

PARTE 12

DERIVADAS DIRECIONAIS

12.1 Introdução

Dada uma função

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad ,$$

vimos que a derivada parcial de f com respeito à variável x_i no ponto X_0 , $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, fornece a taxa de variação da função f em relação à variação da variável x_i no ponto X_0 . Desta forma, podemos interpretar que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ fornece a taxa de variação da função f numa determinada direção, que é uma direção coordenada. Para obter a taxa de variação da função numa direção arbitrária, utilizamos a *derivada direcional*.

12.2 Derivadas Direcionais

DEFINIÇÃO 12.2.1: Seja $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis e seja \vec{u} um vetor unitário em \mathbb{R}^n . A *derivada direcional* de f no ponto X_0 na direção do vetor \vec{u} , denotada por $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, é a função real definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t}.$$

O domínio de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ é o subconjunto de $\text{Dom}(f)$ para o qual o limite acima existe.

A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ denomina-se, também, *taxa de variação de f no ponto X_0 na direção do vetor \vec{u}* . Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \approx \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t},$$

sendo que esta aproximação é tanto melhor quanto menor for $|t|$.

Exemplo 12.2.1: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde \vec{u} é o versor (vetor unitário correspondente) dos vetores dados abaixo.

a) $\vec{v} = (-1, 1)$

b) $\vec{v} = (1, 2)$

c) $\vec{v} = (1, 1)$

Solução: Vamos trabalhar com o vetor unitário arbitrário $\vec{u} = (a, b)$ e calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ e depois substituir em cada caso acima.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1, 1) + t(a, b)) - f(1, 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + ta, 1 + tb) - f(1, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + ta)^2 + (1 + tb)^2 - 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 + t^2a^2 + 2ta + 2tb + t^2b^2 - 2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2a^2 + 2ta + 2tb + t^2b^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} ta^2 + 2a + 2b + tb^2 = 2a + 2b. \end{aligned}$$

No caso (a), temos que $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = -2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

No caso (b), temos que $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2 \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Finalmente, no caso (c), temos que $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

♡

12.3 Interpretação Geométrica

Seja f a função

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

e sejam $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$ e \vec{u} o vetor $\vec{u} = (a, b)$. Como (x_0, y_0) pertence a um aberto contido no domínio de f , temos que existe $\delta > 0$, tal que $(x_0 + at, y_0 + bt) \in A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$, $\forall t \in [-\delta, \delta]$. Considere então a curva C parametrizada pela função γ dada por

$$\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, g(t)), \quad t \in [-\delta, \delta],$$

onde $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$. Observe que, construída desta forma, C é uma curva contida no gráfico da função f , dada pela interseção do gráfico da função f com o plano que contém o vetor $\vec{u} = (x_0 + at, y_0 + bt)$ e é paralelo ao eixo z . Observe que

$$\gamma'(t) = (a, b, g'(t)), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

de modo que

$$\gamma'(0) = (a, b, g'(0)).$$

Desta forma, como

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left(a, b, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \right) \\ &= (a, b, 0) + \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \right). \end{aligned}$$

Como $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \tan \alpha,$$

onde α é o ângulo formado pelos vetores $\gamma'(0)$ e $(a, b, 0)$, o qual fornece a inclinação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Temos portanto que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva C dada pela interseção do gráfico da função f com o plano que contém o vetor $\vec{u} = (x_0 + at, y_0 + bt)$ e é paralelo ao eixo z , no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observe que se $\vec{u} = (1, 0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

e que se $\vec{u} = (0, 1)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

12.4 Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Existe uma conexão entre derivada direcional e vetor gradiente, no caso da função ser diferenciável. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 12.4.1: Se $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $X_0 \in A(\text{Aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{u},$$

para todo vetor unitário \vec{u} em \mathbb{R}^n .

