

PARTE 11

VETOR GRADIENTE: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

11.1 Introdução

Dada a função real de n variáveis reais,

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad ,$$

se f possui todas as derivadas parciais de primeira ordem em $X_0 \in \text{Dom}(f)$, definimos o vetor gradiente de f em X_0 , denotado por $\nabla f(X_0)$, como

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right).$$

Vamos agora nos restringir ao caso em que f é uma função diferenciável e apresentar a interpretação geométrica do gradiente de uma função de duas e de três variáveis.

11.2 Vetor Gradiente de uma Função de Duas Variáveis: Interpretação Geométrica

Considere as funções $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : \text{Dom}(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\text{Im}(\gamma) \subseteq \text{Dom}(f)$. Suponha que f é diferenciável no aberto $A \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ e que a função γ é diferenciável no intervalo aberto $I \subseteq \text{Dom}(\gamma)$, onde $\gamma(t) \in A$, para todo $t \in I \subseteq \text{Dom}(\gamma)$. Vimos que, pela regra da cadeia, a função h definida por $h(t) = f(\gamma(t))$ é diferenciável em I e

$$h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

Vamos agora nos restringir ao caso em que $n = 2$, acrescentar algumas condições, e então interpretar o gradiente geometricamente.

Para isto, considere a função

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y) &\longmapsto f(X) = f(x, y) \end{aligned}$$

Suponha que f é de classe C^1 no aberto $A \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$ um ponto pertencente à curva de nível k de f . Suponha ainda que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Considere agora uma curva arbitrária C , que contém o ponto (x_0, y_0) , e está inteiramente contida na curva de nível k de f . (Não se preocupe agora com a existência desta curva. Mais tarde, veremos que as condições anteriormente impostas garantem isto). Além disso, suponha que C é parametrizada pela função

$$\begin{aligned} \gamma : \text{Dom}(\gamma) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

e que γ é diferenciável no intervalo aberto $I \subset \text{Dom}(\gamma)$. Vamos supor ainda que o ponto $t_0 \in I \subset \text{Dom}(\gamma)$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ possui a propriedade de que $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$. Observe que dizer que C está inteiramente contida na curva de nível k de f se traduz em afirmar que

$$f(\gamma(t)) = k, \quad \forall t \in \text{Dom}(\gamma). \quad (1)$$

Derivando os dois lados da equação (1), obtemos que

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(k), \quad \forall t \in I,$$

que, pela regra da cadeia, fornece que

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in I \subset \text{Dom}(\gamma).$$

Desta forma, em particular, temos que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Como supusemos que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, a equação acima afirma que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva C , no ponto (x_0, y_0) . Como C é uma curva arbitrária contida na curva de nível k de f , concluímos que

“ O vetor gradiente de f no ponto (x_0, y_0) é perpendicular à curva de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0) . ”

Dizemos assim que $\nabla f(x_0, y_0)$ é um *vetor normal* à curva de nível k de f , no ponto (x_0, y_0) . A equação da reta que contém o ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é chamada de *reta normal* à curva de nível k de f no ponto (x_0, y_0) . A equação desta reta é dada por

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Além disso, a reta que contém o ponto (x_0, y_0) e é perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ é chamada de *reta tangente* à curva de nível k de f no ponto (x_0, y_0) . A equação desta reta é dada por

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0)] = 0.$$

Lembre-se que já vimos (Parte 2) que se C é uma curva parametrizada pela função γ , então a equação da reta tangente a esta curva no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ é dada por

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \gamma'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O que acabamos de ver, portanto, foi uma nova forma de encontrar a reta tangente de uma curva, no caso especial em que esta curva está contida na curva de nível de uma função.

Exemplo 11.2.1: A curva C , parametrizada pela função $\gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, é uma curva que contém o ponto $(1, 2\sqrt{2})$ e é tal que $f(\gamma(t)) = 3, \forall t \in Dom(\gamma)$, onde $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$. Seja $t_0 \in I$ (aberto) $\subseteq Dom(\gamma)$, tal que $\gamma(t_0) = (1, 2\sqrt{2})$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$. Determine as equações da reta perpendicular e da reta tangente a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$.

