PARTE 14

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

14.1 Introdução

No estudo de funções da reta na reta, definimos que uma função $y = g(x)$, $x \in Dom(g)$ está dada implicitamente numa equação envolvendo as variáveis x e y se, para todo $x \in Dom(g)$, o ponto $(x, g(x))$ é solução da equação. Agora que já estudamos funções reais de duas variáveis reais, podemos reescrever esta definição de uma forma mais elegante, dizendo que a função $y = g(x)$, $x \in Dom(g)$, está definida implicitamente na equação $f(x, y) = 0$, se $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in Dom(g)$.

Exemplo 14.1.1: Mostre que $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$ está dada de forma implícita na equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Solução: Considerando $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e substituindo $y = \sqrt{1 - x^2}$ na expressão de f, encontramos que

$$f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = x^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 1 \quad = \quad x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0, \quad |x| \leq 1,$$

o que mostra que $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$, está de fato implícita na equação dada.

♡

Lembre-se que ao estudarmos funções da reta na reta, mais do que simplesmente estar interessados em funções quaisquer definidas implicitamente, nosso interesse se concentra em funções definidas implicitamente que, além de contínuas, também são diferenciáveis. Neste caso, para descobrir $y' = g'(x)$, já conhecemos de dois métodos:

- 1º método: consiste em ser capaz de apresentar explicitamente a função $y = g(x)$ e, desta forma, calcular diretamente a derivada $y' = g'(x)$;

- 2º método: utiliza derivação implícita para calcular $y' = g'(x)$.

Vamos a seguir fazer alguns exemplos relembrando estes fatos.

Exemplo 14.1.2: Sabendo que a função diferenciável $y = g(x)$ está implícita na equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$, determine a equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, utilizando os dois métodos mencionados acima.

Solução:

Pelo 1º método, vamos utilizar a função g apresentada no Exemplo 14.1.1 e derivá-la diretamente. Neste caso, obtemos que

$$g'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall\, |x| < 1,$$

de modo que $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$ e portanto, a equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é dada por

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Pelo 2º método, vamos aplicar derivação implícita e derivar ambos os lados da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Neste caso, obtemos que

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}, \quad \text{se } y \neq 0.$$

Portanto, $y'\Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -1$, de modo que a equação pedida é a mesma obtida pelo primeiro método.

♡

Observe que agora, partindo ainda do pressuposto de que existe uma função diferenciável $y = g(x)$ implícita na equação $f(x, y) = 0$, temos um 3º método de calcular $y' = g'(x)$. Para isto, vamos olhar f como uma função de duas variáveis, i.e. $f = f(x, y)$, vamos fazer $y = g(x)$ na equação $f(x, y) = 0$ e, finalmente, aplicar a regra da cadeia para obter $y' = g'(x)$. Neste caso, derivando a equação

$$f(x, g(x)) \;=\; 0,$$

temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) \;=\; 0.$$

Portanto, se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$, temos que

$$g'(x) = y' \quad = \quad -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}. \tag{1}$$

Exemplo 14.1.3: Resolva o Exemplo 14.1.2 utilizando a fórmula obtida acima.

Solução: Neste caso, temos que $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, de modo que, utilizando a fórmula dada em (1), encontramos que

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y},$$

se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \neq 0$ e portanto, $y'\Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -1$. Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é dada por

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

♡

Exemplo 14.1.4: A função diferenciável $y = g(x)$ está definida implicitamente na equação

$$y^3 + xy + x^3 = 3.$$

Determine y' em termos de x e y, utilizando diferenciação implícita e a fórmula dada em (1).

Solução: Utilizando derivação implícita, obtemos que

$$\frac{d}{dx}\left(y^3 + xy + x^3\right) = \frac{d}{dx}(3)$$

$$\Rightarrow 3y^2y' + y + xy' + 3x^2 = 0 \Rightarrow y'\left(3y^2 + x\right) = -3x^2 - y \Rightarrow y' = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x},$$

se $3y^2 + x \neq 0$.

Utilizando agora fórmula dada em (1), onde $f(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 3$, encontramos que

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x},$$

se $3y^2 + x \neq 0$.

$\heartsuit$

Podemos generalizar nosso raciocínio e trabalhar com funções implícitas em dimensões maiores. É o que faremos a seguir.

14.2 Funções Definidas Implicitamente

DEFINIÇÃO 14.2.1: Dada uma função

$$\begin{array}{ccc} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (X,Y) = (x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) & \mapsto & F(X,Y) = F(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \end{array},$$

dizemos que a função $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ está definida implicitamente na equação

$$F(X,Y) = 0,$$

se $F(X, g(X)) = 0$, para todo $X \in Dom(g)$.

