PARTE 10

REGRA DA CADEIA

10.1 Introdução

Em Cálculo 1A, quando queríamos derivar a função $h(x) = (x^2 - 3x + 2)^{37}$, fazíamos uso da *regra da cadeia*, que é uma das mais importantes regras de derivação e nos ensina como calcular a derivada de funções compostas, que é o caso acima. De fato, podemos dizer que

$$h(x) = f(g(x)),$$

onde

$$f(u) = u^{37} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Vamos aproveitar a oportunidade e enunciar nossa conhecida regra da cadeia vista em Cálculo 1A.

TEOREMA 10.12.1: (Regra da Cadeia - Funções da Reta na Reta - Cálculo 1A) Suponha que $Im(g) \subseteq Dom(f)$ e seja $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(g)$. Neste caso, se $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em x_0 e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $g(x_0)$, então a função $f \circ g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Em se tratando de funções vetoriais de várias variáveis, também encontramos funções compostas e também estamos interessados em derivá-las. Um exemplo bem simples em que encontramos uma função composta, pode ser visto quando queremos avaliar o comportamento de uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em uma determinada curva C contida no gráfico da função f. Neste caso, se C for parametrizada pela função $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, estamos de fato interessados em avaliar a composta $f \circ \gamma$, que é dada por $f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$. Vamos portanto aprender a regra da cadeia para funções vetoriais de várias variáveis.

10.2 Regra da Cadeia

Para nossa satisfação, a regra da cadeia para funções vetoriais de várias variáveis preserva o mesmo enunciado simples que vimos em Cálculo 1A, onde o produto simples é substituido por um produto matricial. Entretanto, é importante ressaltar que devemos tomar cuidado com as dimensões.

TEOREMA 10.2.1: (Regra da Cadeia - Funções Vetoriais de Várias Variáveis) Suponha que $Im(G) \subseteq Dom(F)$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(G)$. Neste caso, se $G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é uma função diferenciável em X_0 e $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em $G(X_0)$, então a função $F \circ G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em X_0 e

$$(F \circ G)'(X_0) = F'(G(X_0)).G'(X_0),$$

onde (.) é um produto entre matrizes.

Observação 10.2.1: Observe que $F'(G(X_0)) \in \mathcal{M}_{m\times p}$, $G'(X_0) \in \mathcal{M}_{p\times n}$ e $(F \circ G)'(X_0) \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Vamos começar os exemplos enquadrando-os primeiro em casos particulares. Iniciaremos com o exemplo visto na introdução.

10.3 Primeiro Caso Particular: $n = 1$ e $m = 1$

Neste caso, temos que f e G são as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & G(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)) \end{array}.$$

Desta forma, temos que

$$f'(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(X) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times p}$$

e

$$G'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_p'(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times 1}.$$

Vamos então considerar a composta $f \circ G$, que é dada por

$$(f \circ G)(t) = f(G(t)) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)).$$

Vamos ainda definir a função h conforme abaixo

$$h(t) \triangleq (f \circ G)(t) = f(G(t)) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)).$$

Observe que h é a função real de variável real dada por

$$\begin{array}{rcl} h : Dom(h) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(t) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)) \end{array},$$

de modo que $h'(t)$ é um escalar ($h'(t) \in \mathcal{M}_{1\times 1}$).

Para determinar $h'(t)$, aplicamos a regra da cadeia e encontramos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(G(t)).G'(t) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(G(t)) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(G(t)) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(G(t)) \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_p'(t) \end{array} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(G(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(G(t))g_2'(t) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(G(t))g_p'(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Observação 10.3.1: Observe que para facilitar a memorização, podemos expressar em palavras o resultado obtido em (1) como:

h'(t)= "derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $G(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $G(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da segunda variável MAIS ... MAIS derivada parcial de f com respeito a sua última variável (avaliada em $G(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da última variável."