Demonstração: temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t}.$$

Como f é diferenciável em X_0 , temos que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + f'(X_0) \cdot H + \text{erro}(H),$$

onde (\cdot) é o produto matricial, ou

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot H + \text{erro}(H)$$

onde (\cdot) é o produto escalar e $\text{erro}(H)$ é tal que

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{\text{erro}(H)}{\|H\|} = 0.$$

Portanto, se f é diferenciável em X_0 , fazendo $H = t\vec{u}$, e observando que $\|H\| = \|t\vec{u}\| = |t|$, pois \vec{u} é unitário, temos que

$$f(X_0 + t\vec{u}) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot t\vec{u} + \text{erro}(t\vec{u}), \quad (1)$$

onde,

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{\text{erro}(t\vec{u})}{|t|} = 0,$$

que equivale a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{erro}(t\vec{u})}{t}. \quad (2)$$

Desta forma, utilizando (1) na definição de derivada direcional, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot t\vec{u} + \text{erro}(t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\nabla f(X_0) \cdot \vec{u} + \text{erro}(t\vec{u})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\nabla f(X_0) \cdot \vec{u} + \frac{\text{erro}(t\vec{u})}{t} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Portanto, substituindo (2) em (3), concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{u}.$$

□

Exemplo 12.4.1: Refaça o Exemplo 12.2.1.

É importante ressaltar que a diferenciabilidade da função f no ponto X_0 é essencial para valer a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{u},$$

conforme pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 12.4.2: Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$, onde $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário dado e verifique que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}$.

Solução: Temos pela definição de derivada direcional, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{b^3 t^3}{a^2 t^2 + b^2 t^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b^3}{a^2 + b^2} = b^3, \end{aligned}$$

pois, como $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, temos que $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Lembre-se que no Exemplo 7.4.1 verificamos que $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$. Desta forma, temos que, de fato,

$$\nabla f(0, 0) \cdot \vec{u} = (0, 1) \cdot (a, b) = b \neq b^3 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0).$$

Lembre-se que no Exemplo 7.4.1 também verificamos que f é contínua na origem, mas não é diferenciável em $(0, 0)$.



Observação 12.4.1: O Exemplo 12.4.1 acima mostra ainda que uma função f pode ser contínua em um ponto, possuir derivadas direcionais neste ponto em todas as direções e, mesmo assim, não se diferenciável neste ponto.

Utilizando o Teorema 12.4.1, podemos determinar em que direção a derivada direcional é máxima, e qual é o seu valor máximo.

TEOREMA 12.4.2: Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $X_0 \in A(\text{Aberto}) \subseteq Dom(f)$, tal que $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$, então o valor máximo da derivada direcional de f , no ponto X_0 , ocorre quando $\vec{u} = \frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$ e, neste caso, este valor máximo é dado por $\|\nabla f(X_0)\|$.

Exemplo 12.4.3: Seja $f(x, y) = x^2y$.

- Determine \vec{u} , de modo que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ seja máxima.
- Qual é o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$.
- Estando-se no ponto $(1, 1)$, que direção e sentido devemos tomar para que f cresça mais rapidamente?
- Estando-se no ponto $(1, 1)$, que direção e sentido devemos tomar para que f decresça mais rapidamente?

Solução:

- De acordo com o teorema acima, temos que o vetor \vec{u} , tal que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é máxima é o vetor dado por

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|}.$$

Como

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2),$$

segue que

$$\nabla f(1, 1) = (2, 1),$$

de modo que o vetor \vec{u} pedido é o vetor

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}(2, 1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

b) Novamente, de acordo com o teorema acima, temos que o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, que é obtido quando $\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|}$, é dado por $\|\nabla f(1, 1)\|$. Portanto, o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é igual a $\sqrt{5}$.

c) Estando-se no ponto $(1, 1)$, a direção e sentido que devemos tomar para que f cresça mais rapidamente é a direção e sentido do vetor $\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

d) Estando-se no ponto $(1, 1)$, a direção e sentido que devemos tomar para que f decresça mais rapidamente é a direção e sentido do vetor $\vec{u} = -\frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

♡