Exemplo 14.2.1: Determine y e z, como função de x, implícitas nas equações abaixo.

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x+z & = & 2 \end{array}$$

Solução: Vamos primeiro, para este exemplo, identificar X, n, Y, m, F e g, apresentados na Definição 14.2.1. Neste caso, encontramos que $X = x$, $n = 1$, $Y = (y,z)$, $m = 2$,

$$\begin{array}{ccc} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{1+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) = (x,(y,z)) & \mapsto & F(x,(y,z)) = (x+y+z-1\,,\, 2x+z-2) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{ccc} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & g(x) = (y(x), z(x)) \end{array}.$$

Vamos então determinar $(y(x), z(x)) = Y = g(X) = g(x)$, implícita na equação

$$F(x,(y,z)) = (x+y+z-1\,,\, 2x+z-2) = (0,0).$$

Temos portanto, que resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z-1 & = & 0 \\ 2x+z-2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Da segunda equação, encontramos que $z = z(x) = 2-2x$. Substituindo agora $z = 2-2x$ na primeira equação, encontramos que $y = y(x) = 1-x-z = 1-x-(2-2x) = -1+x$, $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, segue que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & z(x) = 2-2x \quad , \\ & & \\ y & = & y(x) = x-1 \quad , \end{array} \right. \quad x \in \mathbb{R}$$

estão implícitas na equação $F(x,(y,z)) = (x+y+z-1\,,\,2x+z-2) = (0,0)$.

♡

Exemplo 14.2.2: Determine z, como função de x e y, implícita na equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Solução: Vamos primeiro, para este exemplo, identificar X, n, Y, m, F e g, apresentados na Definição 14.2.1. Neste caso, encontramos que $X = (x,y)$, $n = 2$, $Y = z$, $m = 1$,

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{2+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) = ((x,y),z) & \mapsto & F((x,y),z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = z(x,y) \end{array},$$

Vamos então determinar $z = Y = g(X) = g(x,y)$, implícita na equação

$$F((x,y),z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Resolvendo então a equação acima para z, encontramos as duas possibilidades abaixo

$$g_1(x,y) = z(x,y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

e

$$g_2(x,y) = z(x,y) = -\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

♡

14.3 Derivadas de Funções Definidas Implicitamente

Conforme feito antes, vamos supor que a função diferenciável $Y = g(X)$ está definida implicitamente na equação $F(X,Y) = 0$, e vamos calcular $g'(x)$, utilizando derivação implícita.

Exemplo 14.3.1: Considere as equações

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ 2x + z & = & 2 \end{array}.$$

Supondo que y e z são funções diferenciáveis de x que estão implícitas nas equações acima, determine $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$ derivando implicitamente as equações acima.

Solução: Derivando implicitamente as duas equações dadas acima, temos que

$$\begin{array}{rcl} 1 + \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} & = & 0 \\ 2 + \dfrac{dz}{dx} & = & 0 \end{array}.$$

Portanto, para determinar $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$, devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\ \\ \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\ \\ \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De fato, reparando que este é o Exemplo 14.2.1, onde encontramos que as funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ implícitas nas duas equações dadas, são as funções, $y(x) = x - 1$ e $z(x) = 2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, comprovamos que realmente $\dfrac{dy}{dx} = 1$ e $\dfrac{dz}{dx} = -2$.

♡

Exemplo 14.3.2: Considere a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Supondo que z é função das variáveis x e y diferenciável que está implícita na equação acima, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ derivando implicitamente a equação acima.

Solução: Derivando implicitamente a equação dada acima, tanto em relação à variável x, como em relação á variável y, temos que

$$\begin{aligned} 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 2y + \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned} .$$

Portanto, se $z \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{x}{z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y}{z} \end{aligned} .$$

De fato, reparando que este é o Exemplo 14.2.2, onde encontramos que as funções $g_1(x, y) = z(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, e $g_2(x, y) = z(x, y) = -\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$,

$x^2 + y^2 \leq 1$, estão ambas implícitas na equação dada, e calculando diretamente as derivadas parciais, de ambas as funções, comprovamos que realmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} = -\frac{x}{z}\\ \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} = -\frac{y}{z}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} = -\frac{x}{z}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} = -\frac{y}{z}\ .\end{aligned}$$

♡

Exemplo 14.3.3: Considere as equações

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &= 5\\ xyz-2 &= 0\ .\end{aligned}$$

Suponha que x e y são funções diferenciáveis de z que estão implícitas nas equações acima. Determine $\dfrac{dx}{dz}$ e $\dfrac{dy}{dz}$ derivando implicitamente as equações acima.

