UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Instituto de Matemática

Um Contra-Exemplo para a Construção de Kedlaya do Fecho Algébrico de $K((t))$

Reillon Oriel Carvalho Santos

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Rodrigo Salomão

Niterói, 08 de Dezembro de 2015

Um Contra-Exemplo para a Construção de Kedlaya do Fecho Algébrico de $K((t))$

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Rodrigo Salomão - UFF
(Orientador)

Abramo Hefez - UFF

Cecília Salgado Guimarães da Silva - UFRJ

Niterói, 08 de Dezembro de 2015

Agradecimentos

RESUMO

Neste trabalho, provamos que, dado um corpo K algebricamente fechado de característica positiva, o conjunto das séries *twist-recurrent* sobre K forma uma extensão algébrica de $K((t))$, mas não forma um fecho algébrico. A grosso modo, séries *twist-recurrent* são séries de potências com expoentes racionais tais que o conjunto de coeficientes possui subsequências satisfazendo relações de recorrências.

Palavras-Chave: Funções Twist-recurrent. Séries Twist-recurrent. Extensões Algébricas. Fecho Algébrico.

ABSTRACT

In this work, we prove that given an algebraically closed field K of positive characteristic, the set of the twist-recurrent series over K forms an algebraic extension of $K((t))$. We also prove that this field is not algebraically closed. Roughly speaking, twist-recurrent series are power series with rational exponents such that the set of coefficients has subsequences satisfying recurrence relations.

Keywords: Twist-recurrent Functions. Twist-recurrent Series. Algebraic Extensions. Algebraic Closure.

Sumário

Introdução

Quando consideramos um corpo K de característica zero, o Teorema de Newton-Puiseux nos diz que o fecho algébrico de $K((t))$ é dado por $\bigcup_{n=0}^{\infty} K((t^{1/n}))$ (ver [He]). No entanto, Chevalley em [Ch] notou que, quando K é um corpo de característica $p > 0$, o polinômio de Artin-Schreier $X^p - X - t^{-1}$ não possui raiz no corpo de Newton-Puiseux. Então, em [Ab], Abhyankar notou que, com uma generalização adequada da noção de série de potências, este polinômio deveria ter as raízes da forma

$$i + t^{-1/p} + t^{-1/p^2} + \cdots \text{ , com } i \in \mathbb{F}_p.$$

Uma série de potências generalizada (ou simplesmente "série") é uma expressão da forma $\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} x_\alpha t^\alpha$, com $x_\alpha \in K$, onde o suporte $\{\alpha \mid x_\alpha \neq 0\}$, é um subconjunto bem-ordenado de $\mathbb{Q}$, isto é, todo subconjunto não vazio dele tem um menor elemento. A adição e multiplicação destas séries são definidas de maneira natural, de modo que este conjunto com estas operações formam um anel (ver [Ha]).

O teorema a seguir nos diz que o anel acima, que claramente contém o corpo $K((t))$, também contém um corpo algebricamente fechado.

Teorema (Huang [Hu], Rayner [Ra], Stefanescu [St1]). *Seja L o conjunto das séries de potências generalizadas da forma $f = \sum_{\alpha \in S} x_\alpha t^\alpha$ ($x_\alpha \in K$), onde o conjunto S (que depende de f) tem as seguintes propriedades:*

1. *Todo subconjunto não vazio de S possui um menor elemento.*

2. *Existe um número natural m tal que todo elemento de mS tem denominador igual a uma potência de p.*

Então L é um corpo algebricamente fechado.

Em sua tese, [Hu], Huang encontrou o conjunto que seria o fecho algébrico do corpo $K((t))$, sem descrever seus elementos. Então, Kedlaya em [Ke1] tentou fazer essa descrição tomando um subconjunto do anel das séries de potências generalizadas, com um suporte que satisfaz as condições do teorema acima, e impondo algumas condições sobre os coeficientes destas séries. Estas séries foram denominadas por *twist-recurrent*.

Este trabalho foi baseado no artigo mencionado acima e pretendia dar uma demonstração detalhada de que o conjunto dos elementos descritos nele forma um fecho algébrico do corpo $K((t))$. Porém, percebemos que o conjunto descrito forma uma extensão algébrica de $K((t))$, mas não um fecho algébrico. Uma nova tentativa de descrever o fecho algébrico de $K((t))$ pode ser encontrada no preprint [Ke3] de Kedlaya.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro, daremos alguns pré-requisitos para a compreensão da estratégia utilizada por Kedlaya em [Ke1]. No segundo, definiremos os objetos principais introduzidos neste artigo, provamos algumas propriedades destes objetos e, por fim, demonstramos que o conjunto descrito forma uma extensão algébrica de $K((t))$. No terceiro, mostramos onde a tentativa de demonstração, de que essa extensão é o fecho algébrico, falha e encerramos mostrando um contra-exemplo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos alguns resultados sobre corpos de valorização e polinômios aditivos que são ferramentas necessárias para a definição dos objetos utilizados ao longo do trabalho.

1.1 Valorizações e corpos de valorizações

Seja Γ um grupo abeliano aditivo totalmente ordenado. Adicionamos a Γ um elemento formal $+\infty$ com as propriedades $a \leq +\infty$, $+\infty \leq +\infty$, $a+(+\infty) = +\infty$, $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, para cada $a \in \Gamma$, denotamos este conjunto por Γ'.

Definição 1.1. Seja F um corpo, um mapa $v : F \to \Gamma'$ com as propriedades

$$v(\alpha) = +\infty \iff \alpha = 0$$
$$v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$$
$$v(\alpha + \beta) \geq \min(v(\alpha), v(\beta))$$

é dito uma valorização em F. Neste caso F é dito um corpo de valorização.

O mapa v induz um homomorfismo de F^* para Γ e seu grupo de valores $v(F^*)$ é um subgrupo totalmente ordenado de Γ.

Sejam $\mathcal{O}_v = \{\alpha \in F^* \mid v(\alpha) \geq 0\}$, $\mathcal{M}_v = \{\alpha \in F^* \mid v(\alpha) > 0\}$, então $\mathcal{M}_v$ coincide com o conjunto dos elementos de $\mathcal{O}_v$ não invertíveis. Portanto $\mathcal{O}_v$ é um anel local com único ideal maximal $\mathcal{M}_v$ e o corpo $\overline{F}_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ é chamado corpo residual. Os elementos invertíveis de $\mathcal{O}_v$ formam um grupo multiplicativo $U_v = \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{M}_v$, chamado grupo de unidades.

Uma valorização v em F é dita discreta se o grupo totalmente ordenado $v(F^*)$ é isomorfo ao grupo naturalmente ordenado $\mathbb{Z}$.

Um corpo F é dito um corpo de valorização discreta se admite uma valorização discreta não trivial v. Um elemento $\pi \in \mathcal{O}_v$ é dito um elemento primo se $v(\pi)$ gera o grupo $v(F^*)$.

Lema 1.2. *Seja F um corpo de valorização discreta e π um elemento primo, então $\mathcal{O}_v$ é um domínio de ideais principais e todo ideal próprio de $\mathcal{O}_v$ pode ser escrito como $\pi^n\mathcal{O}_v$ para algum $n > 0$. Em particular, $\mathcal{M}_v = \pi\mathcal{O}_v$.*

Prova. Ver [Fe], pág. 7. □

Lema 1.3. *Qualquer elemento $\alpha \in F^*$ pode ser escrito unicamente como $\pi^n\epsilon$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ e $\epsilon \in U_v$.*

Prova. Ver [Fe], pág. 7. □

Sejam v uma valorização discreta em F e $0 < d < 1$. A aplicação $d_v : F \times F \to \mathbb{R}$ definida por $d_v(\alpha, \beta) = d^{v(\alpha-\beta)}$ é uma métrica em F que induz uma topologia Hausdorff em F. Para todo $\alpha \in F$ os conjuntos $\alpha + \pi^n\mathcal{O}_v$, $n \in \mathbb{Z}$, formam uma base de vizinhanças abertas de α.

Lema 1.4. *O corpo F com a topologia definida acima é um corpo topológico.*

Prova. Ver [Fe], pág. 7. □

Seja F um corpo com uma valorização discreta v, vamos supor que $v(F^*) = \mathbb{Z}$. Como F é um espaço métrico temos a noção de sequência de Cauchy. Uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de elementos de F é dita uma sequência de Cauchy se para todo número real c existe $N \geq 0$ tal que $v(\alpha_n - \alpha_m) \geq c$ para $m, n \geq N$. Pelas propriedades de valorização, temos que para uma sequência de Cauchy existe $\lim v(\alpha_n)$.

Um corpo de valorização discreta F é dito um corpo de valorização discreta completo se toda sequência de Cauchy $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, é convergente, isto é, existe $\alpha = \lim \alpha_n \in F$ com respeito a v.

Seja F um corpo e L uma extensão de F com valorização $w : L \to \Gamma'$. Então w induz a valorização $w_0 = w|_F : F \to \Gamma'$. Neste contexto dizemos que $L|F$ é uma extensão de corpos de valorização. O grupo $w_0(F^*)$ é um subgrupo totalmente ordenado de $w(L^*)$ e o índice de $w_0(F^*)$ em $w(L^*)$ é chamado índice de ramificação $e(L|F, w)$. O anel $\mathcal{O}_{w_0}$ é um subanel do anel $\mathcal{O}_w$ e o ideal maximal $\mathcal{M}_{w_0}$ coincide com $\mathcal{M}_w \cap \mathcal{O}_{w_0}$, portanto o corpo residual $\overline{F}_{w_0}$ pode ser considerado como um subcorpo do corpo residual $\overline{L}_w$. O grau da extensão $\overline{L}_w|\overline{F}_{w_0}$ é chamado grau residual $f(L|F, w)$.

Sejam F e L corpos com valorizações discretas v e w respectivamente e $F \subset L$. A valorização w é dita ser uma extensão da valorização v se a topologia definida por w_0 é equivalente à topologia definida por v. Se $\alpha \in F$ então $w(\alpha) = e(L|F, w)v(\alpha)$.

Proposição 1.5. *Seja F um corpo completo com respeito a uma valorização v e L uma extensão finita de F. Então existe uma única extensão w em L da valorização v e o corpo L é completo com respeito a w.*

Prova. Ver [Fe], pág. 41. $\square$

A partir daqui só trataremos de corpos completos e, pela unicidade da extensão w, denotaremos $e(L|F, w), f(L|F, w)$ por $e(L|F), f(L|F)$, respectivamente. Além disso, denotaremos $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w, \mathcal{M}_v, \mathcal{M}_w, U_v, U_w, \overline{F}_v, \overline{L}_w$ por $\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_L, \mathcal{M}_F, \mathcal{M}_L, U_F, U_L, \overline{F}, \overline{L}$, respectivamente.

