PARTE 13

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

13.1 Introdução

A função identidade em $\mathbb{R}^n$ é a função

$$\begin{array}{rcl} I_d : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & I_d(X) = X = (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Ela é uma função linear que é representada na forma matricial pela matriz identidade $n \times n$, denotada por I.

Dadas duas funções $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $G : B \subseteq \mathbb{R}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que F e G são *funções inversas* uma da outra se

$$(G \circ F)(X) = X, \quad \forall \; X \in A$$

e

$$(F \circ G)(Y) = Y, \quad \forall \; Y \in B.$$

Ou seja, F e G são funções inversas uma da outra se

$$F \circ G = I_{dA} \text{ e } G \circ F = I_{dB},$$

onde I_{dA} é a função identidade restrita ao conjunto A, i.e. $I_d : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ e I_{dB} é a função identidade restrita ao conjunto B, i.e. $I_d : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$. Observe que o domínio de F é a imagem de G e que a imagem de F é o domínio de G.

É usual denotarmos G por F^{-1} e, neste caso, temos que

$$F^{-1}(Y) = X \quad \forall \; Y \in B \Longleftrightarrow F(X) = Y \quad \forall \; X \in A.$$

Exemplo 13.1.1: Abaixo temos exemplos conhecidos de funções da reta na reta e suas inversas.

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2, & x \geq 0 \\ f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}, & y \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(x) = e^x, & x \in \mathbb{R} \\ f_2^{-1}(y) = \ln y, & y > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_3(x) = x^3, & x \in \mathbb{R} \\ f_3^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}, & y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$\begin{cases} f_4(x) = \operatorname{sen} x, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ f_4^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y, & -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} f_5(x) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ f_5^{-1}(y) = \arccos y, & -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Lembre-se que uma função F é inversível em sua imagem, se e somente se, F é injetora. Ou seja, F é inversível em sua imagem, se e só se,

$$F(X_1) = F(X_2) \Longleftrightarrow X_1 = X_2.$$

Dada a função linear injetora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é fácil verificar que sua inversa L^{-1} também é linear. Isto é, dado que $L(X_1) = Y_1$ e $L(X_2) = Y_2$ ao calcular $L^{-1}(aY_1 + bY_2)$, onde a e b são reais quaisquer, temos que $L^{-1}(aY_1 + bY_2) = aL^{-1}(Y_1) + bL^{-1}(Y_2)$. De fato,

$$\begin{aligned} L^{-1}(aY_1 + bY_2) &= L^{-1}(aL(X_1) + bL(X_2)) \\ &\overset{*}{=} L^{-1}(L(aX_1 + bX_2)) \\ &\overset{**}{=} aX_1 + bX_2 \\ &= aL^{-1}(Y_1) + bL^{-1}(Y_2), \end{aligned}$$

onde a igualdade em (*) se deve ao fato de L ser linear e a igualdade em (**) se deve ao fato de L e L^{-1} serem inversas uma da outra. Além disso, se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função linear inversível representada pela matriz A, i.e. $L(X) = A.X$, onde (.) é uma multiplicação matricial, a inversa de L, $L^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é a função linear inversível representada pela matriz A^{-1}, i.e. $L^{-1}(X) = A^{-1}.\, X$, onde A^{-1} é a inversa da matriz A.

Considere agora a função afim $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$T(X) = L(X - X_0) + Y_0 = A.\,(X - X_0) + Y_0,$$

onde $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função linear. É fácil ver que T é injetora, se e só se, L é injetora. De fato, dados $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} T(X_1) = T(X_1) &\Leftrightarrow L(X_1 - X_0) + Y_0 = L(X_2 - X_0) + Y_0 \\ &\Leftrightarrow L(X_1 - X_0) = L(X_2 - X_0) \Leftrightarrow L(X_1) - L(X_0) = L(X_1) - L(X_0) \\ &\Leftrightarrow L(X_1) = L(X_1). \end{aligned}$$