Solução: Derivando implicitamente as duas equações dadas acima, temos que

$$\begin{aligned}2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}+2z &= 0\\ yz\frac{dx}{dz}+xz\frac{dy}{dz}+xy &= 0\ .\end{aligned}$$

Portanto, para determinar $\dfrac{dx}{dz}$ e $\dfrac{dy}{dz}$, devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y\\ yz & xz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dz}\\ \\ \dfrac{dy}{dz}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2z\\ xy\end{pmatrix}.$$

Desta forma, se a matriz $\begin{pmatrix} 2x & 2y\\ yz & xz\end{pmatrix}$ for inversível, temos que

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dz}\\ \\ \dfrac{dy}{dz}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x & 2y\\ yz & xz\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2z\\ xy\end{pmatrix}$$

♡

Exemplo 14.3.4: Considere as equações

$$\begin{aligned} xu + yv + zw &= 1 \\ x + y + z + u + v + w &= 0. \\ xy + zuv + w &= 0 \end{aligned}$$

Suponha que x, y e z são funções diferenciáveis de u, v e w que estão implícitas nas equações acima. Determine $\dfrac{\partial x}{\partial w}$, $\dfrac{\partial y}{\partial w}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial w}$ derivando implicitamente as equações acima com respeito à w.

Solução: Derivando implicitamente as três equações acima, temos que

$$\begin{aligned} u\frac{\partial x}{\partial w} + v\frac{\partial y}{\partial w} + w\frac{\partial z}{\partial w} + z &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial w} + 1 &= 0 \\ y\frac{\partial x}{\partial w} + x\frac{\partial y}{\partial w} + uv\frac{\partial z}{\partial w} + 1 &= 0 \end{aligned},$$

Portanto, para determinar $\dfrac{\partial x}{\partial w}$, $\dfrac{\partial y}{\partial w}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial w}$, devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desta forma, se a matriz $\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix}$ for inversível, temos que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♡

Observação 14.3.1: Analogamente, podemos determinar $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ derivando implicitamente as equações acima com respeito à v e determinar $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ derivando implicitamente as equações acima com respeito à u.

Baseado nos exemplos resolvidos acima, observe que para que é necessário que o número de equações dadas seja igual ao número de funções definidas implicitamente. Isto é, que os espaços contradomínios de F e g tenham a mesma dimensão. Por isto, que no nosso modelo, estes números são ambos representados por m.

No caso geral, podemos dizer que numa equação da forma

$$F(X, Y) \;=\; 0,$$

sabemos que existe uma função diferenciável $Y = g(X)$ implícita nesta equação e nosso objetivo é determinar $Y' = g'(X)$. E, para isto, vamos então utilizar a regra da cadeia.

Para facilitar, vamos definir a função $G(X) = (X, g(X))$. Desta forma, temos que

$$F(X, g(X)) = F(G(X)) \;=\; 0.$$

Portanto, pela regra da cadeia, temos que

$$F'(G(X)).G'(X) \;=\; 0,$$

onde (.) é multiplicação matricial. Observe que

$$F'(G(X)) = F'(X, g(X)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

onde cada uma das derivadas parciais é avaliada em $G(X) = (X, g(X))$. Para auxiliar, vamos definir as seguintes matrizes

$$F_X(G(X)) = F_X(X, g(X)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

e

$$F_Y(G(X)) = F_Y(X, g(X)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

onde, cada uma das derivadas parciais, conforme dito, é avaliada em $G(X) = (X, g(X))$. Neste caso, temos que

$$F'(G(X)) = \Big(F_X(G(X)) \vdots F_Y(G(X)) \Big)$$

Observe que, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $g(X) = (y_1, y_2, ..., y_n)$, de modo que, $G(X) = (X, g(X)) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$. Desta forma, temos que

$$G'(X) = \begin{pmatrix} X' \\ \dots \\ g'(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Note que, como $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$, se $i \neq j$, e $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1$, se $i = j$, segue que

$$G'(X) = \begin{pmatrix} X' \\ \dots \\ g'(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Utilizando uma notação mais sucinta, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e

$$g'(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

temos que,

$$G'(X) = \begin{pmatrix} X' \\ \ldots\ldots \\ g'(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ \ldots\ldots \\ g'(X) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, podemos reescrever a regra da cadeia

$$F'(G(X)).G'(X) \;\; = \;\; 0,$$

como

$$F'(G(X)).G'(X) = \Big(F_X(G(X)) \vdots F_Y(G(X)) \Big) \begin{pmatrix} I \\ \ldots\ldots \\ g'(X) \end{pmatrix} = 0.$$

Com isto, temos que

$$F_X(G(X)).\, I + F_Y(G(X)).\, g'(X) = 0.$$

Portanto, se $F_Y(G(X))$ for inversível, temos que

$$g'(X) = -\left(F_Y(G(X))\right)^{-1} .\, F_X(G(X)).$$

Isto é,

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} .\, F_X(X, g(X)).$$

Exemplo 14.3.5: Nos Exemplos 14.3.1, 14.3.2, 14.3.3 e 14.3.4, especifique X, n, Y, m, F e g, de acordo com a Definição 14.2.1. Além disso, determine $F_X(X, g(X))$, $F_Y(X, g(X))$ e $g'(X)$, conforme definidos acima.