Solução: Como a curva C é tal que $f(\gamma(t)) = 3, \forall t \in Dom(\gamma)$, temos que C está contida na curva de nível 3 de f . Sendo assim, como sabemos que o gradiente de uma função é perpendicular as suas curvas de nível, vamos determinar o gradiente de f no ponto $(1, 2\sqrt{2})$, pois, desta forma, estaremos determinado um vetor perpendicular a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$. Neste caso, temos que

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 2\sqrt{2}) = \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

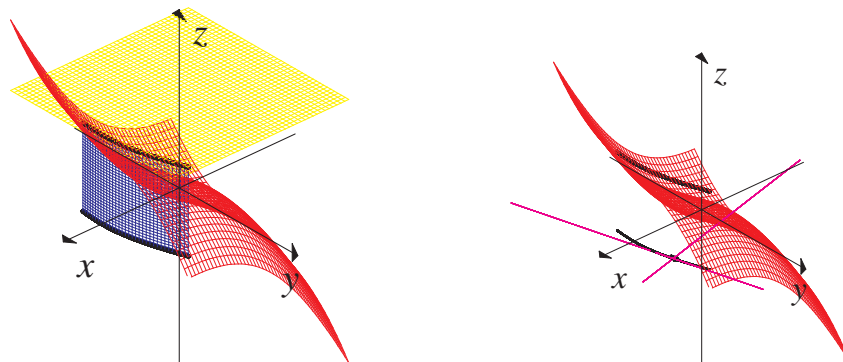
Sendo assim, a equação da reta perpendicular a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$ é dada por

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 2\sqrt{2}) + \lambda \nabla f(1, 2\sqrt{2}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow (x, y) &= (1, 2\sqrt{2}) + \lambda \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e a equação da reta tangente a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$ é dada por

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2\sqrt{2}) \cdot [(x, y) - (1, 2\sqrt{2})] &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot (x - 1, y - 2\sqrt{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Nas figuras abaixo, temos um esboço do gráfico de f , do plano $z = 3$, da curva C e da reta tangente e da reta normal a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$. Veja que, como $f(\gamma(t)) = 3$, $\forall t \in \text{Dom}(\gamma)$, a interseção do gráfico de f com o cilindro cuja diretriz é a curva C e cuja geratriz é paralela ao eixo z , está contida no plano $z = 3$.



11.3 Vetor Gradiente de uma Função de Três Variáveis: Interpretação Geométrica

Vamos agora repetir o mesmo raciocínio para o caso em que $n = 3$.

Para isto, considere a função

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y, z) &\longmapsto f(X) = f(x, y, z) \end{aligned}$$

Suponha que f é de classe C^1 no aberto $A \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ e seja $(x_0, y_0, z_0) \in A$ um ponto pertencente à superfície de nível k de f . Suponha ainda que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Considere agora uma curva arbitrária C , que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) , e está inteiramente contida na superfície de nível k de f . Além disso, suponha que C é parametrizada pela função

$$\begin{aligned} \gamma : \text{Dom}(\gamma) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

e que γ é diferenciável no intervalo aberto $I \subset \text{Dom}(\gamma)$. Vamos supor ainda que o ponto $t_0 \in I \subset \text{Dom}(\gamma)$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ possui a propriedade de que $\gamma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$. Observe que dizer que C está inteiramente contida na superfície de nível k de f se traduz em afirmar que

$$f(\gamma(t)) = k, \quad \forall t \in \text{Dom}(\gamma). \tag{2}$$

Derivando os dois lados da equação (2), obtemos que

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(k), \quad \forall t \in I$$

que, pela regra da cadeia, fornece que

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in I \subset \text{Dom}(\gamma).$$

Desta forma, em particular, temos que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Como supusemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$, a equação acima afirma que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular à curva C , no ponto (x_0, y_0, z_0) . Como C é uma curva arbitrária contida na superfície de nível k de f , concluímos que

“O vetor gradiente de f no ponto (x_0, y_0, z_0) é perpendicular à qualquer curva que contém este ponto e está inteiramente contida na superfície de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) . Portanto, o gradiente de f no ponto (x_0, y_0, z_0) é perpendicular à superfície de nível de f que contém este ponto.”