Corolário 1.6. *Se $n = [L : F]$, então $e(L|F)f(L|F) = n$.*

Prova. Segue da demonstração da proposição anterior. $\square$

Uma extensão finita L de um corpo de valorização discreta F é dita não ramificada se $\overline{L}|\overline{F}$ é uma extensão separável e de mesmo grau que $L|F$. Uma extensão finita $L|F$ é dita totalmente ramificada se $f(L|F) = 1$. Uma extensão finita $L|F$ é dita mansamente ramificada se $\overline{L}|\overline{F}$ é separável e $p \nmid e(L|F)$, onde $p > 0$ é a característica de $\overline{F}$.

Proposição 1.7. *Seja L uma extensão finita mansamente ramificada de um corpo de valorização discreta completo F e seja $L_0|F$ a sub-extensão não ramificada maximal em $L|F$. Então $L = L_0(\pi)$ e $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{L_0}[\pi]$, onde π é um elemento primo em L satisfazendo a equação $X^e - \pi_0 = 0$ para algum elemento primo π_0 em L_0, onde $e = e(L|F)$.*

Prova. Ver [Fe], pág. 53. $\square$

Sejam L uma extensão de Galois finita de F e $G = \mathrm{Gal}(L|F)$. Para um inteiro $i \geq -1$ definamos

$$G_i = \{\sigma \in G \mid \sigma\alpha - \alpha \in \mathcal{M}_L^{i+1} \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{O}_L\}.$$

Então $G_{-1} = G$ e $G_{i+1} \subset G_i$.

Lema 1.8. *Os G_i são subgrupos normais de G.*

Prova. Ver [Fe], pág. 57. $\square$

O grupo G_i é dito o i-ésimo grupo de ramificação de $L|F$. Os grupos G_i definem uma filtração de G e o quociente G/G_0 é o grupo de Galois da extensão $\overline{L}|\overline{F}$.

Proposição 1.9. *Seja L uma extensão de Galois finita de F e seja $\overline{L}$ uma extensão separável $\overline{F}$. Então $G_0 = \mathrm{Gal}(L|L_0)$, onde $L_0|F$ é a sub-extensão não ramificada maximal em $L|F$.*

Prova. Ver [Fe], pág. 58. □

O grupo G_0 é chamado grupo de inércia de G, e o corpo L_0 é chamado subcorpo de inércia de $L|F$.

Proposição 1.10. *Seja L uma extensão de Galois finita de F e $\overline{L}$ uma extensão separável de $\overline{F}$. Se a característica de $\overline{F}$ é $p > 0$, então o grupo G_0/G_1 é cíclico de ordem relativamente prima a p, G_i/G_{i+1} são p-grupos abelianos e G_1 é o p-subgrupo maximal de G_0.*

Prova. Ver [Fe], pág. 59. □

Proposição 1.11. *Seja L uma extensão de Galois finita de F e $\overline{L}$ uma extensão separável de $\overline{F}$. Então o grupo G_1 coincide com $\mathrm{Gal}(L|L_1)$, onde $L_1|F$ é a sub-extensão mansamente ramificada maximal em $L|F$.*

Prova. Ver [Fe], pág. 59. □

Terminaremos esta seção concluindo um resultado que é fundamental para a tentativa de Kedlaya em caracterizar o fecho algébrico de $K((t))$ com K algebricamente fechado de característica positiva.

Lema 1.12. *Toda extensão finita normal de $K((t))$ está contida em uma torre de extensões de Artin-Schreier sobre $K((t^{1/n}))$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Seja L uma extensão normal finita de $K((t))$ de grau de inseparabilidade q e seja G o grupo dos $K((t))$-automorfismos de L. Temos que o corpo fixo de G, L^G, é tal que a sub-extensão $L^G|K((t))$ de $L|K((t))$ é puramente inseparável de grau q. Além disso, $L|L^G$ é separável, portanto de Galois e $G = \mathrm{Gal}(L|L^G)$.

Como $K((t))$ é completo com respeito à valorização usual v_t, temos, pela Proposição 1.5, que L^G é completo com respeito a uma valorização w que estende v_t e, portanto, $L^G = \overline{L^G}((\tilde{t}))$ e $w = v_{\tilde{t}}$. Como $\overline{L^G}|K$ é extensão algébrica e K é algebricamente fechado, temos que $\overline{L^G} = K$, ou seja, $L^G|K((t))$ é uma extensão totalmente ramificada e vale

$L^G = K((\tilde{t}))$. Também temos que $v_{\tilde{t}}(x) = qv_t(x)$ para todo $x \in K((t))$, pela extensão ser totalmente ramificada e pelo Corolário 1.6.

Como $K((\tilde{t}))|K((t))$ é puramente inseparável, temos que $\tilde{t}^q \in K((t))$, logo $q = v_{\tilde{t}}(\tilde{t}^q) = qv_t(\tilde{t}^q)$, o que implica $v_t(\tilde{t}^q) = 1$. Logo $\tilde{t}^q$ é um elemento primo de $K((t))$, ou seja, $\tilde{t}^q = ut$, onde $u \in U_{K((t))}$. Como $K((t)) = K((ut))$ podemos supor que $L^G = K((t^{1/q}))$, a menos de K-isomorfismo.

Consideremos a filtração $\mathrm{Gal}(L|L^G) = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{id\}$, com os G_i definidos acima. Seja $M = L^{G_1}$. Temos que $M|L^G$ é a sub-extensão mansamente ramificada maximal em $L|L^G$, pela Proposição 1.11. Segue da Proposição 1.7 que $M = K((t^{1/q}))(x^{1/m})$, onde $p \nmid m$, $m = [M : L^G]$ e x é um elemento primo de L^G, pois também temos $\overline{M} = K$ donde $e(M|L^G) = m$. Como x é um elemento primo de L^G, existe $u \in U_{L^G}$ tal que $ux = t^{1/q}$. Como $p \nmid m$, existe $u' \in U_{L^G}$ tal que $u'^m = u$. Portanto temos que $u'x^{1/m} = t^{1/qm}$, assim $K((t^{1/q}))(x^{1/m}) = K((t^{1/q}))(u'x^{1/m}) = K((t^{1/q}))(t^{1/qm}) = K((t^{1/qm}))$.

Segue da Proposição 1.10 que $|\mathrm{Gal}(L|M)| = |G_1| = p^s$, então existe uma filtração $G_1 = G'_0 \triangleright G'_1 \triangleright \cdots \triangleright G'_s = \{id\}$ tal que $[G'_i : G'_{i+1}] = p$ (ver [La], pág. 35). E pelo Teorema de Artin-Schreier (ver [La], pág. 290) as extensões $M \subset L^{G'_1} \subset \cdots \subset L^{G_s} = L$ são todas de Artin-Schreier. $\square$

1.2 Polinômios aditivos

Definição 1.13. Um polinômio $P(X)$ sobre um corpo K de característica $p > 0$ é dito ser aditivo se vale a identidade polinomial $P(Y + Z) = P(Y) + P(Z)$.

Lema 1.14. *Seja K um corpo de característica $p > 0$. Dados $r_1, \ldots, r_n \in K$, o determinante de Moore*

$$\begin{vmatrix} r_1 & \cdots & r_n \\ r_1^p & \cdots & r_n^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{p^{n-1}} & \cdots & r_n^{p^{n-1}} \end{vmatrix}$$

é nulo se, e somente se, $r_1, \ldots, r_n$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{F}_p$.

Prova. Ver [Ke2], pág. 392. $\square$

Lema 1.15. *Seja $P(X)$ um polinômio não nulo sobre um corpo K de característica $p > 0$ e seja L um fecho algébrico de K. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) O polinômio $P(X)$ é aditivo;

(b) A equação $P(y + z) = P(y) + P(z)$ é satisfeita para todo $y, z \in L$;

(c) As raízes de $P(X)$ em L formam um $\mathbb{F}_p$−espaço vetorial com relação a adição, todas as suas raízes ocorrem com a mesma multiplicidade, que é uma potência de p;

(d) $P(X) = c_0X + c_1X^p + \cdots + c_nX^{p^n}$ com $c_0, \ldots, c_n \in K$.

Prova. Ver [Ke2], pág. 392. □

Teorema 1.16. *Seja K um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Seja $P(X) \in K[X]$ um polinômio separável com raízes*

$$W = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset K.$$

Então $P(X)$ é aditivo se, e somente se, W é um subgrupo de K.

Prova. Ver [Go], pág. 4. □

Corolário 1.17. *Seja $P(X)$ como no teorema acima. Então $P(X)$ é $\mathbb{F}_p$-linear se, e somente se, as raízes W de $P(X)$ formam um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial.*

Prova. Ver [Go], pág. 4. □

Capítulo 2

Uma extensão algébrica de $K((t))$

Neste capítulo definiremos um tipo especial de série de potências generalizadas, as séries *twist-recurrent*, e provaremos alguns resultados importantes para tentar encontrar o fecho algébrico de $K((t))$. Encerramos o capítulo mostrando que o conjunto dessas séries é uma extensão algébrica de $K((t))$.

A partir deste capítulo K sempre denotará um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$.

2.1 Séries *twist-recurrent*

Dizemos que uma sequência $\{c_n\}$ satisfaz uma relação de recorrência linearizada (RRL) se existem $d_0, \ldots, d_k \in K$ tais que

$$d_0 c_n + d_1 c_{n+1}^p + \cdots + d_k c_{n+k}^{p^k} = 0 \tag{2.1}$$

para todo $n \geq 0$. Podemos assumir que $d_k \neq 0$.

Observação 2.1. Se $d_0, \ldots, d_j = 0$ podemos trocar a RRL acima por

$$d_{j+1} c_{n+j} + \cdots + d_k c_{n+k}^{p^{k-j}} = 0. \tag{2.2}$$

Ou seja, ignorando alguns termos iniciais da sequência $\{c_n\}$, podemos também assumir que $d_0 \neq 0$.

Lema 2.2. *Seja k um inteiro positivo e sejam $d_0, \ldots, d_k$ elementos de K com $d_0, d_k \neq 0$.*

1. *As raízes do polinômio $P(X) = d_0 X + d_1 X^p + \cdots + d_k X^{p^k}$ formam um espaço vetorial de dimensão k sobre $\mathbb{F}_p$.*

2. *Seja* $z_1, \ldots, z_k$ *uma base do espaço vetorial acima. Então uma sequência* $\{c_n\}$ *satisfaz (2.1) se, e somente se, tem a forma*

$$c_n = z_1\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + z_k\lambda_k^{1/p^n} \tag{2.3}$$

para alguns $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$.