Solução:

No Exemplo 14.3.1, temos que

$$X = x, \quad n = 1, \quad \text{e } Y = (y, z), \quad m = 2$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{1+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) = (x, (y, z)) & \mapsto & F(x, (y, z)) = (x + y + z - 1 \;,\; 2x + z - 2) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & g(x) = (y(x), z(x)) \end{array}.$$

Além disso, estamos falando sobre a função diferenciável $(y, z) = Y = g(X) = g(x)$, que está implícita na equação

$$F(z, (x, y)) = (x + y + z - 1 \;,\; 2x + z - 2) = (0, 0).$$

Sendo assim, temos que

$$F_X(X, g(X)) = F_x(x,(y,z)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$F_Y(X, g(X)) = F_{(y,z)}(x,(y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$g'(X) = g'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a fórmula

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} F_X(X, g(X)),$$

neste caso, é reescrita como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

No Exemplo 14.3.2, temos que

$$X = (x,y), \quad n = 2, \quad \text{e } Y = z, \quad m = 1$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{2+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) = ((x,y),z) & \mapsto & F((x,y),z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^{2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = z(x,y) \end{array}.$$

Além disso, estamos falando sobre a função diferenciável $z = Y = g(X) = g(x,y)$, que está implícita na equação

$$F((x,y),z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Sendo assim, temos que

$$F_X(X, g(X)) = F_{(x,y)}((x,y),z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix},$$

$$F_Y(X, g(X)) = F_z((x,y),z) = \begin{pmatrix} 2z \end{pmatrix},$$

e

$$g'(X) = g'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a fórmula

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} F_X(X, g(X)),$$

caso $F_Y(X, g(X)) = F_z((x, y), z)$ seja inversível, neste caso, é reescrita como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

No Exemplo 14.3.3, temos que

$$X = z, \quad n = 1, \quad \text{e } Y = (x, y), \quad m = 2$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{1+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) = (z, (x, y)) & \mapsto & F(z, (x, y)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 5, xyz - 2) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & g(z) = (x(z), y(z)) \end{array}.$$

Além disso, estamos falando sobre a função diferenciável $(x, y) = Y = g(X) = g(z)$, que está implícita na equação

$$F(z, (x, y)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 5, xyz - 2) = (0, 0).$$

Sendo assim, temos que

$$F_X(X, g(X)) = F_z(z, (x, y)) = \begin{pmatrix} 2z \\ xy \end{pmatrix},$$

$$F_Y(X, g(X)) = F_{(x,y)}(z, (x, y)) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ yz & xz \end{pmatrix},$$

e

$$g'(X) = g'(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a fórmula

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} F_X(X, g(X)),$$

caso $F_Y(X, g(X)) = F_{(x,y)}(z, (x, y))$ seja inversível, neste caso, é reescrita como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ yz & xz \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2z \\ xy \end{pmatrix}.$$

No Exemplo 14.3.4, temos que

$$X = (u, v, w), \quad n = 3 \quad \text{e } Y = (x, y, z), \quad m = 3,$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{3+3} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) = ((u, v, w), (x, y, z)) & \mapsto & F((u, v, w), (x, y, z)) = \begin{pmatrix} xu + yv + zw - 1 \\ x + y + z + u + v + w \\ xy + zuv + w \end{pmatrix} \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) & \mapsto & g(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{array}.$$

Além disso, estamos falando sobre a função diferenciável $Y = (x, y, z) = g(u, v, w) = g(X)$, que está implícita na equação

$$F((u, v, w), (x, y, z)) = \begin{pmatrix} xu + yv + zw - 1 \\ x + y + z + u + v + w \\ xy + zuv + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, temos que

$$F_X(X, g(X)) = F_{(u,v,w)}((u, v, w), (x, y, z)) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ zv & zu & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_Y(X, g(X)) = F_{(x,y,z)}((u, v, w), (x, y, z)) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix},$$

e

$$g'(X) = g'(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a fórmula

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} F_X(X, g(X))$$

caso $F_Y(X, g(X)) = F_{(x,y,z)}((u, v, w), (x, y, z))$ seja inversível, neste caso, é reescrita como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ zv & zu & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue então, que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ zv \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ zu \end{pmatrix}.$$

e

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♡

14.4 Teorema da Função Implícita

Na seção anterior, vimos que, admitindo-se que existe uma função diferenciável $Y = g(X)$ implícita na equação $F(X, Y) = 0$, se $F_Y(X, g(X))$ é inversível, então a regra da cadeia nos diz que

