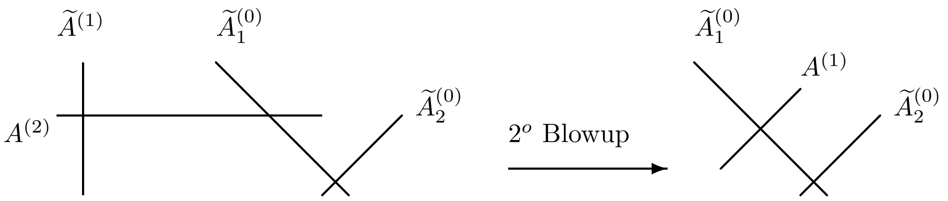
Um fato interessante que envolve este exemplo, é que pelo critério do Hessiano, quase todas as fibras admitem um ponto de inflexão não ordinário. E mais, cada fibração patológica por quárticas planas que admitem um ponto de inflexão não ordinário na fibra geral é birracionalmente equivalente a uma fibração obtida por uma extensão da base desta fibração apresentada.

Vamos resolver as singularidades de S e analisar o que acontece com as fibras dos pontos especiais 0, 3 e ∞. Seja $\widetilde{\eta} : \widetilde{S} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ o morfismo composto, onde $\widetilde{S} \longrightarrow S$ é a resolução de S.

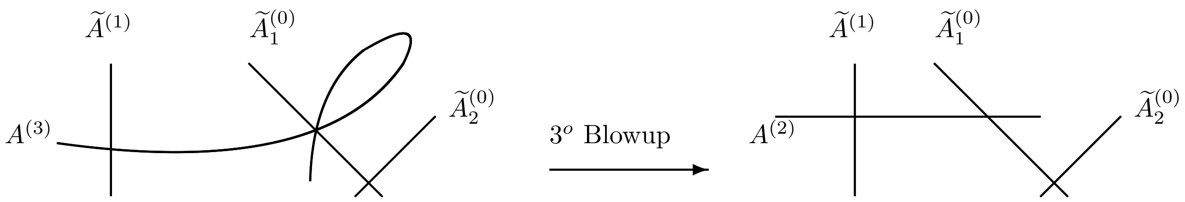
Observe que $C_0 = \eta^*(0)$ é uma curva em S dada pela equação polinomial $x^3 z = 0$. Denotemos por $A_1^{(0)}$ e $A_2^{(0)}$ as componentes "$x = 0$" e "$z = 0$". Explodindo a singularidade $(P_0, 0)$ obtemos a configuração.



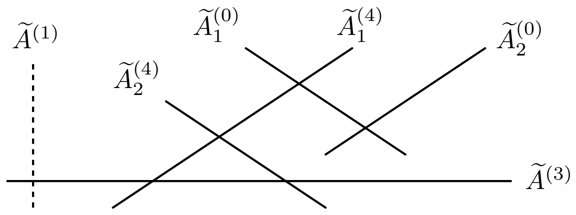
Onde a curva racional suave $A^{(1)}$ é o divisor excepcional de S em $(P_0, 0)$. A interseção entre $A^{(1)}$ e $A_1^{(0)}$ é o único ponto singular da superfície em $A^{(1)}$. Explodindo este ponto, obtemos a seguinte configuração.



Onde a curva racional suave $A^{(2)}$ é o divisor excepcional, que consiste inteiramente de pontos singulares da superfície. Explodindo ao longo desta curva, obtemos a seguinte configuração.



Onde a curva racional $A^{(3)}$ é o divisor excepcional. A interseção de $A^{(3)}$ com $A_1^{(0)}$ é um ponto singular da superfície. Explodindo ao longo desta curva, obtemos a seguinte configuração.



Onde o divisor excepcional é a união de duas curvas racionais suaves $A_1^{(4)}$ e $A_2^{(4)}$, que não possuem singularidades da superfície. O pull-back por $\widetilde{\eta}$ de $t = 0$ é a combinação linear das curvas racionais suaves,

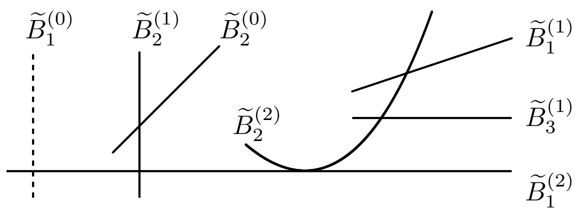
$$\widetilde{\eta}^*(0) = 3\,\widetilde{A}_1^{(0)} + \widetilde{A}_2^{(0)} + 3\,\widetilde{A}^{(1)} + 3\,\widetilde{A}^{(3)} + 5\,\widetilde{A}_1^{(4)} + 4\,\widetilde{A}_2^{(4)}$$

onde as componentes não se intersectam ou se intersectam transversalmente, de acordo com a figura acima.