Prova. Para provar a primeira afirmação notemos que como $d_0 \neq 0$, temos que $P(X)$ é um polinômio separável. Então pelo Corolário 1.6 as raízes de $P(X)$ formam um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial.

Seja $\{z_1, \ldots, z_m\}$ uma base desse espaço, queremos encontrar o valor de m. Temos que

$$a_1z_1 + \cdots + a_mz_m,$$

$a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}_p$, são raízes de $P(X)$, ou seja, temos p^m raízes distintas. Portanto $m = k$. Para provar a segunda afirmação, sejam $V = \{\text{sequências que satisfazem (2.1)}\}$ e $V' = \{\text{sequências que satisfazem (2.3)}\}$.

Primeiro verificaremos que V é subespaço vetorial do K-espaço das sequências com soma usual e produto dado por

$$\eta(c_0, c_1, c_2, \ldots) = (c_0\eta, c_1\eta^{1/p}, c_2\eta^{1/p^2}, \ldots).$$

Sejam $\{c_n\}$, $\{c'_n\}$ sequências em V e $\eta \in K$, então $\{c_n\} + \eta\{c'_n\} = \{c_n + (\eta^{1/p^n}c'_n)\}_n = \{\tilde{c}_n\}$ é tal que

$$\begin{aligned} d_0\tilde{c}_n + \cdots + d_k\tilde{c}_{n+k}^{p^k} &= d_0(c_n + \eta^{1/p^n}c'_n) + \cdots + d_k(c_{n+k}^{p^k} + \eta^{1/p^n}c'^{\,p^k}_{n+k}) \\ &= d_0c_n + \cdots + d_kc_{n+k}^{p^k} + \eta^{1/p^n}(d_0c'_n + \cdots + d_kc'^{\,p^k}_{n+k}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto V é subespaço vetorial do espaço das sequências.

Afirmamos que V' é subespaço vetorial de V. De fato, vamos mostrar primeiramente que V' é um subconjunto de V. Para isto, seja $\{e_n\}$ sequência em V'. Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ tais que

$$e_n = z_1\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + z_k\lambda_k^{1/p^n}.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} d_0e_n + \cdots + d_ke_{n+k}^{p^k} &= d_0(z_1\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + z_k\lambda_k^{1/p^n}) + \cdots + d_k(z_1\lambda_1^{1/p^{n+k}} + \cdots + z_k\lambda_k^{1/p^{n+k}})^{p^k} \\ &= d_0z_1\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + d_kz_1^{p^k}\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + d_0z_k\lambda_k^{1/p^n} + \cdots + d_kz_k^{p^k}\lambda_k^{1/p^n} \\ &= P(z_1)\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + P(z_k)\lambda_k^{1/p^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para concluir que V' é um subespaço vetorial de V, basta observar que uma combinação linear de elementos de V' é, claramente, um elemento de V'.

Notemos que a dimensão de V sobre K é k pois pela relação (2.1) temos que a partir dos temos $c_0, \ldots, c_{k-1}$ de uma sequência conseguimos construir a sequência inteira, portanto temos um isomorfismo $T : K^k \to V$ dado por

$$T(c_0, \ldots, c_{k-1}) = \left(c_0, \ldots, c_{k-1}, -\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{d_i}{d_k} \right)^{1/p^k} c_i^{1/p^{k-i}}, \ldots \right).$$

Portanto a dimensão de V é k.

Agora, consideremos $\{c_n\}$ uma sequência em V', então

$$\begin{aligned}
(c_0, \ldots, c_n, \ldots) &= (z_1\lambda_1 + \cdots + z_k\lambda_k, \ldots, z_1\lambda_1^{1/p^n} + \cdots + z_k\lambda_k^{1/p^n}, \ldots) \\
&= (z_1\lambda_1, \ldots, z_1\lambda_1^{1/p^n}, \ldots) + \cdots + (z_k\lambda_k, \ldots, z_k\lambda_k^{1/p^n}, \ldots) \\
&= \lambda_1(z_1, z_1, \ldots) + \cdots + \lambda_k(z_k, z_k, \ldots).
\end{aligned}$$

Notemos que as sequências constantes $\{e_n\}$, $e_n = z_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$, pertencem a V', pois temos

$$e_n = z_i = z_1 0^{1/p^n} + \cdots + z_i 1^{1/p^n} + \cdots + z_k 0^{1/p^n}.$$

Além disso, essas sequências são linearmente independentes sobre K. Caso contrário, teríamos

$$\begin{aligned}
(0, 0, \ldots) &= \lambda_1(z_1, z_1, \ldots) + \cdots + \lambda_k(z_k, z_k, \ldots) \\
&= (z_1\lambda_1 + \cdots + z_k\lambda_k, \ldots, z_1\lambda_1^{1/p^{k-1}} + \cdots + z_k\lambda_k^{1/p^{k-1}}, \ldots),
\end{aligned}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ pertencem a K e não são todos nulos. Portanto,

$$\begin{aligned}
z_1\lambda_1 + \cdots + z_k\lambda_k &= 0 \\
z_1^p\lambda_1 + \cdots + z_k^p\lambda_k &= 0 \\
&\vdots \\
z_1^{p^{k-1}}\lambda_1 + \cdots + z_k^{p^{k-1}}\lambda_k &= 0.
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_k \\ z_1^p & \cdots & z_k^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{p^{k-1}} & \cdots & z_k^{p^{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

com o vetor dos lambdas não nulo. Desta forma o determinante da matriz dos z's é nulo, o que, pelo Lema 1.14, contraria o fato dos z_i's serem linearmente independentes sobre $\mathbb{F}_p$. Portanto a dimensão de V' também é k. Logo $V' = V$. $\square$

Corolário 2.3. *Se as sequências $\{c_n\}$ e $\{c'_n\}$ satisfazem RRL's com coeficientes $d_0, \ldots, d_k$ e $d'_0, \ldots, d'_l$, respectivamente, então as sequências $\{c_n + c'_n\}$ e $\{c_n c'_n\}$ satisfazem RRL's com coeficientes dependendo apenas dos d_i e d'_j.*

Prova. Sejam $\{z_1, \ldots, z_k\}$ e $\{w_1, \ldots, w_l\}$ as bases para os $\mathbb{F}_p$-espaços vetoriais das raízes dos polinômios $P(X) = d_0X + \cdots + d_kX^{p^k}$ e $Q(X) = d'_0X + \cdots + d'_lX^{p^l}$, respectivamente. Temos que os conjuntos $V = \{x_i + y_j \mid P(x_i) = 0, Q(y_j) = 0\}$ e $V' = \left\{\sum_{\text{finita}} x_iy_j \;\middle|\; P(x_i) = 0, Q(y_j) = 0\right\}$ são $\mathbb{F}_p$-espaços vetoriais gerados, respectivamente, por $\{z_1, \ldots, z_k\} \cup \{w_1, \ldots, w_l\}$ e $\{z_iw_j \mid i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, l\}$. Pelo Corolário 1.17, temos que os polinômios $P'(X) = \prod_{t_l \in V}(X - t_l)$ e $Q'(X) = \prod_{t'_l \in V'}(X - t'_l)$ são aditivos.

Como $\{c_n\}$ e $\{c'_n\}$ satisfazem as RRL's associadas aos polinômios $P(X)$ e $Q(X)$, respectivamente, temos pelo lema anterior, que existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l \in K$ tais que

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_i z_i\lambda_i^{1/p^n} \\ c'_n &= \sum_j w_j\mu_j^{1/p^n}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_n + c'_n &= \sum_i z_i\lambda_i^{1/p^n} + \sum_j w_j\mu_j^{1/p^n} \\ c_nc'_n &= \sum_{i,j}(z_iw_j)(\lambda_i\mu_j)^{1/p^n}. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos que $\{c_n + c'_n\}$ e $\{c_nc'_n\}$ também satisfazem (2.3), consequentemente satisfazem (2.1). Além disso, temos que as RRL's são aquelas associadas a $P'(X)$ e $Q'(X)$, respectivamente. Ou seja, as novas RRL's dependem apenas dos coeficientes $d_0, \ldots, d_k$ e $d'_0, \ldots, d'_l$ iniciais. $\square$

Observação 2.4. Segue da demonstração acima que se tivermos um número finito de sequências, podemos encontrar uma RRL que é satisfeita por todas. Basta considerar a RRL satisfeita pela soma das sequências, pois o espaço das raízes do polinômio associado a esta RRL é a soma dos espaços das raízes dos polinômios associados às RRL's iniciais. Desta forma, o polinômio associado a RRL de uma das sequências divide o polinômio associado a RRL da soma das sequências.

Agora construímos o conjunto em que as séries que trabalhamos estão suportadas. Para $a \in \mathbb{N}$ e $b, c \geq 0$, definimos o conjunto

$$S_{a,b,c} = \left\{\frac{1}{a}(n - b_1p^{-1} - b_2p^{-2} - \cdots) \;\middle|\; n \geq -b, b_i \in \{0, \ldots, p-1\}, \sum b_i \leq c\right\}.$$

Notemos que as séries suportadas em algum $S_{a,b,c}$ pertencem ao corpo L do Teorema de Huang-Rayner-Stefanescu, pois se $A \subset S_{a,b,c}$, temos que $\inf A \in S_{a,b,c}$, pois é o limite de uma sequência não crescente de elementos cujas somas dos dígitos das partes fracionárias, escritos em base p, são menores ou iguais a c. Além disso, esta condição também implica que essa sequência não pode ter ponto de acumulação, logo A é bem ordenado. A segunda condição do teorema é satisfeita quando multiplicando um elemento de $S_{a,b,c}$ por a.

Nosso objetivo é encontrar dentre as séries suportadas na união dos conjuntos $S_{a,b,c}$, aquelas que são algébricas sobre $K((t))$. Para isto introduzimos as seguintes definições.

Definição 2.5. Seja $T_c = S_{1,0,c} \cap (-1, 0)$. Uma função $f : T_c \to K$ é *twist-recurrent* de ordem k, para algum inteiro positivo k, se existem $d_0, \dots, d_k \in K$ tais que a RRL (2.1) vale para toda sequência $\{c_n\}$ da forma

$$c_n = f(-b_1 p^{-1} - \cdots - b_{j-1} p^{-j+1} - p^{-n}(b_j p^{-j} + \cdots)) \quad (n \geq 0) \tag{2.4}$$

para $j \in \mathbb{N}$ e $b_1, b_2, \ldots \in \{0, \dots, p-1\}$ com $\sum b_i \leq c$. Se o valor de k não for relevante, dizemos apenas que f é *twist-recurrent*.