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} F_X(X, g(X)).$$

O Teorema da Função Implícita, que vamos enunciar a seguir, de fato afirma que se (X_0, Y_0) é tal que $F(X_0, Y_0) = 0$ e $F_Y(X_0, Y_0)$ é inversível, então numa vizinhança de X_0 existe uma função diferenciável $Y = g(X)$ que está implícita na equação $F(X, Y) = 0$. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 14.4.1: (Teorema da Função Implícita) Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Suponha que existem $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^m$ tais que
i) $F(X_0, Y_0) = 0$;
ii) $F_Y(X_0, Y_0)$ é inversível.
Então, num aberto $N \subseteq \mathbb{R}^n$, contendo X_0, existe uma função de classe C^1, $g : N \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $Y_0 = g(X_0)$ e $F(X, g(X)) = 0$, para todo $X \in N$. Além disso,

$$g'(X) = -\left(F_Y(X, g(X))\right)^{-1} F_X(X, g(X)).$$

Observe que dizer que existe uma função diferenciável $Y = g(X)$ implícita da equação $F(X, Y) = 0$, numa vizinhança do ponto (X_0, Y_0), equivale a dizer que numa vizinhança do ponto (X_0, Y_0), o conjunto de nível zero da função F pode ser descrito como gráfico de uma função diferenciável. Isto é, numa vizinhança de (X_0, Y_0), o conjunto descrito de forma implícita (como conjunto de nível de uma função) também pode ser descrito de forma explícita (com gráfico de uma outra função). Pensando desta forma, vamos analisar duas situacões simples e verificar que pedir que $F_Y(X_0, Y_0)$ seja inversível é bem natural.

Considere uma curva C em $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $F(x, y) = 0$, onde F é uma função diferenciável. Isto é, C está contida na curva de nível zero de F. Observe que para ser possível que, numa vizinhança do ponto (x_0, y_0), possa-se escrever y como função de x, i.e. para que esta parte da curva represente o gráfico de uma função nesta vizinhança, a curva não pode ser vertical. Como sabemos que o gradiente da função F é perpendicular as suas curvas de nível, pedir que a curva não seja vertical é pedir que o gradiente de F não seja horizontal. Ou seja, é pedir que a segunda componente do vetor gradiente de F não seja nula, i.e. $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Como aqui $Y = y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = F_Y$, então $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ equivale a $F_Y \neq 0$, conforme diz o Teorema da Função Implícita.

Da mesma forma, vamos agora considerar uma superfície S em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz à equação $F(x, y, z) = 0$, onde F é uma função diferenciável. Isto é, S está contida na superfície de nível zero de F. Observe que para ser possível que, numa vizinhança do ponto (x_0, y_0, z_0), possa-se escrever z como função de x e y, isto é para esta parte da superfície represente o gráfico de uma função nesta vizinhança, a superfície não pode ser vertical. Como sabemos que o gradiente da função F é perpendicular as suas superfícies de nível, pedir que a superfície não seja vertical é pedir que o gradiente de F não seja horizontal. Ou seja, é pedir que a terceira componente do vetor gradiente não seja nula, i.e. $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Como aqui $Y = z$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = F_Y$, então $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ equivale a $F_Y \neq 0$, conforme diz o Teorema da Função Implícita.

Exemplo 14.4.1: Considere as equações

$$\begin{aligned} x^2y + yz &= 0 \\ xyz + 1 &= 0. \end{aligned}$$

a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(1, 1, -1)$, x e y podem ser escritas em função de z.
b) Determine $\dfrac{dx}{dz}$ e $\dfrac{dy}{dz}$ no ponto $(1, 1, -1)$.