Observação 10.3.2: Conforme já vimos na aula de funções vetoriais de uma variável real é conveniente considerar a matriz coluna $G'(t)$ como um vetor $\vec{G}'(t)$ no espaço espaço imagem de G e desenhá-lo com sua origem no ponto imagem $G(t)$. Pois, neste caso, quando não é nulo, $\vec{G}'(t)$ fornece o vetor tangente à curva imagem da função G no ponto $G(t)$. Procedendo então desta forma, observe que se escrevermos $G'(t)$ como um vetor, i.e. $\vec{G}'(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t))$ (conforme feito na aula de funções vetoriais de uma variável real), temos que

$$h'(t) \quad = \quad f'(G(t)).G'(t) = \nabla f(G(t)) \cdot \vec{G}'(t), \tag{2}$$

onde o primeiro produto $(\cdot)$ é um produto entre matrizes e o segundo produto $(\cdot)$ é o produto escalar.

Se particularizarmos mais ainda e fizermos $p = 2$, teremos que

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x, y) & \mapsto & f(X) = f(x, y) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & G(t) = (x(t), y(t)) \end{array}.$$

Desta forma, segue que

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}$$

e

$$G'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}.$$

Sendo assim, a função $h \triangleq f \circ G$ é dada por

$$h(t) = (f \circ G)(t) = f(G(t)) = f(x(t), y(t)).$$

Aplicando agora a regra da cadeia para determinar $h'(t)$, chegamos a

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(G(t)).G'(t) = f'(x(t), y(t)).G'(t) = \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \qquad (3) \\ &= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) \\ &= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \vec{G}'(t), \qquad (4) \end{aligned}$$

onde $\vec{G}'(t) = (x'(t), y'(t))$. Na primeira linha observe que o produto (.) é um produto matricial enquanto que nas duas últimas linhas o produto $(\cdot)$ é o produto escalar.

Observação 10.3.3: Mais uma vez, para facilitar a memorização, podemos expressar em palavras o resultado obtido em (3) como:

h'(t)= "derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $G(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $G(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da segunda variável."

Exemplo 10.3.1: Sejam $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{5}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Considere a composta $h(t) = f(\gamma(t))$.

a) Determine $h(t)$.
b) Calcule $h'(t)$ diretamente da função h encontrada no item (a) e verifique que de fato $h'(t) = f'(\gamma(t)).\gamma'(t)$.
c) Mostre que $h(t)$ é a imagem da função f dos pontos pertencentes à reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
d) Esboce a curva C, imagem da função $\beta(t) = (t, 2t, h(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
e) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto $(1, 2, 1)$.

Solução:
a) Como $h(t) = f(\gamma(t))$, temos que

$$h(t) \quad = \quad f(t, 2t) = \frac{t^2 + 4t^2}{5} = t^2.$$

b) Calculando $h'(t)$ a partir da função encontrada no item (a), temos que

$$h'(t) \quad = \quad 2t.$$

Vamos mostrar agora que $h'(t) = f'(\gamma(t)).\gamma'(t)$. Como $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{5}$, temos que

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{5} & \frac{2y}{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2},$$

de modo que

$$f'(\gamma(t)) = f'(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \frac{2x(t)}{5} & \frac{2y(t)}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{5} & \frac{4t}{5} \end{pmatrix}.$$

Além disso, como $\gamma(t) = (t, 2t)$, temos que $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}$, de modo que é fácil verificar que

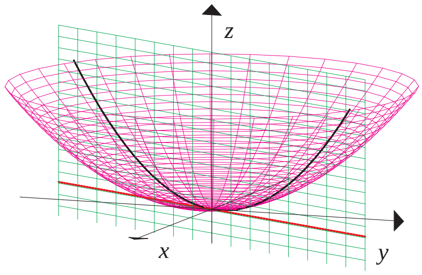
$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2t}{5} & \frac{4t}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2t}{5} + 2 \, . \, \frac{4t}{5} = \frac{10t}{5} = 2t. \end{aligned}$$

c) A reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, é dada na forma paramétrica por

$$(x, y) = (t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, como $h(t) = f(\gamma(t)) = f(t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, segue diretamente que $h(t)$ é a imagem da função f dos pontos pertencentes a reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Pelo item anterior, temos que a curva C é a curva contida no gráfico da função f dada pela interseção do gráfico da função f com o plano $y = 2x$, esboçada abaixo.