Dizemos assim que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é um *vetor normal* à superfície de nível k de f , no ponto (x_0, y_0, z_0) . A equação da reta que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralela ao vetor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é chamada de *reta normal* à superfície de nível k de f no ponto (x_0, y_0, z_0) . A equação desta reta é dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Além disso, o plano que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) e é perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é chamado de *plano tangente* à superfície de nível k de f no ponto (x_0, y_0, z_0) . A equação deste plano é dada por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] = 0.$$

Exemplo 11.3.1: Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S dada por $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$, no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução: Considere a função f dada por

$$f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Neste caso, temos que a superfície S é a superfície de nível 0 de f . Desta forma, como o gradiente é perpendicular às superfícies de nível da função, o gradiente de f no ponto $(1, -1, 2)$ é perpendicular à superfície S . Sendo assim, vamos calcular o gradiente de f .

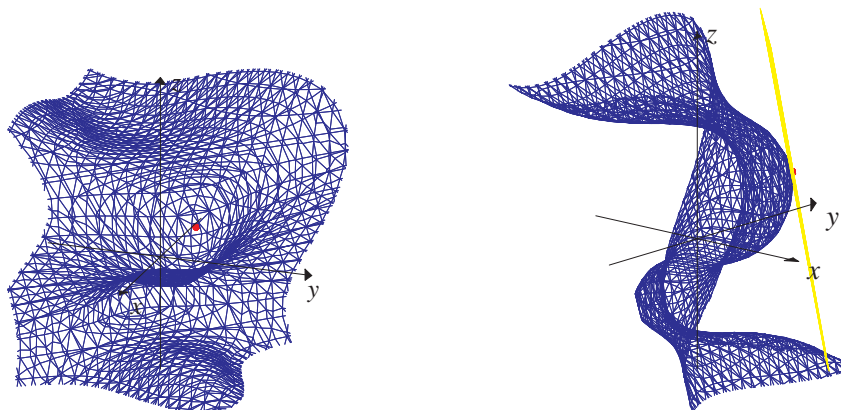
$$\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, -1, 2) = (1, 5, 8).$$

Portanto, o plano tangente à superfície S no ponto $(1, -1, 2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \nabla f(1, -1, 2) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] &= 0 \\ \Rightarrow (1, 5, 8) \cdot (x - 1, y + 1, z - 2) &= 0 \\ \Rightarrow x - 1 + 5(y + 1) + 8(z - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Nas figuras abaixo temos um esboço da superfície S e do plano tangente à superfície S no ponto $(1, -1, 2)$.



Observação 11.3.1: Seja $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto $A \subseteq Dom(g)$. Considere o ponto $(x_0, y_0) \in A$ e seja $z_0 = g(x_0, y_0)$. Vimos na aula de derivada (Parte 7) que, como g é derivável em (x_0, y_0) (pois é de classe C^1 no aberto A que contém (x_0, y_0)), então o gráfico de g possui plano tangente no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, o qual é dado por

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Considere agora a função f definida por $f(x, y, z) = g(x, y) - z$, $(x, y, z) \in Dom(g) \times \mathbb{R}$. Observe que o gráfico da função g dado, de forma explícita, pela equação $z = g(x, y)$, está agora dado de forma implícita pela equação $f(x, y, z) = 0$; ou seja, o gráfico de g é a superfície de nível 0 de f . Portanto, toda curva C inteiramente contida no gráfico de g , também está inteiramente contida na superfície de nível 0 de f . Desta forma, temos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ também é normal ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0, z_0) . Sendo assim, utilizando a equação do plano tangente à superfície de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) , também deveríamos encontrar a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0, z_0) . De fato, é isto que acontece. Realmente, uma vez que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$, segue que a equação do plano tangente à superfície de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) é dada por

$$\begin{aligned} & \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - g(x_0, y_0))] = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - g(x_0, y_0)) = 0 \\ \Leftrightarrow & z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \end{aligned}$$

conforme se esperava.