Exemplo 2.6. Uma sequência dessa forma é

$$f(-0,2021), f(-0,20201), f(-0,202001), f(-0,2020001), \ldots$$

onde os argumentos de f estão escritos em base p.

Definição 2.7. Uma série $x = \sum x_\alpha t^\alpha$ é *twist-recurrent* se as seguintes condições valem:

1. Existem $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que x está suportada em $S_{a,b,c}$.
2. Para valores a, b, c para os quais x está suportada em $S_{a,b,c}$ e para cada inteiro $m \geq -b$, a função $f_m : T_c \to K$, dada por $f_m(\alpha) = x_{(m+\alpha)/a}$, é *twist-recurrent*.
3. As funções f_m geram um espaço vetorial de dimensão finita sobre K.

Uma maneira de encontrar séries *twist-recurrent* é dada pelo seguinte lema.

Lema 2.8. *Toda série twist-recurrent suportada em $S_{1,b,c}$ pode ser escrita como a soma de um elemento de $K((t))$, com termo inicial de grau maior ou igual a $-b$, e uma combinação $K((t))$-linear finita de séries twist-recurrent suportadas em T_c. Além disso, toda combinação dessa forma é twist-recurrent.*

Prova. Se $x = \sum x_\alpha t^\alpha$ é uma série *twist-recurrent* suportada em $S_{1,b,c}$, consideremos as funções $f_m : T_c \mapsto K$ para $m \geq -b$ pela fórmula $f_m(\beta) = x_{m+\beta}$ como na Definição 2.7. Pela condição 3 desta definição as funções f_m geram um espaço vetorial de dimensão finita de funções de T_c em K. Seja $\{g_1, \ldots, g_r\}$ uma base desse espaço e escrevamos $f_m = k_{1,m}g_1 + \ldots + k_{r,m}g_r$. Assim

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{\alpha \in S_{1,b,c}} x_\alpha t^\alpha \\
&= \sum_{m \geq -b} x_m t^m + \sum_{m \geq -b} \sum_{\alpha \in T_c} x_{m+\alpha} t^{m+\alpha} \\
&= \sum_{m \geq -b} x_m t^m + \sum_{m \geq -b} \sum_{\alpha \in T_c} f_m(\alpha) t^{m+\alpha} \\
&= \sum_{m \geq -b} x_m t^m + \sum_{m \geq -b} \sum_{\alpha \in T_c} (k_{1,m}g_1(\alpha) + \cdots + k_{r,m}g_r(\alpha)) t^{m+\alpha} \\
&= \sum_{m \geq -b} x_m t^m + \left(\sum_{m \geq -b} k_{1,m} t^m\right) \left(\sum_{\alpha \in T_c} g_1(\alpha) t^\alpha\right) + \cdots + \left(\sum_{m \geq -b} k_{r,m} t^m\right) \left(\sum_{\alpha \in T_c} g_r(\alpha) t^\alpha\right).
\end{aligned}$$

Com isto expressamos x como uma soma de um elemento de $K((t))$, com termo inicial de grau maior ou igual a $-b$, e uma combinação $K((t))$-linear finita de séries *twist-recurrent* suportadas em T_c. Reciprocamente, para mostrar que uma soma dessa forma é *twist-recurrent* mostraremos que

1. Se $y \in K((t))$ é uma série com termo inicial de grau maior ou igual a $-b$ e x é uma série *twist-recurrent* suportada em T_c, então o produto yx é uma série *twist-recurrent* suportada em $S_{1,b,c}$.

2. Se x, y são séries *twist-recurrent* suportadas $S_{1,b,c}$, então $x + y$ também é uma série *twist-recurrent* suportada em $S_{1,b,c}$.

Inicialmente provaremos a primeira afirmação. Sejam $y = \sum_{m \geq -b} a_m t^m$ e $x = \sum_{\alpha \in T_c} x_\alpha t^\alpha$, então

$$yx = \left(\sum_{m \geq -b} a_m t^m\right) \left(\sum_{\alpha \in T_c} x_\alpha t^\alpha\right) = \sum_{m \geq -b} \sum_{\alpha \in T_c} a_m x_\alpha t^{m+\alpha} = \sum_{\beta \in S_{1,b,c}} \tilde{x}_\beta t^\beta,$$

onde $\beta = m + \alpha$ e $\tilde{x}_\beta = a_m x_\alpha$.

Portanto yx satisfaz a condição 1 da Definição 2.7. As condições 2 e 3 são claramente satisfeitas, pois as funções f_m são dadas por $f_m = a_m g$, onde g é a única função *twist-recurrent* não nula de x.

Agora, para a segunda afirmação, sejam $x = \sum_{\alpha \in S_{1,b,c}} x_\alpha t^\alpha$, $y = \sum_{\alpha \in S_{1,b,c}} y_\alpha t^\alpha$, então $x + y = \sum_{\alpha \in S_{1,b,c}} (x_\alpha + y_\alpha) t^\alpha$. Portanto $x + y$ satisfaz a condição 1 da Definição 2.7.

Verificaremos a condição 2. Denotemos por $f_{1,m}, f_{2,m}$ as funções *twist-recurrent* dadas por esta condição para x, y, respectivamente. Então para $x+y$ temos as funções $f_m = f_{1,m} + f_{2,m}$. Para ver que essas funções são *twist-recurrent* consideremos uma sequência $\{\alpha_n\}$ em T_c, como na Definição 2.5. Assim

$$\{f_m(\alpha_n)\}_n = \{f_{1,m}(\alpha_n) + f_{2,m}(\alpha_n)\}_n = \{x_{m+\alpha_n} + y_{m+\alpha_n}\}_n.$$

Por hipótese as sequências $\{x_{m+\alpha_n}\}_n$ e $\{y_{m+\alpha_n}\}_n$ satisfazem RRL's, então, pelo Corolário 2.3, $\{x_{m+\alpha_n} + y_{m+\alpha_n}\}_n$ satisfaz uma RRL. Portanto as funções f_m são *twist-recurrent*, como queríamos.

Para provar a condição 3, basta observar que o espaço das funções f_m é gerado pela união entre os conjuntos dos geradores das funções $f_{1,m}$ e $f_{2,m}$, que são conjuntos finitos. Isto conclui a afirmação 2 e o lema. □

Observação 2.9. Na demonstração acima vimos que o Corolário 2.3 implica que somas de funções *twist-recurrent* é *twist-recurrent*. Também veremos, na demonstração do item 2 do Teorema 2.11, que este lema implica que somas de séries *twist-recurrent* é *twist-recurrent*.

Proposição 2.10. *Dados dois conjuntos $S_{a,b,c}$ e $S_{a',b',c'}$ existe um terceiro $S_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$ tal que $S_{a,b,c}, S_{a',b',c'} \subset S_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$.*

Prova. Primeiramente observemos que $S_{a,b,c} \subset S_{a,\tilde{b},\tilde{c}}$ e $S_{a',b',c'} \subset S_{a',\tilde{b},\tilde{c}}$, se tomarmos $\tilde{b} = \max\{b, b'\}$ e $\tilde{c} = \max\{c, c'\}$. De fato, dado $\alpha \in S_{a,b,c}$ temos

$$\alpha = \frac{1}{a}(n - b_1 p^{-1} - b_2 p^{-2} - \cdots),$$

com $n \geq -b$, $b_i \in \{1, \ldots, p-1\}$ e $\sum b_i \leq c$. Como $-b \geq -\tilde{b}$ e $c \leq \tilde{c}$ temos $n \geq -\tilde{b}$ e $\sum b_i \leq \tilde{c}$, e portanto, $\alpha \in S_{a,\tilde{b},\tilde{c}}$. Analogamente mostramos que $S_{a',b',c'} \subset S_{a',\tilde{b},\tilde{c}}$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $b = b'$ e $c = c'$ e que $a' \leq a$.

Provaremos que se tomarmos $\tilde{a} = aa'$, $\tilde{b} = a(b+1)$ e $\tilde{c} = ac$ obtemos as inclusões desejadas.

Seja $\alpha \in S_{a,b,c}$, então

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{a}(n - b_1 p^{-1} - b_2 p^{-2} - \cdots - b_l p^{-l}) \\
&= \frac{1}{\tilde{a}}(a'n - a'b_1 p^{-1} - a'b_2 p^{-2} - \cdots - a'b_l p^{-l}) \\
&= \frac{1}{\tilde{a}}(a'n - q_1 - r_1 p^{-1} - \cdots - r_l p^{-l}),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
a'b_l &= pq_l + r_l \\
a'b_{l-1} + q_l &= pq_{l-1} + r_{l-1} \\
&\vdots \\
a'b_1 + q_2 &= pq_1 + r_1,
\end{aligned}$$

com $0 \leq r_i \leq p-1$ e

$$\begin{aligned}
\sum r_i &= r_l + \cdots + r_1 \\
&= a'b_l - pq_l + a'b_{l-1} + q_l - pq_{l-1} + \cdots a'b_1 + q_2 - pq_1 \\
&\leq a'b_l - pq_l + a'b_{l-1} + pq_l - pq_{l-1} + \cdots a'b_1 + pq_2 - pq_1 \\
&= a'\left(\sum b_i\right) - pq_1 \leq a'c \leq \tilde{c}.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $a'n - q_1 \geq -\tilde{b}$ para obtermos $\alpha \in S_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$. Para isto, basta mostrar que $q_1 \leq a'$.

Temos que

$$b_l < p \Rightarrow a'b_l < a'p \Rightarrow q_l = \left[\frac{a'b_l}{p}\right] \leq \left[\frac{a'p}{p}\right] = a',$$
$$a'b_{l-1} + q_l \leq a'(p-1) + a' = a'p \Rightarrow q_{l-1} \leq \left[\frac{a'b_{l-1} + q_l}{p}\right] \leq \left[\frac{a'p}{p}\right] = a',$$

continuando o processo acima obtemos $q_1 \leq a'$, como desejado. Com isso mostramos que $S_{a,b,c} \subset S_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$

Analogamente mostramos que $S_{a',b,c} \subset S_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$. □

2.2 Teorema

Teorema 2.11. *O conjunto das séries twist-recurrent $\mathcal{S}$ forma um corpo. Além disso, $\mathcal{S}$ é uma extensão algébrica de $K((t))$.*

Prova. Verificaremos as seguintes afirmações:

1. Toda série *twist-recurrent* é algébrica sobre $K((t))$.

2. As séries *twist-recurrent* são fechadas para adição e multiplicação.

Segue dessas afirmações que $\mathcal{S}$ é um anel, algébrico sobre $K((t))$ (que será um corpo, já que, pelo item 1, $x^{-1} \in K((t))(x) = K((t))[x] \subset \mathcal{S}$ para toda série *twist-recurrent* x).