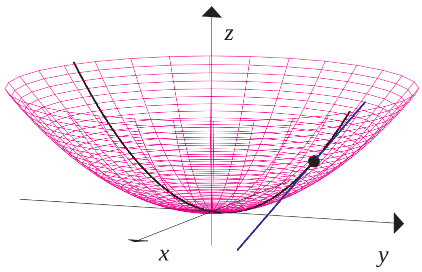


e) Observe que o ponto $(1, 2, 1)$ corresponde a $t_0 = 1$, pois $\beta(t_0) = (t_0, 2t_0, h(t_0)) = (1, 2, 1)$ se e só se $t_0 = 1$. Desta forma, temos que a equação da reta tangente à curva C no ponto $\beta(1)$ é dada por

$$(x, y, z) = \beta(1) + \lambda\beta'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\beta'(t) = (1, 2, h'(t)) = (1, 2, 2t)$, de modo que $\beta'(1) = (1, 2, 2)$. Sendo assim, a equação da reta tangente à curva C no ponto $\beta(1) = (1, 2, 1)$ é dada por

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}.$$



♡

Exemplo 10.3.2: Sejam $f(x, y) = e^{xy}$ e $\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$. Considere a composta $h(t) = f(\gamma(t))$.
a) Determine $h(t)$.
b) Calcule $h'(t)$ diretamente da função h encontrada no item (a) e verifique que de fato $h'(t) = f'(\gamma(t)).\gamma'(t)$. Além disso, escrevendo $\gamma'(t)$ como um vetor $\vec{\gamma}'(t)$, mostre que $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$.
c) Mostre que $h(t)$ é a imagem da função f dos pontos pertencentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
d) Conhecendo o gráfico de f, como você faria para esboçar a imagem da função $\beta(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, h(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução:
a) Como $h(t) = f(\gamma(t))$, temos que

$$h(t) \quad = \quad f(\cos t,\ \operatorname{sen} t) = e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}.$$

b) Calculando $h'(t)$ a partir da função encontrada no item (a), temos que

$$h'(t) \quad = \quad e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t).$$

Vamos mostrar agora que $h'(t) = f'(\gamma(t)).\gamma'(t)$. Como $f(x,y) = e^{xy}$, temos que

$$f'(x,y) = (ye^{xy} \;\; xe^{xy}) \in \mathcal{M}_{1\times 2},$$

de modo que

$$f'(\gamma(t)) = f'(x(t),y(t)) = \left(y(t)e^{x(t)y(t)} \;\; x(t)e^{x(t)y(t)}\right) = \left(\operatorname{sen} t e^{\cos t \operatorname{sen} t} \;\; \cos t e^{\cos t \operatorname{sen} t}\right).$$

Além disso, como $\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, temos que

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1},$$

de modo que é fácil verificar que

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \left(\operatorname{sen} t\, e^{\cos t \operatorname{sen} t} \;\; \cos t\, e^{\cos t \operatorname{sen} t}\right) . \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= e^{\cos t \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t). \end{aligned}$$

Da mesma forma, observe que $\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$, de modo que $\nabla f(\gamma(t)) = (\operatorname{sen} t e^{\cos t \operatorname{sen} t}, \cos t e^{\cos t \operatorname{sen} t})$. Escrevendo agora $\vec{\gamma}'(t)$ como um vetor para podermos fazer o produto escalar, ficamos com $\vec{\gamma}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, de modo que é fácil verificar que