Exemplo 11.3.2: Considere a função g dada por $g(x, y) = \frac{5}{6}\sqrt{9 - 9x^2 - 4y^2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g , no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, g\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right)$, pelas duas formas mencionadas acima.

Solução:

1ª forma: Neste caso, vamos trabalhar com a função g dada e utilizar a fórmula de plano tangente ao gráfico de uma função. Sendo assim, temos que o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, g\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right)$ é dado por

$$z = g\left(\frac{2}{3}, 1\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{2}{3}, 1\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{3}, 1\right)(y - 1).$$

Desta forma, como $g\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \frac{5}{6}$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= -\frac{15}{2} \frac{x}{\sqrt{9 - 9x^2 - 4y^2}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{2}{3}, 1\right) = -5 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= -\frac{10}{3} \frac{x}{\sqrt{9 - 9x^2 - 4y^2}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{3}, 1\right) = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Portanto, o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, g\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right)$ é dado por

$$z = \frac{5}{6} - 5\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{10}{3}(y - 1).$$

2ª forma: Neste caso, vamos começar elevando a equação $z = \frac{5}{6}\sqrt{9 - 9x^2 - 4y^2}$ ao quadrado, ficamos com $36z^2 = 225 - 225x^2 - 100y^2$. Fizemos isto para evitar a raiz. Considere então a função f dada por

$$f(x, y, z) = 225x^2 + 100y^2 + 36z^2 - 225.$$

Observe que o gráfico da função g está contido na superfície de nível 0 da função f . Utilizando então o fato de que o gradiente de uma função é perpendicular a suas superfícies de nível, temos que o gradiente de f no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)$ é perpendicular à superfície de nível 0 de f neste ponto. Desta forma, a equação do plano tangente à superfície de nível 0 de f no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)$ é dada por

$$\nabla f\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right) \cdot \left[(x, y, z) - \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)\right] = 0.$$

Porém, como o gráfico da função g está contido na superfície de nível 0 da função f , equação acima também é a equação do plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)$. Vamos então calcular o gradiente de f .

$$\nabla f(x, y, z) = (450x, 200y, 72z).$$

$$\Rightarrow \nabla f\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right) = (300, 200, 60).$$

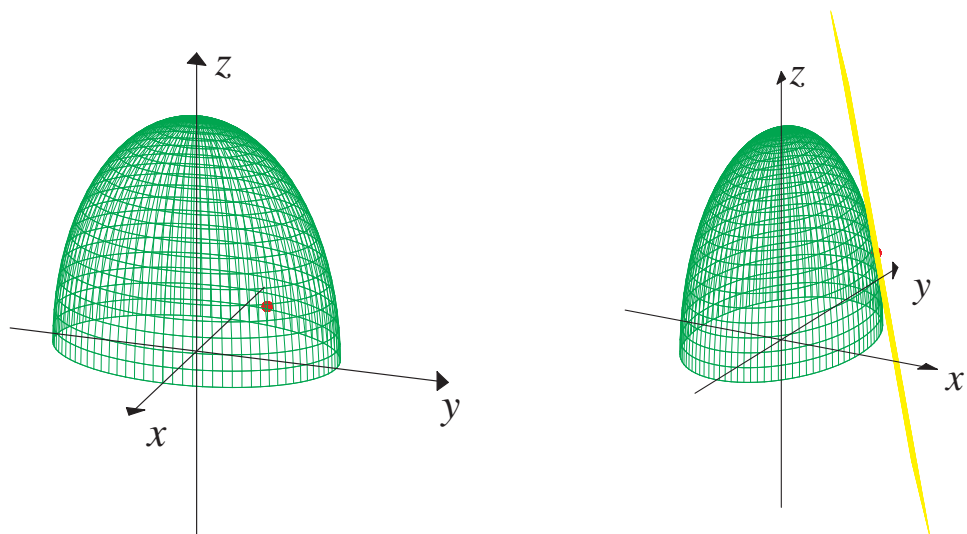
Portanto, a equação do plano tangente pedida é dada por