Da mesma forma obtemos

$$\widetilde{\eta}^*(\infty) = 3\,\widetilde{B}_1^{(0)} + \widetilde{B}_2^{(0)} + \widetilde{B}_1^{(1)} + 2\,\widetilde{B}_2^{(1)} + \widetilde{B}_3^{(1)} + 3\,\widetilde{B}_1^{(2)} + 2\,\widetilde{B}_2^{(2)}$$

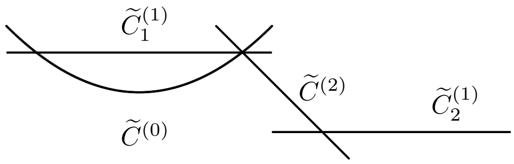
onde $B_1^{(0)}$ e $B_2^{(0)}$ são componentes de $\eta^*(\infty) = C_\infty$ e as outras componentes irredutíveis são curvas racionais suaves obtidas por uma cadeia de blowups de pontos. Elas não se intersectam ou se intersectam transversalmente, de acordo com o diagrama abaixo, exceto a interseção entre $\widetilde{B}_1^{(2)}$ e $\widetilde{B}_2^{(2)}$ que tem multiplicidade dois.



No último caso temos,

$$\widetilde{\eta}^*(3) = \widetilde{C}^{(0)} + 2\,\widetilde{C}_1^{(1)} + \widetilde{C}_2^{(1)} + 2\,\widetilde{C}^{(2)}$$

onde $\widetilde{C}_1^{(0)}$ é a transformação birracional de $\eta^*(3)$ e as outras componentes irredutíveis são curvas racionais suaves obtidas por uma cadeia de blowups de pontos. Elas não se intersectam ou se intersectam transversalmente, de acordo com o diagrama a seguir.



Lembremos rapidamente, que dado um divisor D de uma superfície a auto-interseção de D, denotada por $D \cdot D$ ou D^2, é calculada pela interseção entre D e D', digamos $D \cdot D'$, onde D' é uma deformação conveniente do divisor D.

Como as fibras de um morfismo sobre $\mathbb{P}^1$ e suas componentes se intersectam com índice de interseção zero, podemos calcular a auto-interseção de cada componente das fibras, usando as expressões dos pull-backs apresentados anteriormente. Por exemplo, vamos calcular $\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{\eta}^*(0) \\ &= 3\,\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}_1^{(0)} + \widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}_2^{(0)} + 3\,\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}^{(1)} + \\ &\quad\ 3\,\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}^{(3)} + 5\,\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}_1^{(4)} + 4\,\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}_2^{(4)} \\ &= 3\,\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}^{(1)} + 3 \end{aligned}$$

E logo, $\widetilde{A}^{(1)} \cdot \widetilde{A}^{(1)} = -1$.

Como podemos concluir facilmente, as curvas $\widetilde{B}_1^{(0)}$ e $\widetilde{A}^{(1)}$ são as únicas curvas racionais com auto-interseção -1 nas fibras. Logo pelo critério de Castelnouvo elas podem ser contraídas. Desta forma, concluímos que a fibração $\widetilde{\eta} : \widetilde{S} \to \mathbb{P}^1(k)$ não é minimal e, a partir desta, podemos chegar na fibração minimal, como resume o seguinte teorema.

Teorema 1. *A fibração $\overline{\eta} : \overline{Y} \to \mathbb{P}^1(k)$ obtida da fibração $\widetilde{\eta} : \widetilde{Y} \to \mathbb{P}^1(k)$ pela contração das duas componentes de fibras $\widetilde{B}_1^{(0)}$ e $\widetilde{A}^{(1)}$ é o modelo minimal regular próprio da fibração patológica(ou não-suave) $\eta : Y \to \mathbb{P}^1(k)$. Sua fibra sobre os três pontos $t = 0, \infty$ e 3 são combinações lineares de curvas racionais suaves*

$$\begin{aligned} \overline{\eta}^*(0) &= 3\,\overline{A}_1^{(0)} + \overline{A}_2^{(0)} + 3\,\overline{A}^{(3)} + 5\,\overline{A}_1^{(4)} + 4\,\overline{A}_2^{(4)} \\ \overline{\eta}^*(\infty) &= \overline{B}_2^{(0)} + \overline{B}_1^{(1)} + 2\,\overline{B}_2^{(1)} + \overline{B}_3^{(1)} + 3\,\overline{B}_1^{(2)} + 2\,\overline{B}_2^{(2)} \\ \overline{\eta}^*(3) &= \overline{C}^{(0)} + 2\,\overline{C}_1^{(1)} + \overline{C}_2^{(1)} + 2\,\overline{C}^{(2)} \end{aligned}$$

cujas configurações de interseções são obtidas pelas últimas três figuras, removendo as curvas pontilhadas. As curvas restantes são curvas irredutíveis que coincidem com as fibras $\eta^*(t) \cong C_t$ da fibração original η.

Observe que apesar da fibração ser minimal, o espaço total não é uma superfície minimal, já que pode ser verificado que a curva que contém os pontos de inflexão não ordinário das fibras de η, $(1:0:0)\times\mathbb{P}^1$, é uma curva horizontal racional e com auto-interseção -1. Porém é possível conhecer a geometria da superfície $\overline{S}$, já que, é possível encontrar um conjunto de curvas nesta superfície que contraindo chegamos em $\mathbb{P}^2$. E portanto conhecemos o seu grupo de Picard.