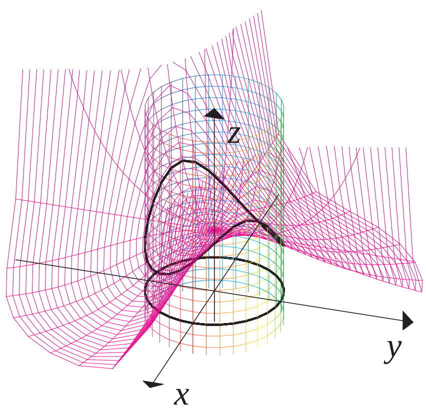
$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \\ &= \left(\operatorname{sen} t\, e^{\cos t \operatorname{sen} t}, \cos t\, e^{\cos t \operatorname{sen} t}\right).(-\operatorname{sen} t, \cos t) \\ &= e^{\cos t \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t). \end{aligned}$$

c) A circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é dada na forma paramétrica por

$$(x,y) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Desta forma, como $h(t) = f(\gamma(t)) = f(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, segue diretamente que $h(t)$ é a imagem da função f dos pontos pertencentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

d) Pelo item anterior, temos que a curva C é a curva contida no gráfico da função f dada pela interseção do gráfico da função f com o cilindro $x^2+y^2 = 1$, esboçada abaixo.



$\heartsuit$

Exemplo 10.3.3: Seja $z(u) = f(e^{-u}, u^2)$, onde f é uma função diferenciável. Expresse z' em função das derivadas parciais de f.

Solução:
Opção 1: Neste caso, vamos supor que f é função das variáveis x e y, e vamos introduzir a função $g(u) = (e^{-u}, u^2)$, de modo que $z(u) = f(g(u)) = f(e^{-u}, u^2)$. Desta forma, temos que

$$z'(u) \;=\; f'(g(u)).g'(u).$$

Como $f'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}$, temos que

$$f'(g(u)) = f'(e^{-u}, u^2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2) \end{pmatrix}.$$

Além disso, como $g(u) = (e^{-u}, u^2)$, segue que

$$g'(u) = \begin{pmatrix} -e^{-u} \\ 2u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1},$$

de modo que,

$$\begin{aligned} z'(u) &= f'(g(u)).g'(u) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -e^{-u} \\ 2u \end{pmatrix} \\ &= -e^{-u}\dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2). \end{aligned}$$

Opção 1: Aplicando diretamente o resultado obtido em (3), temos que

$$\begin{aligned} z'(u) &= \dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2)(e^{-u})' + \dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2)(u^2)' \\ &= \dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2)(-e^{-u}) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2)(2u). \end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 10.3.4: Seja $h(t) = f(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$, onde f é uma função de classe C^1.
a) Expresse $h'(t)$ em função das derivadas parciais de f.
b) Calcule $h'(0)$ supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 5$.

Solução:
a) **Opção 1:** Neste caso, vamos supor que f é função das variáveis x e y, e vamos introduzir a função $g(t) = (e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$, de modo que $h(t) = f(g(t)) = f(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$. Desta forma, temos que

$$h'(t) \;=\; f'(g(t)).g'(t).$$

Como $f'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}$, temos que

$$f'(g(t)) = f'(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}.$$

Além disso, como $g(t) = (e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$, segue que

$$g'(t) = \begin{pmatrix} 2te^{t^2} \\ \cos t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2},$$

de modo que,

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(g(t)).g'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2te^{t^2} \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= 2te^{t^2}\frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) + \cos t \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

a) **Opção 2:** Aplicando diretamente o resultado obtido em (3), temos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)(e^{t^2})' + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)(\ \operatorname{sen} t)' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)(2te^{t^2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)(\cos t). \end{aligned}$$

b) Fazendo $t = 0$ na equação de $h'(t)$ encontrada acima, temos que

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(1).$$

Desta forma, supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 5$, temos que

$$h'(0) = 5.$$

$\heartsuit$

Exemplo 10.3.5: Seja $h(t) = f(u(t^2), v(e^t))$, onde f, u e v são funções de classe C^1. diferenciável. Expresse $h'(t)$ em termos de u' e v'.