Segue da Proposição 2.10 que dados dos conjuntos suporte $S_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}, S_{a',b',c'}$ existe um terceiro $S_{a,b,c}$ que os contém, assim podemos definir soma e produto de séries *twist-recurrent*.

Também podemos ver séries suportadas em $S_{a,b,c}$ como séries suportadas em $S_{1,b,c}$ na indeterminada $t^{\frac{1}{a}}$. Portanto provaremos as afirmações supondo $a = 1$.

1. Provaremos por indução em c. O caso $c = 0$ é válido pois $S_{1,b,0} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq -b\}$. Assim, o conjunto das séries suportadas neste conjunto é $\{y \in K((t)) \mid \operatorname{ord}_t y \geq -b\} \subset K((t))$. Suponhamos, agora, $c \geq 1$. Pelo Lema 2.8, só precisamos provar para séries suportadas em T_c.

   Seja $x = \sum_{\alpha \in T_c} x_\alpha t^\alpha$ uma série *twist-recurrent* com RRL dada por

$$d_0 c_n + d_1 c_{n+1}^p + \cdots + d_k c_{n+k}^{p^k} = 0,$$

   com $d_0, d_k \neq 0$, com k mínimo e $c_n = f_0(\alpha_n) = x_{\alpha_n}$, onde $\alpha_n = -b_1 p^{-1} - \cdots - b_{j-1} p^{-j+1} - p^{-n}(b_j p^{-j} + \cdots)$. (Notemos que se x está suportada em T_c a única função *twist-recurrent* não nula é f_0, portanto só temos uma RRL.)

   Consideremos

$$y = d_0^{1/p^k} x^{1/p^k} + d_1^{1/p^k} x^{1/p^{k-1}} + \cdots + d_k^{1/p^k} x.$$

   Afirmamos que y é *twist-recurrent* suportada em $S_{p^k, \tilde{b}, c-1}$, onde $\tilde{b} = \sum_{i=0}^{k-1} (p-1)p^i$.

   Primeiro observamos que se $\beta = -\sum b_i p^{-i}$ pertence a T_c e $b_1 = \cdots = b_k = 0$, então $y_\beta = 0$. De fato, se $b_1 = \ldots = b_k = 0$ então $\alpha = p^k \beta \in T_c$ e

$$y_\beta = d_0^{1/p^k} x_\alpha^{1/p^k} + d_1^{1/p^k} x_{p^{-1}\alpha}^{1/p^{k-1}} + \cdots + d_k^{1/p^k} x_{p^{-k}\alpha},$$

   e

$$\begin{aligned} y_\beta^{p^k} &= d_0 x_\alpha + d_1 x_{p^{-1}\alpha}^p + \cdots + d_k x_{p^{-k}\alpha}^{p^k} \\ &= d_0 c_0 + d_1 c_1^p + \cdots + d_k c_k^{p^k}, \end{aligned}$$

   onde $\{c_n\} = \{f_0(p^{-n}\alpha)\}$, $n \geq 0$. Como x é *twist-recurrent*, temos que $y_\beta^{p^k} = 0$, logo $y_\beta = 0$, como queríamos.

   Agora se $b_i \neq 0$ para algum $1 \leq i \leq k$ então temos $\beta \in S_{p^k, \tilde{b}, c-1}$. De fato, se l é mínimo tal que $b_l \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \beta &= -b_l p^{-l} - \cdots - b_k p^{-k} - b_{k+1} p^{-k-1} - \cdots \\ &= \frac{1}{p^k}(-b_l p^{k-l} - \cdots - b_k - b_{k+1} p^{-1} - \cdots). \end{aligned}$$

   Como $b_l \neq 0$ temos $\sum_{i=1}^{k} b_i \geq 1$, o que implica $\sum_{i>k} b_i \leq c - 1$ e

$$b_l p^{k-l} + \cdots + b_k \leq (p-1)p^{k-1} + \cdots + (p-1) = \tilde{b}.$$

Portanto $\beta \in S_{p^k,\tilde{b},c-1}$ e

$$y_\beta = d_{k-l+1}^{1/p^k} x_{p^{l-1}\beta}^{1/p^{k-l+1}} + \cdots + d_k^{1/p^k} x_\beta$$

é não nulo se $x_\beta \neq 0$.

Para mostrar que y é *twist-recurrent* resta verificar as condições 2 e 3 da Definição 2.7.

Como vimos acima só estamos interessados nos $\alpha \in T_c$ tais que $b_i \neq 0$ para algum $i = 1, \ldots, k$. Seja $T_c^* = \{\alpha \in T_c : b_i \neq 0 \text{ para algum } 1 \leq i \leq k\}$.

Afirmamos que

$$d_k^{1/p^k} x^* := \sum_{\alpha \in T_c^*} d_k^{1/p^k} x_\alpha t^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 \neq 0}} d_k^{1/p^k} x_\alpha t^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = 0, b_2 \neq 0}} d_k^{1/p^k} x_\alpha t^\alpha + \cdots + \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0 \\ b_k \neq 0}} d_k^{1/p^k} x_\alpha t^\alpha$$

$$d_{k-1}^{1/p^k} (x^{1/p})^* := \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = 0}} d_{k-1}^{1/p^k} x_{p\alpha}^{1/p} t^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = 0, b_2 \neq 0}} d_{k-1}^{1/p^k} x_{p\alpha}^{1/p} t^\alpha + \cdots + \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0 \\ b_k \neq 0}} d_{k-1}^{1/p^k} x_{p\alpha}^{1/p} t^\alpha$$

$$\vdots$$

$$d_1^{1/p^k} (x^{1/p^{k-1}})^* := \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0}} d_1^{1/p^k} x_{p^{k-1}\alpha}^{1/p^{k-1}} t^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in T_c^* \\ b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0 \\ b_k \neq 0}} d_1^{1/p^k} x_{p^{k-1}\alpha}^{1/p^{k-1}} t^\alpha$$

são *twist-recurrent* em $S_{p^k,\tilde{b},c-1}$. (Observe que $\{\alpha \in T_c^* : b_1 = \cdots = b_k = 0\} = \varnothing$, portanto $d_0^{1/p^k}(x^{1/p^k})^* = 0$.) Para isso, mostraremos que as funções $f_{j,m} : T_{c-1} \to K$, definidas por $f_{j,m}(\alpha) = (d_{k-j}^{1/p^k}(x^{1/p^j})^*)_\alpha$, onde $0 \leq j \leq k-1$ e $m \geq -\tilde{b}$, são *twist-recurrent*. Como existe apenas um número finito dessas funções, teremos as três condições da Definição 2.7 satisfeitas por cada uma das séries acima. Como $d_0^{1/p^k} x^{1/p^k} + d_1^{1/p^k} x^{1/p^{k-1}} + \cdots + d_k^{1/p^k} x = y = d_1^{1/p^k}(x^{1/p^{k-1}})^* + \cdots + d_k^{1/p^k} x^*$, teremos que y é *twist-recurrent*, pelo item 2.

Já vimos que $T_c^* \subset S_{p^k,\tilde{b},c-1}$.

Para $d_k^{1/p^k} x^*$ temos as funções $f_{0,m} : T_{c+\tilde{m}} \to K$, onde $m = -a_0 - \cdots - a_l p^l$, $0 \leq l \leq k-1$, $\tilde{m} = -a_0 - \cdots - a_l$, são dadas por

$$f_{0,m}(\alpha) = \begin{cases} d_k^{1/p^k} x_{\frac{m+\alpha}{p^k}}, & \text{se } \dfrac{m+\alpha}{p^k} \in T_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notemos que $T_{c+\tilde{m}} \subset T_{c-1}$, portanto podemos estender as funções $f_{0,m}$ para T_{c-1} definidas da mesma forma.

Assim, se (α_n) é uma sequência da forma

$$\alpha_n = -b_1 p^{-1} - \cdots - b_{j-1} p^{-j+1} - p^{-n}(b_j p^{-j} - \cdots) \tag{2.5}$$

que não anula $f_{0,m}$, temos que

$$c_{0,n} = f_{0,m}(\alpha_n) = d_k^{1/p^k} x_{\frac{m+\alpha_n}{p^k}}$$

satisfaz a RRL

$$\frac{d_0}{d_k^{1/p^k}} c_{0,n} + \frac{d_1}{d_k^{1/p^{k-1}}} c_{0,n+1}^p + \cdots + \frac{d_k}{d_k} c_{0,n+k}^{p^k} = 0.$$

Estamos usando o fato de $\left(\dfrac{m+\alpha_n}{p^k}\right)$ ser uma sequência em T_c e que $x_{\frac{m+\alpha_n}{p^k}}$ satisfaz a RRL

$$d_0 \frac{c_{0,n}}{d_k^{1/p^k}} + d_1 \left(\frac{c_{0,n+1}}{d_k^{1/p^k}}\right)^p + \cdots + d_k \left(\frac{c_{0,n+k}}{d_k^{1/p^k}}\right)^{p^k} = 0.$$

Para $d_{k-1}^{1/p^k}(x^{1/p})^*$ temos as funções $f_{1,m} : T_{c+\tilde{m}} \to K$, onde $m = -a_0 - \cdots - a_l p^l, 0 \leq l \leq k-2$, $\tilde{m} = -a_0 - \cdots - a_l$, são dadas por

$$f_{1,m}(\alpha) = \begin{cases} d_{k-1}^{1/p^k} x_{p\frac{m+\alpha}{p^k}}^{1/p}, & \text{se } p\dfrac{m+\alpha}{p^k} \in T_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Novamente temos que $T_{c+\tilde{m}} \subset T_{c-1}$, portanto podemos estender as funções $f_{1,m}$ para T_{c-1} definidas da mesma forma.

Assim, se (α_n) é uma sequência da forma (2.5) que não anula $f_{1,m}$, temos que

$$c_{1,n} = f_{1,m}(\alpha_n) = d_{k-1}^{1/p^k} x_{p\frac{m+\alpha_n}{p^k}}^{1/p}$$

satisfaz a RRL

$$\frac{d_0}{d_{k-1}^{1/p^k}} c_{1,n} + \frac{d_1}{d_{k-1}^{1/p^{k-1}}} c_{1,n+1}^p + \cdots + \frac{d_k}{d_{k-1}} c_{1,n+k}^{p^k} = 0,$$

por um motivo análogo ao anterior.