$$(300, 200, 60) \cdot \left[(x, y, z) - \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow (15, 10, 3) \cdot \left(x - \frac{2}{3}, y - 1, z - \frac{5}{6}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 15\left(x - \frac{2}{3}\right) + 10(y - 1) + 3\left(z - \frac{5}{6}\right) = 0.$$

Nas figuras abaixo temos um esboço da superfície S e do plano tangente à superfície S no ponto $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)$.



Observação 11.3.2: Considere duas superfícies S_1 e S_2 dadas, respectivamente, pelas equações $f_1(x, y, z) = 0$ e $f_2(x, y, z) = 0$, onde f_1 e f_2 são supostas de classe C^1 no aberto $A \subseteq \mathbb{R}^3$, e $\nabla f_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla f_2(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Considere agora uma curva C , parametrizada pela função $\gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, contida na interseção das superfícies S_1 e S_2 . Seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \in Dom(\gamma)$ e suponha que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$. Desta forma, o vetor $\gamma'(t_0)$, tangente à curva C no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, é perpendicular a ambos os vetores $\nabla f_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla f_2(x_0, y_0, z_0)$, uma vez que $\nabla f_i(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular a qualquer curva contida em S_i , pois S_i é uma superfície de nível de f_i ($i = 1, 2$). Portanto, o vetor $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao vetor $\nabla f_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla f_2(x_0, y_0, z_0)$. Desta forma, a equação da reta tangente à C no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (\nabla f_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla f_2(x_0, y_0, z_0)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 11.3.3: A curva C , imagem da função $\gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, está contida na interseção das superfícies S_1 , dada pela equação $x^2 + 2y^2 + z = 4$, e S_2 , dada pela equação $x^2 + y + z = 3$. Sabe-se que $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(\gamma)$ é tal que $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$.

- Determine a reta tangente à curva C no ponto $\gamma(t_0)$.
- Determine uma curva C nas condições acima.

Solução: Considere as funções f e g dadas por

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z - 4; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$g(x, y, z) = x^2 + y + z - 3; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Neste caso, temos que a superfície S_1 é a superfície de nível 0 de f e a superfície S_2 é a superfície de nível 0 de g . Desta forma, como o gradiente é perpendicular às superfícies de nível da função, $\nabla f(1, 1, 1)$ é perpendicular à superfície S_1 no ponto $(1, 1, 1)$ e $\nabla g(1, 1, 1)$ é perpendicular à superfície S_2 no ponto $(1, 1, 1)$. Como a curva C está contida na interseção das superfícies S_1 e S_2 , $\nabla f(1, 1, 1)$ e $\nabla g(1, 1, 1)$ são ambos perpendiculares à curva C no ponto $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$, i.e. $\nabla f(1, 1, 1)$ e $\nabla g(1, 1, 1)$ são ambos perpendiculares $\gamma'(t_0)$. Portanto, conforme já observado, $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial $\nabla f(1, 1, 1)$ e $\nabla g(1, 1, 1)$, de modo que a equação da reta tangente à C no ponto $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ é dada por

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda (\nabla f(1, 1, 1) \times \nabla g(1, 1, 1)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, vamos calcular os gradientes de f e de g no ponto $(1, 1, 1)$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 1) \text{ e } \nabla g(x, y, z) = (2x, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = (2, 4, 1) \text{ e } \nabla g(1, 1, 1) = (2, 1, 1).$$

Desta forma, temos que

$$\nabla f(1, 1, 1) \times \nabla g(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 0, -6).$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(3, 0, -6), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