Solução:
a) Neste caso, temos que

$$X = z \quad \text{e } Y = (x, y), \quad X_0 = z_0 = -1 \quad \text{e } Y_0 = (x_0, y_0) = (1, 1),$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{1+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) = (z, (x, y)) & \mapsto & F(z, (x, y)) = (x^2y + yz\ ,\ xyz + 1) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & g(z) = (x(z), y(z)) \end{array}.$$

A primeira condição do Teorema da Função Implícita que devemos satisfazer é de que F seja uma função de classe C^1. Isto é de fato satisfeito, pois as funções coordenadas de F são polinomiais. A segunda condição do Teorema da Função Implícita que devemos satisfazer é de que $F(X_0, Y_0) = F(z_0, (x_0, y_0)) = F(-1, (1, 1)) = (0, 0)$. Esta condição também é satisfeita, pois $F(-1, (1, 1)) = (1-1\ ,\ -1+1) = (0, 0)$. Por último, devemos verificar se $F_Y(X_0, Y_0) = F_{(x,y)}(z_0, (x_0, y_0)) = F_{(x,y)}(-1, (1, 1))$ é inversível. Como

$$F_{(x,y)}(z, (x, y)) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + z \\ yz & xz \end{pmatrix},$$

temos que

$$F_{(x,y)}(z_0, (x_0, y_0)) = F_{(x,y)}(-1, (1, 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, $F_{(x,y)}(-1, (1, 1))$ é inversível, pois seu determinante é diferente de zero. Sendo assim, como satisfizemos as três condições do Teorema da Função Implícita, temos que, num aberto $N \subseteq \mathbb{R}$, contendo $z_0 = -1$, existe uma função de classe C^1, $g : N \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(z) = (x(z), y(z))$, tal que $(1, 1) = (x_0, y_0) = g(z_0) = g(-1)$ e $F(z, g(z)) = g(z, (x(z), y(z))) = (0, 0)$ para todo $z \in N$. Portanto, temos que existe uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$, tal que x e y podem ser escritas em função de z.

b) Adaptando a fórmula apresentada no Teorema da Função Implícita para este caso particular, temos que

$$\begin{aligned}
g'(X_0) = g'(z_0) = g'(-1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z}(-1) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z}(-1) \end{pmatrix} &= -\left(F_Y(X_0, g(X_0))\right)^{-1} F_X(X_0, g(X_0)) \\
&= -\left(F_{(x,y)}(z_0, g(z_0))\right)^{-1} F_z(z_0, g(z_0)) \\
&= -\left(F_{(x,y)}(-1, (1,1))\right)^{-1} F_z(-1, (1,1)).
\end{aligned}$$

Como

$$F_X(X, g(X)) = F_z(z, (x,y)) = \begin{pmatrix} y \\ xy \end{pmatrix},$$

segue que

$$F_z(-1, (1,1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z}(-1) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z}(-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\heartsuit$

Exemplo 14.4.2: Considere as equações

$$\begin{aligned}
x^2 + yu + xv + w &= 0 \\
x + y + uvw + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(x, y, u, v, w) = (1, -1, 1, 1, -1)$, x e y podem ser escritas em função de u, v, w.
b) Determine $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ no ponto $(1, -1, 1, 1, -1)$.

Solução:
a) Neste caso, temos que

$$X = (u, v, w) \quad \text{e } Y = (x, y), \quad X_0 = (u_0, v_0, w_0) = (1, 1, -1) \quad \text{e } Y_0 = (x_0, y_0) = (1, -1),$$

$$\begin{array}{rcl}
F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{3+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
(X, Y) = ((u, v, w), (x, y)) & \mapsto & F((u, v, w), (x, y)) = (x^2 + yu + xv + w \,,\, x + y + uvw + 1)
\end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl}
g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
(u, v, w) & \mapsto & g(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w))
\end{array}.$$

A primeira condição do Teorema da Função Implícita que devemos satisfazer é de que F seja uma função de classe C^1. Isto é de fato satisfeito, pois as funções coordenadas de F são polinomiais. A segunda condição do Teorema da Função Implícita que devemos satisfazer é de que $F(X_0,Y_0) = F((u_0,v_0,w_0),(x_0,y_0)) = F((1,1,-1),(1,-1)) = (0,0)$. Esta condição também é satisfeita, pois $F((1,1,-1),(1,-1)) = (1-1+1-1\ ,\ 1-1-1+1) = (0,0)$. Por último, devemos verificar se $F_Y(X_0,Y_0) = F_{(x,y)}((u_0,v_0,w_0),(x_0,y_0)) = F_{(x,y)}((1,1,-1),(1,-1))$ é inversível. Como

$$F_{(x,y)}((u,v,w),(x,y)) = \begin{pmatrix} 2x+v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$F_{(x,y)}((u_0,v_0,w_0),(x_0,y_0)) = F_{(x,y)}((1,1,-1),(1,-1)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, $F_{(x,y)}((1,1,-1),(1,-1))$ é inversível, pois seu determinante é diferente de zero. Sendo assim, como satisfizemos as três condições do Teorema da Função Implícita, temos que num aberto $N \subseteq \mathbb{R}^3$ contendo $(u_0,v_0,w_0) = (1,1,-1)$, existe uma função de classe C^1, $g : N \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w) = (x(u,v,w),y(u,v,w))$, tal que $(1,-1) = (x_0,y_0) = g(u_0,v_0,w_0) = g(1,1,-1)$ e

$$F((u,v,w),g(u,v,w)) = g((u,v,w),(x(u,v,w),y(u,v,w))) = (0,0) \;\; \forall \;\; (u,v,w) \in N.$$