Mais geralmente, para $d_{k-j}^{1/p^k}(x^{1/p^j})^*$ temos as funções $f_{j,m} : T_{c+\tilde{m}} \to K$, onde $m = -a_0 - \cdots - a_l p^l, 0 \leq l \leq k-j-1$, $\tilde{m} = -a_0 - \cdots - a_l$, são dadas por

$$f_{j,m}(\alpha) = \begin{cases} d_{k-j}^{1/p^k} x_{p^j\frac{m+\alpha}{p^k}}^{1/p^j}, & \text{se } p^j\dfrac{m+\alpha}{p^k} \in T_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Novamente temos que $T_{c+\tilde{m}} \subset T_{c-1}$, portanto podemos estender as funções $f_{j,m}$ para T_{c-1} definidas da mesma forma.

Assim, se (α_n) é uma sequência da forma (2.5) que não anula $f_{j,m}$, temos que

$$c_{j,n} = f_{j,m}(\alpha_n) = d_{k-j}^{1/p^k} x_{p\frac{m+\alpha_n}{p^k}}^{1/p^j}$$

satisfaz a RRL

$$\frac{d_0}{d_{k-j}^{1/p^k}} c_{j,n} + \frac{d_1}{d_{k-j}^{1/p^{k-1}}} c_{j,n+1}^p + \cdots + \frac{d_k}{d_{k-j}} c_{j,n+k}^{p^k} = 0,$$

por um motivo análogo ao primeiro.

Portanto, obtemos que todas as séries $d_{k-j}^{1/p^k}(x^{1/p^j})^*$ são *twist-recurrent*. Consequentemente, obtemos que y é uma série *twist-recurrent*.

Por hipótese de indução temos que y é algébrico sobre $K((t))$, assim como y^{p^k}. Logo, pelo modo como y foi escolhido, temos que x é algébrico sobre $K((t))$. Isto termina a prova do item 1.

2. Sejam x, y séries *twist-recurrent* suportadas em $S_{1,b,c}$. Pelo Lema 2.8 podemos escrever $x = p_0(t) + \sum_{j=1}^{r} p_j(t)x_j$, onde $p_j(t) \in K((t)), 0 \leq j \leq r$, e $x_j, 1 \leq j \leq r$, são séries *twist-recurrent* suportadas em T_c, e $y = q_0(t) + \sum_{j=1}^{s} q_j(t)y_j$, onde $q_j(t) \in K((t)), 0 \leq j \leq s$ e $y_j, 1 \leq j \leq s$, são séries *twist-recurrent* suportadas em T_c.

Sem perda de generalidade podemos supor $r \geq s$.

Para a soma, temos $x + y = g_0(t) + \sum_{j=0}^{r} g_j(t)z_j$, onde

$$g_j(t) = \begin{cases} p_j(t) + q_j(t), & \text{se } 0 \leq j \leq s \\ p_j(t), & \text{se } s+1 \leq j \leq r \end{cases}, \text{ e } z_j = \begin{cases} x_j + y_j, & \text{se } 1 \leq j \leq s \\ x_j, & \text{se } s+1 \leq j \leq r \end{cases}.$$

Assim, temos que os z_j's são *twist-recurrent* suportados em T_c, pelo Corolário 2.3, e os $g_j(t)$'s pertencem a $K((t))$. Logo, pelo Lema 2.8, $x + y$ é uma série *twist-recurrent*.

Para o produto, temos

$$xy = h_{00}(t) + \sum_{j=1}^{r} p_j(t)q_0(t)x_j + \sum_{j=1}^{s} p_0(t)q_j(t)y_j + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} h_{jk}(t)x_jy_k,$$

onde $h_{jk} = p_j(t)q_k(t)$, para $0 \leq j \leq r$ e $0 \leq k \leq s$.

Segue do Lema 2.8 que $h_{00}(t) + \sum_{j=1}^{r} p_j(t)q_0(t)x_j + \sum_{j=1}^{s} p_0(t)q_j(t)y_j$ é *twist-recurrent*. Resta, então, mostrar que cada x_jy_k também é *twist-recurrent*. Daí usando novamente o Lema 2.8 obtemos que xy é *twist-recurrent*. Para isto, basta mostrar que o produto de duas séries *twist-recurrent* x, y suportadas em T_c é *twist-recurrent*.

Provaremos isto mostrando que qualquer sequência da forma

$$c_n = (xy)_{-b_0-b_1p^{-1}-\cdots-b_{j-1}p^{-j+1}-p^{-n}(b_jp^{-j}-\cdots-b_mp^{-m})} = (xy)_{\gamma_n}$$

pode ser escrita como a soma de um número finito de produtos de pares de sequências semelhantes derivadas de x e y. Essas sequências satisfarão RRL's fixas, portanto $\{c_n\}$ também satisfará uma RRL, pelo Corolário 2.3.

Primeiro, observemos que $(xy)_\gamma$ é a soma de todos $x_\alpha y_\beta$ tais que $(\alpha; \beta) \in T_c \times T_c$ e $\alpha + \beta = \gamma$.

Suponhamos inicialmente que $b_{j-1}, b_j \neq 0$.

Queremos escrever $\{(xy)_{\gamma_n}\}_n$ como soma finita de produtos de sequências que satisfazem RRL's. Para isto, devemos organizar os pares $(\alpha_n;\beta_n) \in T_c \times T_c$, onde $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$, em um número finito de sequências de modo que $\{x_{\alpha_n}\}_n$ e $\{y_{\beta_n}\}_n$ satisfaçam RRL's.

Escreveremos apenas $(\alpha_n;\beta_n)$ para indicar $(\alpha_n;\beta_n) \in T_c \times T_c$ tal que $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$. Também escreveremos os números α, β, γ em base p para facilitar a escrita.

Notemos que os pares $(\alpha_n;\beta_n)$ podem ser de três formas distintas:

i. $(\alpha_n;\beta_n) = (-0, c_1 \ldots c_{j-1}u_1 \ldots u_n c_j \ldots c_r; -0, d_1 \ldots d_{j-1}v_1 \ldots v_n d_j \ldots d_r)$ e $c_{j-1} + d_{j-1} = b_{j-1}$, consequentemente $u_1 = \cdots = u_n = v_1 = \cdots = v_n = 0$ e $c_j + d_j + \left[\dfrac{c_{j+1}+d_{j+1}}{p} + \cdots + \dfrac{c_r + d_r}{p^{r-j}}\right] = b_j$;

ii. $(\alpha_n;\beta_n) = (-0, c_1 \ldots c_{j-1}u_1 \ldots u_n c_j \ldots c_r; -0, d_1 \ldots d_{j-1}v_1 \ldots v_n d_j \ldots d_r)$, com $c_{j-1} + d_{j-1} = b_{j-1} - 1$, $u_1 + v_1 = \cdots = u_{k-1} + v_{k-1} = p - 1$ e $u_k + v_k = p$, consequentemente $u_{k+1} = \cdots = u_n = v_{k+1} = \cdots = v_n = 0$ e $c_j + d_j + \left[\dfrac{c_{j+1}+d_{j+1}}{p} + \cdots + \dfrac{c_r + d_r}{p^{r-j}}\right] = b_j$;

iii. $(\alpha_n;\beta_n) = (-0, c_1 \ldots c_{j-1}u_1 \ldots u_n c_j \ldots c_r; -0, d_1 \ldots d_{j-1}v_1 \ldots v_n d_j \ldots d_r)$, com $c_{j-1} + d_{j-1} = b_{j-1} - 1$, $u_1 + v_1 = \cdots = u_n + v_n = p - 1$, consequentemente $c_j + d_j + \left[\dfrac{c_{j+1}+d_{j+1}}{p} + \cdots + \dfrac{c_r + d_r}{p^{r-j}}\right] = b_j + p$;

Além disso, a partir de um par $(\alpha_n;\beta_n)$ podemos obter um par $(\alpha_{n+1};\beta_{n+1})$ como segue:

a. Se $(\alpha_n;\beta_n)$ é da forma (i), então podemos escrever

$$(\alpha_{n+1};\beta_{n+1}) = (-0, c_1 \ldots c_{j-1}u_1 \ldots u_{n+1} c_j \ldots c_r; -0, d_1 \ldots d_{j-1}v_1 \ldots v_{n+1} d_j \ldots d_r),$$

com $u_{n+1} = v_{n+1} = 0$;

b. Se $(\alpha_n;\beta_n)$ é da forma (ii), então podemos escrever

$$(\alpha_{n+1};\beta_{n+1}) = (-0, c_1 \ldots c_{j-1}u_1 \ldots u_{n+1} c_j \ldots c_r; -0, d_1 \ldots d_{j-1}v_1 \ldots v_{n+1} d_j \ldots d_r),$$

com $u_{n+1} = v_{n+1} = 0$;

c. Se $(\alpha_n;\beta_n)$ é da forma (iii), então devem existir $u, v \in \{0, \ldots, p-1\}$ tais que $u + v = p$ e $c_j - u, d_j - v \in \{0, \ldots, p-1\}$, então podemos escrever

$$(\alpha_{n+1};\beta_{n+1}) =$$
$$(-0, c_1 \ldots c_{j-1}u_1 \ldots u_{n+1}\tilde{c}_j c_{j+1} \ldots c_r; -0, d_1 \ldots d_{j-1}v_1 \ldots v_{n+1}\tilde{d}_j d_{j+1} \ldots d_r),$$

com $u_{n+1} = u, v_{n+1} = v, \tilde{c_j} = c_j - u, \tilde{d_j} = d_j - v$.

Observemos que em (c) esses u e v não são necessariamente únicos. E nos três casos acima as somas dos dígitos de α_{n+1} e β_{n+1} são iguais às somas dos dígitos dos respectivos α_n, β_n. Portanto os pares $(\alpha_{n+1}; \beta_{n+1})$ estão de fato em $T_c \times T_c$. Além disso, por construção, temos que dois pares distintos $(\alpha_n; \beta_n), (\tilde{\alpha}_n; \tilde{\beta}_n)$ dão origem, via (a), (b) ou (c), a pares distintos $(\alpha_{n+1}; \beta_{n+1}), (\tilde{\alpha}_{n+1}; \tilde{\beta}_{n+1})$, pois podemos reverter a construção para obter o par $(\alpha_n; \beta_n)$ que deu origem ao par $(\alpha_{n+1}; \beta_{n+1})$.