Filosofia da Construção

Dizemos que o morfismo dominante $\pi : X \longrightarrow Y$ entre variedades sobre um corpo k é *patológico*(ou *não-suave*) quando todas as fibras são singulares, enquanto o espaço total é não singular(após uma eventual restrição da base a um aberto denso de Y).

Suponhamos que $dimX = dimY + 1$ e que $K := k(Y)$ seja algebricamente fechado e separavelmente fechado em $F := k(X)$. Geometricamente, isto significa que quase toda fibra do morfismo π é uma curva integral.

Desta forma, podemos ver F como corpo de funções em uma variável sobre o corpo K.

Assumimos também que π seja próprio, e portanto as fibras são curvas projetivas.

Consideremos Z o modelo não singular do corpo de funções $F|K$. De modo geral, Z pode ser obtido pela fibra genérica do morfismo π, mais precisamente, Z é obtido pelos pontos fechados da fibra do ponto genérico de Y por π.

No segundo exemplo,

$$x^3z + (x^2z^2 - xyz^2 + xy^2z - y^4)t + (y+3z)z^3t^2 = 0,$$

é o modelo não singular do corpo de funções $k(S)|k(t)$.

Observe agora que quando estendemos a curva Z a $\overline{K}$, digamos $Z \otimes_K \overline{K}$, obtemos uma curva singular. E mais, esta propriedade é refletida na fibra geral do morfismo π.

Desta forma, temos em mente o fato geral:

"*O morfismo $\pi : X \longrightarrow Y$ é patológico(ou não-suave) se e só se $Z \otimes_K \overline{K}$ é uma curva singular sobre $\overline{K}$.*"

O que está por trás dessa afirmação é a seguinte filosofia:

"*Propriedades de $Z \otimes_K \overline{K}$ são herdadas por quase toda fibra do morfismo π.*"

Observe agora que $Z \otimes_K \overline{K}$ é singular se e só se seu gênero geométrico é menor que o gênero aritmético.

Como o gênero aritmético é invariante por extensões do corpo de constantes(cf. [2], p. 182), temos que esta última condição equivale a desigualdade

$$\overline{g} < g$$

onde g e $\overline{g}$ denotam o gênero do corpo de funções $F|K$ e $F \otimes_K \overline{K}|\overline{K}$, respectivamente.

Na literatura um corpo de funções que satisfaz esta condição é dito *não-conservativo.*

Um primo $\mathfrak{p} \in F$ com anel de valorização $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ é dito *suave* quando o domínio semi-local, unidimensional $\overline{K}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ é integralmente fechado. A $\overline{K}$-codimensão de $\overline{K}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ no seu fecho inteiro é chamada o *grau de singularidade* de $\mathfrak{p}$. Como a diferença $g - \overline{g}$ é dada pela soma das multiplicidades dos primos não suaves(cf. [2], p. 182), temos que o corpo de funções $F|K$ possui um primo não suave se e só se $\overline{g} < g$.

Um fato geral, que é interessante no nosso contexto, é a seguinte relação

$$\begin{gathered}\{\text{divisores primos horizontais de } X \to Y\}\\ \updownarrow \\ \{\text{pontos fechados da fibra genérica de } X \to Y\}\\ \updownarrow \\ \{\text{primos de } F|K\}\end{gathered}$$

Restringindo a um aberto da base Y, para que X seja suave e que não surja componentes de dimensão menor que a dimensão de Y em $X \setminus X_{sv}$, temos que

$\pi : X \longrightarrow Y$ é patológico(ou não-suave) $\Leftrightarrow X \setminus X_{sv}$ é um divisor horizontal,

onde X_{sv} denota os pontos suaves do morfismo $\pi : X \longrightarrow Y$.

No exemplo, este divisor é dado pela curva irredutível $S \setminus \{C_0, C_3, C_\infty\} \cap V(y^4 + 4xy^2z + 4y^3z + 4x^2z^2 + 2xyz^2 + xz^3)$.

Sendo assim, surge um fato interessante:

"*Os primos de $F|K$ que estão relacionados as componentes de $X \setminus X_{sv}$ são exatamente os primos não suaves de $F|K$.*"

Referências

[1] E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in characteristic p. III*, Invent. Math. **35** (1976), 197–232.

[2] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 169–171.

[3] I.R. Shafarevich, *"Basic Algebraic Geometry. 1"*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[4] K.-O. Stöhr, *On Bertini's theorem in characteristic p for families of canonical curves in* $\mathbb{P}^{(p-3)/2}$, Proc. London Math. Soc. (3) **89** (2004), 291–316.

[5] K.-O. Stöhr, *On Bertini's theorem for fibrations by plane projective quartics curves in characteristic five*, preprint.

[6] O. Zariski, *The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944), 130–140.