Portanto, temos que existe uma vizinhança do ponto $(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0) = (1,-1,1,1,-1)$, tal que x e y podem ser escritas em função de (u,v,w).

b) Adaptando a fórmula apresentada no Teorema da Função Implícita, para este caso em particular, temos que

$$\begin{aligned} g'(X_0) &= g'(u_0,v_0,w_0) \\ &= g'(1,1,-1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(1,1,-1) \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial u}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(1,1,-1) \end{pmatrix} \\ &= -\left(F_Y(X_0,g(X_0))\right)^{-1} F_X(X_0,g(X_0)) \\ &= -\left(F_{(x,y)}((u_0,v_0,w_0),g(u_0,v_0,w_0))\right)^{-1} F_{(u,v,w)}((u_0,v_0,w_0),g(u_0,v_0,w_0)) \\ &= -\left(F_{(x,y)}((1,1,-1),(1,-1))\right)^{-1} F_{(u,v,w)}((1,1,-1),(1,-1)). \end{aligned}$$

Como

$$F_X(X,g(X)) = F_{(u,v,w)}((u,v,w),(x,y)) = \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix},$$

segue que

$$F_{(u,v,w)}((1,1,-1),(1,-1)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(1,1,-1) \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1,-1) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(1,1,-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(1,1,-1) \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(1,1,-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 14.4.3: As equações

$$\begin{aligned} 2x^3y + yx^2 + t^2 &= 0 \\ x + y + t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

definem implicitamente uma curva C parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que satisfaz a $\gamma(1) = (-1, 1)$. Determine a reta tangente a C em $t = 1$.

Solução: Neste caso, temos que

$$X = t \quad \text{e} \quad Y = (x, y), \quad X_0 = t_0 = 1 \quad \text{e} \quad Y_0 = (x_0, y_0) = (-1, 1),$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{1+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) = (t,(x,y)) & \mapsto & F(t,(x,y)) = (2x^3y + yx^2 + t^2\,,\ x + y + t - 1) \end{array},$$

e a função g foi chamada de γ, de modo que

$$\begin{array}{rcl} \gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{array}.$$

Como a equação da reta pedida é dada por

$$(x, y) = \gamma(1) + \lambda\gamma'(1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

devemos determinar $\gamma'(1)$. Observe que as condições do Teorema da Função Implícita são satisfeita. De fato, a primeira condição é de que F seja uma função de classe C^1, que é satisfeita, pois as funções coordenadas de F são polinomiais. A segunda condição do Teorema da Função Implícita é de que $F(X_0, Y_0) = F(t_0, (x_0, y_0)) = F(1, (-1, 1)) = (0, 0)$ também é satisfeita, pois $F(1, (-1, 1)) = (-2 + 1 + 1\,,\ -1 + 1 + 1 - 1) = (0, 0)$. Por último, temos que $F_Y(X_0, Y_0) = F_{(x,y)}(t_0, (x_0, y_0)) = F_{(x,y)}(1, (-1, 1))$ é inversível, uma vez que

$$F_{(x,y)}(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} 6x^2y + 2xy & 2x^3 + x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$F_{(x,y)}(t_0,(x_0,y_0)) = F_{(x,y)}(1,(-1,1)) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

que é uma matriz é inversível, pois seu determinante é diferente de zero. Desta forma, como satisfizemos as três condições do Teorema da Função Implícita, temos que num aberto $N \subseteq \mathbb{R}$ contendo $t_0 = -1$, existe uma função de classe C^1, $\gamma : N \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tal que $(-1,1) = (x_0,y_0) = \gamma(t_0) = g(1)$ e $F(t,\gamma(t)) = \gamma(t,(x(t),y(t))) = (0,0)$ para todo $t \in N$. Portanto, temos que existe uma vizinhança do ponto $(t_0,x_0,y_0) = (1,-1,1)$, tal que x e y podem ser escritas em função de t. Adaptando a fórmula apresentada no Teorema da Função Implícita, para este caso em particular, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma'(X_0) = \gamma'(t_0) = \gamma'(1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t}(1) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(1) \end{pmatrix} &= -\left(F_Y(X_0,\gamma(X_0))\right)^{-1} F_X(X_0,\gamma(X_0)) \\
&= -\left(F_{(x,y)}(t_0,\gamma(t_0))\right)^{-1} F_t(t_0,\gamma(t_0)) \\
&= -\left(F_{(x,y)}(1,(-1,1))\right)^{-1} F_t(1,(-1,1)).
\end{aligned}$$