Notemos também que para n suficientemente grande todos pares $(\alpha_n; \beta_n)$ são da forma (i) ou (ii), e em (ii) k possui uma cota superior N, pois a soma dos dígitos de α_n com os dígitos de β_n deve ser menor ou igual a $2c$. E este N será dado pelo maior n tal que $(\alpha_n; \beta_n)$ pode ser da forma (iii). Isto implica que o número de pares $(\alpha_{N+1}; \beta_{N+1})$ é igual ao número de pares $(\alpha_{N+m}; \beta_{N+m})$ para todo $m \geq 2$, pois todos pares $(\alpha_{N+m}; \beta_{N+m})$ serão obtidos via (a) ou (b). Ou seja, a partir de $N+1$ o número de pares $(\alpha_n; \beta_n)$ para de crescer.

Por fim, resta organizar os pares $(\alpha_n; \beta_n)$ em um número finito de sequências de modo que cada par esteja em apenas uma sequência e $\{x_{\alpha_n}\}_n$, $\{y_{\beta_n}\}_n$ satisfaçam RRL's.

Começamos com as sequências que contêm os pares $(\alpha_0; \beta_0)$. Estes podem ser da forma (i) ou (iii), assim:

- se $(\alpha_0; \beta_0)$ é da forma (i) podemos usar (a) continuamente para obter uma sequência $\{(\alpha_n; \beta_n)\}_{n\geq 0}$ tal que $\{x_{\alpha_n}\}_{n\geq 0}$, $\{y_{\beta_n}\}_{n\geq 0}$ satisfazem RRL's, pela Definição 2.5.

- se $(\alpha_0; \beta_0)$ é da forma (iii) podemos usar (c) para obter um par (α_1, β_1) da forma (ii) e então usar (b) continuamente para obter uma sequência $\{(\alpha_n; \beta_n)\}_{n\geq 1}$ tal que $\{x_{\alpha_n}\}_{n\geq 1}$, $\{y_{\beta_n}\}_{n\geq 1}$ satisfazem RRL's, pela Definição 2.5. E incluindo $(\alpha_0; \beta_0)$ nesta sequência ainda teremos que $\{x_{\alpha_n}\}_{n\geq 0}$, $\{y_{\beta_n}\}_{n\geq 0}$ satisfazem as mesmas RRL's, pois, pela Observação 2.1, podemos ignorar alguns termos iniciais de uma sequência.

Agora queremos as sequências que contêm os pares $(\alpha_1; \beta_1)$. Observemos que as sequências acima contêm todos pares $(\alpha_1; \beta_1)$ da forma (i) e alguns da forma (ii), possivelmente todos. Portanto os pares restantes só podem ser da forma (ii) ou (iii). Assim:

- se $(\alpha_1; \beta_1)$ é da forma (ii) podemos usar (b) continuamente para obter uma sequência $\{(\alpha_n; \beta_n)\}_{n\geq 1}$ tal que $\{x_{\alpha_n}\}_{n\geq 1}$, $\{y_{\beta_n}\}_{n\geq 1}$ satisfazem RRL's, pela Definição 2.5.

- se $(\alpha_1; \beta_1)$ é da forma (iii) podemos usar (c) para obter um par (α_2, β_2) da forma (ii) e então usar (b) continuamente para obter uma sequência $\{(\alpha_n; \beta_n)\}_{n\geq 2}$ tal que $\{x_{\alpha_n}\}_{n\geq 2}$, $\{y_{\beta_n}\}_{n\geq 2}$ satisfazem RRL's, pela Definição 2.5. E incluindo $(\alpha_1; \beta_1)$ nesta sequência ainda teremos que $\{x_{\alpha_n}\}_{n\geq 1}$, $\{y_{\beta_n}\}_{n\geq 1}$ satisfazem RRL's, pela Observação 2.1.

Este processo se repete até o caso das sequências que contêm os pares $(\alpha_N;\beta_N)$, onde encontramos os últimos pares da forma (iii) e possivelmente alguns da forma (ii) que não estão em nenhuma das sequências obtidas nos passos anteriores. Assim repetimos o processo mais uma vez para obter as sequências que começam a partir desses $(\alpha_N;\beta_N)$'s restantes. Se os u_{N+1}'s e v_{N+1}'s obtidos via (c) no segundo item do processo forem únicos teremos todos os pares $(\alpha_{N+1};\beta_{N+1})$, consequentemente todos pares $(\alpha_n;\beta_n)$, $n\geq 0$, incluídos em alguma sequência. Caso contrário teremos que repetir o processo para os pares $(\alpha_{N+1};\beta_{N+1})$ da forma (ii) que restaram e finalmente obter que cada par $(\alpha_n;\beta_n)$, $n\geq 0$, está em alguma sequência.

Por construção temos que o número de sequências é igual ao número de pares $(\alpha_N;\beta_N)$ ou igual ao número de pares $(\alpha_{N+1};\beta_{N+1})$, e ambos são finitos. Logo, pela Observação 2.4, $\{(xy)_{\gamma_n}\}_n$ satisfaz uma RRL.

Restam os casos em que $b_{j-1}=0$ ou $b_j=0$.

Se existem $0\leq i\leq j-2$ e $j+1\leq s\leq m$ tais que $b_i\neq 0$ e $b_s\neq 0$, então podemos considerar uma sequência auxiliar $\{\tilde{\gamma}_n\}_n=\{-b_0,b_1\dots b_i\underbrace{0\dots0}_{n}b_s\dots b_m\}_n$, que é da forma considerada anteriormente e satisfaz $\gamma_n=\tilde{\gamma}_{n+s-i-1}$. Portanto podemos construir as sequências de pares $\{(\tilde{\alpha}_n,\tilde{\beta}_n)\}_n$ para $\{\tilde{\gamma}_n\}_n$ tais que $\{x_{\tilde{\alpha}_n}\}_n$ e $\{y_{\tilde{\beta}_n}\}_n$ satisfazem RRL's, como acima. Então para $\{\gamma_n\}_n$ temos as sequências $\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n$, onde $(\alpha_n,\beta_n)=(\tilde{\alpha}_{n+s-i-1};\tilde{\beta}_{n+s-i-1})$. Como $\{x_{\tilde{\alpha}_n}\}_n$ e $\{y_{\tilde{\beta}_n}\}_n$ satisfazem RRL's, temos, em particular, que $\{x_{\tilde{\alpha}_{n+s-i-1}}\}_n=\{x_{\alpha_n}\}_n$ e $\{y_{\tilde{\beta}_{n+s-i-1}}\}_n=\{y_{\beta_n}\}_n$ satisfazem as mesmas RRL's.

Se não existe $j+1\leq s\leq m$ tal que $b_s\neq 0$ então temos que $\{\gamma_n\}_n$ é uma sequência constante, portanto as sequências $\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n$ também são constantes e, pela Definição 2.5, $\{x_{\alpha_n}\}_n$ e $\{y_{\beta_n}\}_n$ satisfazem RRL's. E o número de sequências $\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n$ é finito, igual ao número de pares $(\alpha_0;\beta_0)$.

Se não existe $0\leq i\leq j-1$ tal que $b_i\neq 0$, então, neste caso, temos que toda sequência é obtida a partir de um par $(\alpha_0;\beta_0)$ do seguinte modo: dado $(\alpha_0;\beta_0)=(-0,c_1\dots c_r;-0,d_1\dots d_r)$, então $\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n=\{-0,\underbrace{0\dots0}_{n}c_1\dots c_r;-0,\underbrace{0\dots0}_{n}d_1\dots d_r\}_n$. Claramente temos que $\{x_{\alpha_n}\}_n$ e $\{y_{\beta_n}\}_n$ satisfazem RRL's, pela Definição 2.5. E o número de sequências $\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n$ é finito, igual ao número de pares $(\alpha_0;\beta_0)$.

Em todos os casos podemos escrever os conjuntos

$$U_0=\{\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n\mid n\geq 0\}$$
$$U_1=\{\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n\mid n\geq 1,(\alpha_1;\beta_1)\text{ não é termo de nenhuma sequência em }U_0\}$$
$$\vdots$$

$U_{N+1} =$

$$\left\{ \{(\alpha_n;\beta_n)\}_n \mid n \geq N+1, (\alpha_{N+1};\beta_{N+1}) \text{ não é termo de nenhuma sequência em } \bigcup_{i=0}^{N} U_i \right\},$$

onde $U_1, \ldots, U_{N+1}$ podem ser vazios, dependendo do caso considerado.

Assim podemos escrever

$$\{(xy)_{\gamma_n}\}_n = \sum_{\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n \in U_0} \{x_{\alpha_n}\}_n \{y_{\beta_n}\}_n + \cdots + \sum_{\{(\alpha_n;\beta_n)\}_n \in U_{N+1}} \{x_{\alpha_n}\}_n \{y_{\beta_n}\}_n.$$

Com isso, mostramos que xy satisfaz condição 2 da Definição 2.7. A condição 1 vale porque xy está suportado em $T_c + T_c \subset S_{1,1,2c}$ e a condição 3 vale porque em $T_c + T_c$ só temos as funções f_0 e f_{-1} *twist-recurrent* não nulas. Logo xy é uma série *twist-recurrent*. Isto termina a prova do item 2. $\square$

Capítulo 3

O corpo $\mathcal{S}$ não é algebricamente fechado

Como vimos no Lema 1.12, uma extensão finita normal de $K((t))$ está contida em uma torre de extensões de Artin-Schreier sobre $K((t^{1/n}))$, para algum n. Além disso, como o suporte de uma série em $K((t^{1/n}))$ está contido em $\{\frac{m}{n} \mid m \geq -b\} = S_{n,b,0}$, para algum b inteiro não negativo, e $T_0 = \varnothing$, temos que as funções f_r, $r \geq -b$ são *twist-recurrent* por vacuidade. Ou seja, temos que $K((t^{1/n})) \subset \mathcal{S}$. Assim, para mostrar que $\mathcal{S}$ é algebricamente fechado, bastaria mostrar que é fechado sob extensões de Artin-Schreier. Isto é, bastaria mostrar que as raízes dos polinômios $X^p - X - y \in \mathcal{S}[X]$, $y \in \mathcal{S}$, pertencem a $\mathcal{S}$. Esta última afirmação foi utilizada pelo Kedlaya para tentar provar que $\mathcal{S}$ é o fecho algébrico de $K((t))$. No entanto, esta afirmação é falsa, como veremos no decorrer do capítulo.

Na próxima seção mostraremos dois pontos em que a demonstração desta afirmação poderia falhar. Por fim, mostramos, na seção seguinte, dois exemplos em que a demonstração da afirmação acima falha, um para cada ponto.