Além disso, observe que se L é uma função linear inversível representada pela matriz A, i.e. $L(X) = A.X$, onde (.) é uma multiplicação matricial, a função afim T, $T(X) = L(X - X_0) + Y_0 = A.\,(X - X_0) + Y_0$ também é inversível e, se $T(X) = Y$, a inversa de T é dada por

$$T^{-1}(Y) = L^{-1}(Y - Y_0) + X_0 = A^{-1}.\,(Y - Y_0) + X_0$$

Podemos verificar que a expressão dada acima é de fato a expressão correta para T^{-1}, substituindo Y por $T(X)$ e verificando que encontramos X. De fato,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(Y) &= T^{-1}(T(X)) = L^{-1}(T(X) - Y_0) + X_0 \\
&= L^{-1}(L(X - X_0) + Y_0 - Y_0) + X_0 \\
&= L^{-1}(L(X - X_0)) + X_0 \\
&= X - X_0 + X_0 \\
&= X.
\end{aligned}$$

Os cálculos acima, utilizando matrizes, são expressos da forma abaixo.

$$\begin{aligned}
T^{-1}(Y) &= T^{-1}(T(X)) = A^{-1}.\,(T(X) - Y_0) + X_0 \\
&= A^{-1}.\,(A.(X - X_0) + Y_0 - Y_0) + X_0 \\
&= A^{-1}.\,(A.(X - X_0)) + X_0 \\
&= X - X_0 + X_0 \\
&= X.
\end{aligned}$$

Com isto, temos uma fórmula que permite calcular a inversa de uma função afim inversível dada por

$$T(X) = L(X - X_0) + Y_0 = A.\,(X - X_0) + Y_0,$$

que é

$$T^{-1}(Y) = L^{-1}(Y - Y_0) + X_0 = A^{-1}.\,(Y - Y_0) + X_0. \tag{1}$$

Exemplo 13.1.1: Considere a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que T é inversível.
b) Se $T(x, y, z) = (u, v, w)$, determine $(T^{-1})'(u, v, w)$.

Solução: $T(X) = A.\,(X - X_0) + Y_0$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, como T é uma função afim, temos que T é inversível se e somente se a função linear L dada por

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

é inversível. Por sua vez, L é inversível se e somente se a matriz A é inversível. Como determinante de A é diferente de zero ($det(A) = 1$), temos que L é inversível e sua inversa é dada por

$$L^{-1}(x,y,z) = A^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Neste caso, como T^{-1} é dada por

$$T^{-1}(Y) = L^{-1}(Y - Y_0) + X_0 = A^{-1}.(Y - Y_0) + X_0,$$

segue que

$$T^{-1}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-1 \\ v-5 \\ w-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\heartsuit$

Nosso objetivo na próxima seção é enunciar o Teorema da função Inversa, que é capaz de garantir quando uma função vetorial de várias variáveis, $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to Im(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, possui uma inversa e fornecer propriedades desta inversa. Mas especificamente, o teorema trata do caso em que F é diferenciável e fornece resultados apenas locais. Para comprender melhor o teorema, acompanhe a seguinte linha de raciocínio: lembre-se que se F é diferenciável no ponto X_0, ela pode ser aproximada numa vizinhança deste ponto por uma transformação afim T. Portanto, uma pergunta natural que surge é: "será que se a transformação afim T for inversível, também poderemos garantir que, numa vizinhança do ponto X_0, a função F também é inversível?" Além disso, podemos nos questionar também: "e se for verdade que a função F é realmente inversível numa vizinhança do ponto X_0, será que podemos garantir que sua inversa também é diferenciável no ponto X_0?" E, podemos ir até mais além: "será que se a inversa da função F for diferenciável em X_0, sua melhor aproximação afim numa vizinhança deste ponto será a inversa de T? Ou seja, será que a matriz que representa a derivada da inversa de F em X_0 (no caso dela existir), é a inversa da matriz que representa a derivada de F em X_0?" A menos dos "detalhes", estas perguntas possuem respostas afirmativas e constituem o *Teorema da Função Inversa* que, conforme dito, está enunciado na próxima seção.