Como

$$F_X(X,g(X)) = F_t(t,(x,y)) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix},$$

segue que

$$F_t(1,(-1,1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t}(1) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\heartsuit$

Exemplo 14.4.4: Considere a função de classe C^1

$$F(x,y,u,v) = (f_1(x,y,u,v), f_2(x,y,u,v)).$$

Suponha que $F(1,2,3,5) = (0,0)$ e defina $X = (x,y)$ e $Y = (u,v)$. Sabe-se que

$$F'(1,2,3,5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $S = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^4 \mid F(X,Y) = (0,0)\}$.
a) Mostre que S é o gráfico de uma função de classe C^1 $Y = g(X)$ numa vizinhança no ponto $(1,2,3,5) \in S$.
b) Determine $g'(1,2)$.
c) Obtenha a melhor transformação afim que aproxima g numa vizinhança de $X_0 = (x_0,y_0) = (1,2)$.

Solução:
a) Neste caso, temos que

$$X = (x,y) \quad \text{e} \quad Y = (u,v), \quad X_0 = (x_0,y_0) = (1,2) \quad \text{e} \quad Y_0 = (u_0,v_0) = (3,5),$$

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^{2+2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) = ((x,y),(u,v)) & \mapsto & F((x,y),(u,v)) = (f_1((x,y),(u,v)), f_2((x,y),(u,v))) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \end{array}.$$

A primeira condição do Teorema da Função Implícita que devemos satisfazer é de que F seja uma função de classe C^1. Isto é de fato satisfeito, por hipótese. A segunda condição do Teorema da Função Implícita que devemos satisfazer é de que $F(X_0,Y_0) = F((x_0,y_0),(u_0,v_0)) = F((1,2),(3,5)) = (0,0)$ também é satisfeitapor hipótese. Por último, devemos verificar se $F_Y(X_0,Y_0) = F_{(u,v)}((x_0,y_0),(u_0,v_0)) = F_{(u,v)}((1,2),(3,5))$ é inversível. Observe que

$$F'(1,2,3,5) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix},$$

onde todas as derivadas parciais são avaliadas em temos que $(1,2,3,5)$. Desta forma, temos que

$$F_{(u,v)}((1,2),(3,5)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $F_{(u,v)}((1,2),(3,5))$ é inversível, pois seu determinante é diferente de zero. Desta forma, como satisfizemos as três condições do Teorema da Função Implícita, temos que num aberto $N \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo $(x_0,y_0) = (1,2)$, existe uma função de classe C^1, $g : N \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, tal que $(3,5) = (u_0,v_0) = g(x_0,y_0) = g(1,2)$ e $F((x,y), g(x,y)) = g((x,y),(u(x,y),v(x,y))) = (0,0) \;\; \forall \;\; (x,y) \in N.$
Portanto, temos que existe uma vizinhança do ponto $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,2,3,5)$, tal que u e v podem ser escritas em função de (x,y).

b) Adaptando a fórmula apresentada no Teorema da Função Implícita, para este caso em particular, temos que

$$\begin{aligned}
g'(X_0) &= g'(x_0, y_0) \\
&= g'(1,2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,2) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,2) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,2) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix} \\
&= -\left(F_Y(X_0, g(X_0))\right)^{-1} F_X(X_0, g(X_0)) \\
&= -\left(F_{(u,v)}((x_0, y_0), g(x_0, y_0))\right)^{-1} F_{(x,y)}((x_0, y_0), g(x_0, y_0)) \\
&= -\left(F_{(u,v)}((1,2),(3,5))\right)^{-1} F_{(x,y)}((1,2),(3,5)).
\end{aligned}$$

Como

$$F_X(X, g(X)) = F_{(x,y)}((x,y),(u,v)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

segue que

$$g'(1,2) = -\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Sabemos que a melhor transformação afim que aproxima g numa vizinhança de $X_0 = (x_0, y_0) = (1,2)$ é dada por

$$L(x,y) = g(1,2) + g'(1,2). \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 14.4.5: Mostre que numa vizinhança do ponto $(0,0)$, a equação $x^9 - y^3 = 0$ define uma única função diferenciável $y = g(x)$. Use este exemplo para verificar que a condição (ii) do Teorema da Função Implícita não é necessária para que a equação $F(X,Y) = 0$ defina uma única função diferenciável f tal que $Y_0 = g(X_0)$.