3.1 Uma afirmação falsa

Afirmação 3.1. *Se y é uma série twist-recurrent e $x^p - x = y$, então x também é twist-recurrent.*

Tentativa de prova do Kedlaya. Dado y *twist-recurrent*, podemos supor sem perda de generalidade que y tem suporte contido em $S_{1,b,c}$. Escrevemos $y = y_1 + y_2$ com y_1 suportado em $(-\infty, 0) \cap S_{1,b,c}$ e y_2 suportado em $(0, +\infty) \cap S_{1,b,c}$. Sendo y *twist-recurrent*, temos que y_1 e y_2 também serão. Note que as raízes de $X^p - X - y$ são obtidas pelas somas das raízes de $X^p - X - y_1$ e de $X^p - X - y_2$. Desta forma, é suficiente considerar os casos em que y está suportada em $(-\infty, 0) \cap S_{1,b,c}$ e $(0, +\infty) \cap S_{1,b,c}$, separadamente.

Primeiro, suponhamos que y está suportada em $(-\infty, 0) \cap S_{1,b,c}$. Neste caso, as raízes de $X^p - X - y$ são

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^{1/p^n} \right) + i, \; i = 0, \dots, p-1.$$

Vamos considerar o caso $i = 0$ e deixaremos $(-\infty, 0)$ subentendido.

Temos que

$$x = \sum_{\alpha \in S_{1,b,c}} \sum_{n=1}^{\infty} y_\alpha^{1/p^n} t^{\alpha/p^n}$$

está suportado em $S_{1,b,\tilde{c}}$, onde a escrita de b na base p é dada por $b = a_l p^l + \cdots + a_0$, com $0 \leq a_i \leq p-1$, e definimos $\tilde{c} = c + l(p-1)$. De fato, dado $m - \sum b_i p^i \in S_{1,b,c} \cap (-\infty, 0)$, podemos escrever $m = -(d_l p^l + \cdots + d_0)$, com $0 \leq d_i \leq p-1$, temos que

$$\frac{m - b_1 p^{-1} - \cdots}{p^n} = -d_l p^{l-n} - \cdots - d_0 p^{-n} - b_1 p^{-n-1} - \cdots.$$

A parte inteira deste número está entre m e 0 e a soma dos dígitos da parte fracionária é menor ou igual a $\sum d_i + \sum b_i \leq \tilde{c}$.

Assim, escrevemos

$$x = \sum_{\alpha \in S_{1,b,\tilde{c}}} t^\alpha \left(\sum_{n \in A_\alpha} y_{p^n \alpha}^{1/p^n} \right),$$

onde $A_\alpha = \{n \mid p^n \alpha \in S_{1,b,c}\}$.

Devemos mostrar que x é *twist-recurrent*. Neste caso, é suficiente mostrar que as funções $f_{-b}, \dots, f_0$ são *twist-recurrent*.

Utilizando a escrita de b na base p, vamos provar que as funções $f_{-b}, \dots, f_{-1}$ são somas de, no máximo, l funções *twist-recurrent*. De fato, se $\{\alpha_n\}$ é uma sequência em $S_{1,b,\tilde{c}}$, onde

$$\alpha_n = m - b_1 p^{-1} - \cdots - b_{j-1} p^{-(j-1)} - p^{-n}(b_j p^{-j} + \cdots)$$

com $m < 0$, então

$$A_{\alpha_n} \subset \{1, \dots, l\}.$$

Desta forma, podemos usar a Corolário 2.3 para obter que cada f_i é *twist-recurrent* com $i = -b, \dots, -1$.

Agora, para mostrar que f_0 é *twist-recurrent*, conseguimos mostrar que qualquer sequência da forma

$$\alpha_n = -b_1 p^{-1} - \cdots - b_{j-1} p^{-(j-1)} - p^{-n}(b_j p^{-j} + \cdots)$$

em $T_{\tilde{c}}$ satisfaz

$$\#A_{\alpha_n} \leq l+1 \text{ e } \#A_{\alpha_N} = \#A_{\alpha_{N+r}}$$

para todo $r \geq 0$ e N suficientemente grande.

Portanto, toda sequência $\{x_{\alpha_n}\}$ satisfaz uma RRL, mas não conseguimos usar o Corolário 2.3 para obter uma única RRL que é satisfeita por qualquer sequência desta forma, como podemos ver na argumentação abaixo.

Consideremos

$$\alpha_{s,n} = -a_l p^{-s} - \cdots - a_0 p^{-s-l-1} - p^{-n}(b_1 p^{-s-l-2} + \cdots)$$

onde $s \geq 0$ é fixo, $b = a_l p^l + \cdots + a_0$ e $\sum b_i = c$. Neste caso,

$$A_{\alpha_{s,n}} = \{s+l+1\}.$$

Portanto a sequência $\{x_{\alpha_{s,n}}\}$ satisfaz a RRL

$$d_0^{1/p^{s+l+1}} c_n + \cdots + d_k^{1/p^{s+l+1}} c_{n+k}^{p^k} = 0,$$

já que, $x_{\alpha_{s,n}} = y_{\alpha_{s,n}}^{1/p^{s+l+1}}$, onde $d_0, \ldots, d_k$ são os coeficientes da RRL associada a função $\tilde{f}_{-b}$ de y. Ou seja, para cada s poderemos ter uma RRL diferente e, consequentemente, não poderemos usar o Corolário 2.3 para obter uma única RRL.

3.2 Contra-exemplo

A seguir, veremos em um exemplo que, quando temos uma série *twist-recurrent* y, suportada em $(-\infty, 0) \cap S_{1,b,c}$, e $x^p - x = y$, nem sempre temos que a função f_0 de x é *twist-recurrent*.

Exemplo 3.2. Suponhamos que $K \neq \overline{\mathbb{F}}_p$. Escolhemos um elemento $\lambda \in K$, de modo que ele não esteja contido nenhum subcorpo finito de K. Consideremos

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{p^{-1}+\cdots+p^{-m}} t^{-p^{-1}-p^{-1-m}}$$

que, claramente, está suportada em T_2. Escrevendo $y = \sum_{\alpha \in T_2} y_\alpha t^\alpha$, temos que $y_\alpha \neq 0$ apenas quando α é um elemento da sequência $\{-p^{-1} - p^{-n-1}\}_n = \{\alpha_n\}_n$.

Assim, para verificar que y é *twist-recurrent*, basta notar que $\{y_{\alpha_n}\}$ satisfaz a seguinte RRL

$$c_n - \lambda^{-1} c_{n+1}^p = 0.$$

De fato, como as demais sequências em T_2 são enviadas na sequência nula pela função $\tilde{f}_0$ associada a y, temos que esta função é *twist-recurrent*. Consequentemente, y também é.

Como vimos,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} y^{1/p^n} \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda^{p^{-1-n}+\cdots+p^{-m-n}} t^{-p^{-1-n}-p^{-1-m-n}}, \end{aligned}$$

é raiz do polinômio $X^p - X - y$. Notemos que x também está suportada em T_2, ou seja, x possui apenas a função f_0 não nula.

Para verificar que x é *twist-recurrent*, bastaria mostrar que dada qualquer sequência da forma $\{-b_1p^{-1} - \cdots - b_{j-1}p^{-j+1} - p^{-n}(b_jp^{-j} + \cdots)\} = \{\beta_n\}$, em T_2, sua imagem por f_0 satisfaz uma RRL fixa.

Suponhamos que essa RRL exista, digamos, $d_0c_n + \cdots + d_kc_{n+k}^{p^k} = 0$. Consideremos uma sequência $\{\beta_n\}$ com $b_{j-1} = b_j = 1$. Então temos que $\{c_n\} = \{f_0(\beta_n)\} = \{\lambda^{p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n}}\}_n$ satisfaz a RRL acima. Assim,

$$\begin{gathered} d_0\lambda^{p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n}} + d_1(\lambda^{p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n-1}})^p + \cdots + d_k(\lambda^{p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n-k}})^{p^k} = \\ d_0\lambda^{p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n}} + d_1\lambda^{p^{2-j}+p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n}} + \cdots + d_k\lambda^{p^{k+1-j}+\cdots+p^{2-j}+p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n}} = 0. \end{gathered}$$

Multiplicando a equação acima por $(\lambda^{p^{1-j}+\cdots+p^{1-j-n}})^{-1}$, obtemos

$$d_0 + d_1\lambda^{p^{2-j}} + d_2(\lambda^{p^{2-j}})^{1+p} + \cdots + d_k(\lambda^{p^{2-j}})^{1+p+\cdots+p^{k-1}} = 0.$$

Ou seja, a existência da RRL é equivalente a $\lambda^{p^{2-j}}$ ser raiz do polinômio

$$d_0 + d_1X^{p^{2-j}} + d_2X^{1+p} + \cdots + d_kX^{1+p+\cdots+p^{k-1}}$$

para todo $j \geq 1$, Mas isto é um absurdo, pois o polinômio possui um número finito de raízes, enquanto o conjunto $\{\lambda^{2-j} \mid j \geq 1\}$ é infinito, já que λ foi escolhido fora de qualquer corpo finito.

Referências Bibliográficas

[Ab] S. Abhyankar, *Two notes on formal power series*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 903 - 905.

[Ch] C. Chevalley, *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable*, Amer. Math. Soc., 1951.

[Fe] I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions*, Second Edition, Amer. Math. Soc., 2002.

[Go] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Spriger-Verlag, 1996.

[Ha] H. Hahn, *Über die nichtarchimedische Größensysteme*, Gesammelte Abhandlungen I, Springer, Vienna, 1995.

[He] A. Hefez - *Irreducible plane curves singularities.* Real and Complex singularities. Lectures Notes in Pure and Appl, Math. 232 (2003)

[Hu] M.-F. Huang, *On the Algebraic closure of the Field of Meromorphic Functions Over an Algebraically Closed Field of Characteristic p*, Ph.D. thesis, Purdue University, 1968.

[Ke1] K. S. Kedlaya, *The Algebraic Closure of the Power Series Field in Positive Characteristic*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), Amer. Math. Soc., 3461 - 3470.

[Ke2] K. S. Kedlaya, *Finite Automata and Algebraic Extensions of Function Fields*, J. Théorie Nombres Bordeaux **18** (2006), 379 - 420.

[Ke3] K. S. Kedlaya, *On the Algebraicity of Generalized Power Series*, preprint, arXiv:1508.01836v1 (2015).

[La] S. Lang, *Algebra*, Third Edition, Springer-Verlag, 2002.

[Ra] F. Rayner, *An Algebraically Closed Field*, Glasgow J. Math. **9** (1968), 146-151.

[Se] J.-P. Serre, *Local Fields*, Spriger-Verlag, 1979.

[St1] D. Stefanescu, *A method to obtain algebraic elements over K((t)) in positive characteristic*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.) **26(74)** (1982), 77 - 91

[St2] D. Stefanescu, *On meromorphic formal power series*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.) **27(75)** (1983), 169 - 178.