Solução: Aplicando diretamente o resultado obtido em (3) e supondo que f é função das variáveis u e v, i.e. $f = f(u,v)$, temos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t))(u(t^2))' + \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t))(v(e^t))' \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t))(2tu'(t^2)) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t))(v'(e^t)e^t). \end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 10.3.6: Seja

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, tal que $f(1,2) = -2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$. Suponha que a curva C, imagem da função $\gamma(t) = (t^2, 3t-1, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, está contida no gráfico de f.
a) Determine $z(t)$.
b) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(1)$.

Solução:
a) Sabemos que o gráfico de f é o conjunto dado por $G(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Em outras palavras, o gráfico de f é o conjunto de pontos que obedece a equação $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além dissso, a imagem de γ é o conjunto dado por $Im(\gamma) = \{(t^2, 3t-1, z(t))) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Desta forma, como a imagem de γ está contida no gráfico de f para todo t, quando $x(t) = t^2$, $y(t) = 3t-1$, devemos ter $z(t) = f(x(t), y(t)) = f(t^2, 3t-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Já vimos que a equação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(1)$ é dada por

$$(x,y,z) = \gamma(1) + \lambda\gamma'(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\gamma(1) = (1,2,z(1)) = (1,2,f(1,2)) = (1,2,-2)$ e que $\gamma'(t) = (2t, 3, z'(t))$, de modo que $\gamma'(1) = (2,3,z'(1))$. Devemos portanto determinar $z'(t)$ para achar a equação pedida. Utilizando a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1)(t^2)' + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1)(3t-1)' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1)(2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1)(3). \end{aligned}$$

Desta forma, segue

$$z'(1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

Substituindo então os valores dados na equação acima, ficamos com

$$z'(1) = 2.3 + 3.4 = 18.$$

Temos portanto, que

$$\gamma'(1) = (2,3,z'(1)) = (2,3,18).$$

Sendo assim, a equação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(1) = (1,2,-2)$ é dada por

$$(x,y,z) = (1,2,-2) + \lambda(2,3,18), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

♡

Exemplo 10.3.7: Seja f uma função de classe C^1 e defina a função g como $g(x) = f(x, f(x,x))$. Determine $g'(x)$.

Solução: Aplicando diretamente o resultado obtido em (3) e supondo que f é função das variáveis u e v (para não correr o risco de confundir variáveis), i.e. $f = f(u,v)$, temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x, f(x,x))(x)' + \frac{\partial f}{\partial v}(x, f(x,x))\frac{d}{dx}(f(x,x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x, f(x,x))(1) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, f(x,x))\frac{d}{dx}(f(x,x)). \end{aligned}$$

Para calcular $\dfrac{d}{dx}(f(x,x))$, vamos fazer $h(x) = f(x,x)$ e repetir o processo. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x,x)) = h'(x) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x,x)(x)' + \frac{\partial f}{\partial v}(x,x))(x)' \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x,x)(1) + \frac{\partial f}{\partial v}(x,x))(1). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, f(x,x)) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, f(x,x))\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial v}(x,x))\right).$$

♡

Exemplo 10.3.8: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja g a função definida como $g(t) = t^2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)$. Expresse $g'(t)$ em função das derivadas parciais de f.

Solução: Como estamos diante do produto de duas funções que dependem de t, vamos aplicar em primeiro lugar a regra da derivada do produto. Neste caso, temos que

$$g'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + t^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\right).$$

Temos assim que determinar $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\right)$. Definindo portanto $h(t) \triangleq \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)$ e supondo que f (e portanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}$) é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$ aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\right) = h'(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(t^2, t^3)(t^2)' + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(t^2, t^3)(t^3)' \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3)(2t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, t^3)(3t^2). \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$g'(t) \;=\; 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) + t^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2,t^3)(2t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2,t^3)(3t^2)\right).$$

♡

Exemplo 10.3.9: Seja f uma função de classe C^2 e defina a função g como $g(t) = f(3t, e^t)$. Determine $g''(t)$.