13.2 Teorema da Função Inversa

TEOREMA 13.2.1 (Teorema da Função Inversa): Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Se $F'(X_0)$ é inversível, então, existe um aberto N, contendo X_0, tal que, quando restrita a N, F possui uma inversa de classe C^1. Além disso, conjunto imagem $F(N)$ é aberto e mais ainda,

$$(F^{-1})'(Y_0) = (F'(X_0))^{-1},$$

onde $Y_0 = F(X_0)$. Isto é, a diferencial da função inversa de F em Y_0 é a inversa da diferencial de F em X_0.

Observe que o Teorema da Função Inversa só garante a existência da inversa de F (caso as condições sejam satisfeita) numa vizinhança do ponto X_0. Ele é um teorema de existência local e não global. O similar que vimos em Cálculo 1A, pedia derivada diferente de zero em todo intervalo. Por isso, podíamos garantir a existência da inversa na imagem deste intervalo sob consideração. O Teorema da Função Inversa visto em Cálculo 1A, para efeito de recordação, encontra-se enunciado abaixo.

TEOREMA 13.2.2: (Teorema da Função Inversa - Funções da Reta na Reta (Visto em Cálculo 1A)) Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $I \subseteq Dom(f)$ um intervalo aberto. Se $f'(c) \neq 0$ para todo $c \in I$, então f é inversível na imagem de I (cuja notação é $f(I)$), sua inversa $f^{-1} : f(I) \to Dom(f)$ é diferenciável e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

para todo $y \in f(I)$.

O similar ao Teorema da Função Inversa na forma que estamos vendo agora, obviamente também pode ser restrito a funções de uma variável e, neste caso, ele também só garante a existência da inversa localmente. E, neste caso, para demonstrar a existência da inversa, utilizamos o Teorema do Valor Médio. Vamos enunciar abaixo o Teorema da Função Inversa (na forma local) para funções da reta na reta.

TEOREMA 13.2.3 (Teorema da Função Inversa - Existência Local - Funções da Reta na Reta): Seja $f : Dom(f)(\text{aberto}) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Se $f'(x_0) \neq 0$, então, existe um intervalo aberto $I \subseteq Dom(f)$, contendo x_0, tal que f, quando restrita a I, possui uma inversa de classe C^1. Além disso, o conjunto imagem $f(I)$ é aberto e, mais ainda,

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1},$$

onde $y_0 = f(x_0)$. Isto é, a derivada da função inversa em y_0 é a inversa da derivada de f em x_0.

Observe que Teorema da Função Inversa fornece condições SUFICIENTES (f de classe C^1 e $f'(x_0) \neq 0$) para garantir a existência de uma inversa na vizinhança do ponto x_0. Isto não quer dizer que é necessário que $f'(x_0)$ seja diferente de zero para que exista uma inversa. De fato, é sabido que a função $f(x) = x^3$ tem derivada nula na origem, mas é inversível em toda reta.

13.3 Exemplos

Exemplo 13.3.1: Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = \left(x^3 - 2xy^2, x+y\right).$$

a) Mostre que F é inversível numa vizinhança do ponto $(1,-1)$.
b) Verifique que $F(1,-1) = (-1,0)$.
c) Determine $(F^{-1})'(-1,0)$.