Solução: Primeiro vamos calcular $g'(t)$. Supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$ e aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)(3t)' + \frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)(e^t)' \\ &= 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t). \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez a função g, temos que

$$g''(t) \;=\; 3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right).$$

Calculando separadamente $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right)$ e $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(3t,e^t)(3t)' + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(3t,e^t)(e^t)' \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t,e^t)(3) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t,e^t)(e^t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(3t,e^t)(3t)' + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(3t,e^t)(e^t)' \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t,e^t)(3) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t,e^t)(e^t). \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned} g''(t) &= 3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right) \\ &= 3\left(3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t,e^t)\right) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^t\left(3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t,e^t)\right). \end{aligned}$$

Como f é de classe C^2, temos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Desta forma, segue que

$$g''(t) \;=\; 9\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, e^t) + 6e^t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t, e^t) + e^t\,\frac{\partial f}{\partial y}(3t, e^t) + e^{2t}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t, e^t).$$

♡

10.4 Segundo Caso Particular: $n = 2$, $m = 1$ e $p = 2$

Neste caso, temos que f e G são as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & G(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{array}.$$

Desta forma, temos que

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}$$

e

$$G'(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ & \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}.$$

Vamos então considerar a composta $f \circ G$, que é dada por

$$(f \circ G)(u, v) = f(G(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v))$$

e vamos definir a função h como

$$h(u, v) \overset{\triangle}{=} (f \circ G)(u, v) = f(G(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v)).$$

Observe que h é a função real de duas variáveis reais dada por

$$\begin{array}{rcl} h : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & h(u, v) \end{array},$$

de modo que $h'(u, v) \in \mathcal{M}_{1\times 2}$.

Portanto, pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned}
h'(u,v) &= f'(G(u,v)).G'(u,v)\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como a derivada da função

$$\begin{array}{rcl} h: Dom(G)\subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & h(u,v) \end{array}$$

é dada pela matriz

$$h'(u,v)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{1\times 2},$$

temos que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \tag{5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \tag{6}$$

Observação 10.4.1: Observe que aqui, para facilitar a memorização, também podemos expressar em palavras os resultados obtidos em (5) e (6) como:

" derivada parcial de h com respeito à variável u é GGUAL derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável u da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável u da função que ocupa a posição da segunda variável."

" derivada parcial de h com respeito à variável v é IGUAL derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável v da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável v da função que ocupa a posição da segunda variável."

Exemplo 10.4.1: Seja $z(u,v) = f(u^2+v^2, uv)$, onde f é uma função diferenciável. Determine as derivadas parciais de de z em função das derivadas parciais de f.

Solução: Aplicando diretamente os resultados obtido em (5) e (6) e supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial u}(uv) \\
&= 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv) \\
\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial v}(uv) \\
&= 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + u\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv).
\end{aligned}$$

♡

Exemplo 10.4.2: Seja $g(u,v) = f((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}})$, onde f é uma função diferenciável. Determine as derivadas parciais de de z em função das derivadas parciais de f.

Solução: Aplicando diretamente os resultados obtido em (5) e (6) e supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial u}((uv)^2) + \frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{e^{u+2v}}) \\
&= 2uv^2\,\frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) + \frac{e^{u+2v}}{2\sqrt{e^{u+2v}}}\,\frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial v}((uv)^2) + \frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e^{u+2v}}) \\
&= 2u^2v\,\frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) + \frac{e^{u+2v}}{\sqrt{e^{u+2v}}}\,\frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}).
\end{aligned}$$

♡

Exemplo 10.4.3: Seja $h(x,y) = f(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))$, onde f e g são funções de classe C^1.
a) Determine $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$.
b) Sabendo que $g(1,0)=0$ e $g(1,1)=2$, mostre que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,3)\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3)\frac{\partial g}{\partial y}(1,1).$$

Solução:
a) Aplicando diretamente os resultados obtido em (5) e (6) e supondo que f e g são

funções das variáveis x e y (veja item b), i.e. $f = f(x,y)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(y^2+g(x,y)) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(1+g(1,x+y)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y)) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y))
\end{aligned}$$

Para calcular $\dfrac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y))$, devemos novamente aplicar a regra da cadeia. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y)) &= \frac{\partial g}{\partial x}(1,x+y)\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) \\
&= \frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y).
\end{aligned}$$

Podemos concluir então que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y).
\end{aligned}$$

b) Substitundo os valores dados na equação acima, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(1,0), 1+g(1,1))\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(1,0), 1+g(1,1))\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,3)\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3)\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)
\end{aligned}$$

♡

Exemplo 10.4.4: Seja $g(u,v) = f(u^2+v^2, u^2v)$, onde f é uma função de classe C^2. Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ em função das derivadas parciais de f.

Solução: Aplicando diretamente os resultados obtido em (5) e (6) e supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$, vamos primeiro calcular $\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2v) \\
&= 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, u^2v) + 2uv\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, u^2v).
\end{aligned}$$

Agora vamos determinar $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right)\\
&= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v) + 2u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right) + 2v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v) +\\
&\quad +2uv\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right).
\end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra da cadeia para calcular separademente $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right)$ e $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2v)\\
&= 2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2v)\\
&= 2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v).
\end{aligned}$$

Substituindo então as expressões de $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right)$ e $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right)$ encontradas, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v) + 2u\left(2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right) +\\
&\quad +2v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\left(2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v)\right).
\end{aligned}$$

Como f é de classe C^2, temos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v) + 4u^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v) + 8u^2v\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v) +\\
&\quad +2v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v) + 4u^2v^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v).
\end{aligned}$$

$\heartsuit$

10.5 Exemplos Gerais

Vamos agora fazer alguns exemplos envolvendo composições de funções mais gerais.

Exemplo 10.5.1: Sejam $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2\\xy\end{pmatrix}$, $h\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}uv\\u^2\end{pmatrix}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável e $F = h \circ g \circ f$. Calcule $F'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sabendo que $g\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ e que $g'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \pi\\1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ e $g'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\1 & 3\end{pmatrix}$.

Solução: Pela regra da cadeia, temos que

$$F'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = h'\left(g\left(f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)\right)\cdot g'\left(f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot f'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Como $f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, temos que $g\left(f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ e $g'\left(f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = g'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \pi\\1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Desta forma, segue que

$$F'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = h'\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \pi\\1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot f'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Além disso, temos que $h'\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v & u\\2u & 0\end{pmatrix}$ e $f'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & 0\\y & x\end{pmatrix}$, de modo que $h'\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\6 & 0\end{pmatrix}$ e $f'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$. Segue portanto que

$$\begin{aligned}F'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 3\\6 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \pi\\1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 3\\6 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\pi & 2\pi\\4+\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\pi+12+3\sqrt{2} & 2\pi+6\sqrt{2}\\6\pi & 12\pi\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exemplo 10.5.2: Sejam $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2+y\\xy\end{pmatrix}$, $h\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}uv\\v^2\end{pmatrix}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável e $F = h \circ g \circ f$. Calcule $F'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sabendo que $g\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ e que $g'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \pi\\1 & 2\end{pmatrix}$ e $g'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\1 & 5\end{pmatrix}$.

Exemplo 10.5.3: Sobre as funções diferenciáveis em seus domínios F, G, H e W sabe-se que

$F(1,1) = (2,1,3)$	$G(1,2,0) = (3,2)$	$H(3,-1) = 2$	$W(0) = (5,1,1)$
$F(1,2) = (1,0,1)$	$G(1,0,2) = (1,2)$	$H(1,2) = 7$	$W(1) = (2,0,1)$
$F(-1,5) = (3,\pi,2)$	$G(1,0,1) = (3,-1)$	$H(0,2) = 4$	$W(2) = (4,3,2)$

Denote por $DF(x, y)$, $DG(x, y, z)$, $DH(x, y)$ e $DW(x)$ as derivadas de cada uma das funções nos respectivos pontos. Com esta notação, escreva $D(W \circ H \circ G \circ F)(1, 2)$, não esquecendo de colocar em que ponto as derivadas devem ser calculadas. Quantas linhas e quantas colunas possui a derivada da composta?