Solução:

a) Observe que $F(x,y) = (f_1(x,y)\,,\, f_2(x,y))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma vez que suas funções coordenadas f_1 e f_2 são polinomiais. Além disso, como

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$F'(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz inversível, pois $\det(F'(1,-1)) = -3 \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,-1)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,-1) = (1-2\,,\,1-1) = (-1,0)$.

c) Também do Teorema da Função Inversa, temos que

$$(F^{-1})'(-1,0) = (F'(1,-1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Abaixo temos o cálculo de $(F'(1,-1))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1 - l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1/3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_2 - l_1}{\sim}$$

$$\overset{l_2 - l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \end{array}\right) \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

♡

Exemplo 13.3.2: Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = \left(x^3 + 2xy + y^2\ ,\ x^2 + y\right).$$

a) Mostre que F é inversível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.
b) Sabendo que $F(1,1) = (4,2)$, determine $(F^{-1})'(4,2)$.
c) Determine a função afim que melhor aproxima a função F numa vizinhança do ponto $(1,1)$.
d) Determine a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(4,2)$.

Solução:

a) Observe que $F(x,y) = (f_1(x,y)\,,\, f_2(x,y))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma vez que suas funções coordenadas f_1 e f_2 são polinomiais. Além disso, como

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+2y & 2x+2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz inversível, pois $\det(F'(1,1)) = -3 \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,1)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,1) = (1+2+1\,,\,1+1) = (4,2)$. Além disso, do Teorema da Função Inversa, temos que

$$(F^{-1})'(4,2) = (F'(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

Abaixo temos o cálculo de $(F'(1,-1))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1-4l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} -3 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1/(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_2-2l_1}{\sim}$$

$$\overset{l_2-2l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -5/3 \end{array}\right).$$

c) Sabemos que função afim que melhor aproxima a a função F numa vizinhança do ponto $(1,1)$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x,y) &= F'(1,1).\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x-5+4y-4 \\ 2x-2+y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x+4y-5 \\ 2x+y-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Sabemos que função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(4,2)$ é dada por

$$T_1(u,v) = T^{-1}(u,v) = (F^{-1})'(4,2).\begin{pmatrix} u-4 \\ v-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$(F^{-1})'(4,2) = (F'(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix},$$

temos que a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(4,2)$ é dada por

$$\begin{aligned} T_1(u,v) &= \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u-4 \\ v-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u/3+4/3+4v/3-8/3 \\ 2u/3-8/3-5v/3+10/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u/3+4v/3-1/3 \\ 2u/3-5v/3+5/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♡

Exemplo 13.3.3: Seja

$$F(u,v) = \left(u^2+u^2v+10v\ ,\ u+v^3\right).$$

a) Mostre que F é inversível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.
b) Calcule um valor aproximado para $(F^{-1})(11.8, 2.2)$.

Solução:

a) Observe que $F(u,v) = (f_1(u,v)\ ,\ f_2(u,v))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma vez que suas funções coordenadas f_1 e f_2 são polinomiais. Além disso, como

$$F'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+2uv & u^2+10 \\ 1 & 3v^2 \end{pmatrix},$$

temos que

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz inversível, pois $\det(F'(1,1)) = 1 \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,1)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,1) = (1+1=10\ ,\ 1+1) = (12,2)$. Além disso, sabemos que função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(12,2)$ é dada por

$$T_1(x,y) = T^{-1}(x,y) = (F^{-1})'(12,2).\begin{pmatrix} x-12 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde T é a transformação afim que melhor aproxima F numa vizinhança do ponto $(1,1)$. Para determinar $(F^{-1})'(12,2)$, utilizamos o Teorema da Função Inversa, que diz que

$$(F^{-1})'(12,2) = (F'(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abaixo temos o cálculo de $(F'(1,-1))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1-4l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_2+l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{-l_1}{\sim}$$

$$\overset{-l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{l_1\leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Portanto, a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(12,2)$ é dada por

$$T_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-12 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que um valor aproximado para $(F^{-1})(11.8, 2.2)$ é dado por $T_1(11.8, 2.2)$. Isto é,

$$\begin{aligned} (F^{-1})(11.8,2.2) \approx T_1(11.8,2.2) &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11.8-12 \\ 2.2-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.2-0.6 \\ 0.2+0.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2.0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\heartsuit$