PARTE 1

FUNÇÕES VETORIAIS

1.1 Introdução

Em Cálculo 1, trabalhamos com funções reais de uma variável real, i.e. funções da forma

$$\begin{array}{rcccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$$

Como exemplo de funções reais de uma variável real, podemos citar $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Em Cálculo 2B trabalharemos com funções mais gerais, que são as *funções vetoriais de várias variáveis reais*, as quais estão definidas na próxima seção.

1.2 Funções Vetoriais

DEFINIÇÃO 1.2.1: Dado um conjunto $Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, uma *função vetorial F de n variáveis reais* é uma correspondência, $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que a cada ponto $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(F)$, associa um e apenas um $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^m$. Como de costume, o conjunto $Dom(F)$ é chamado de *domínio* da função F.

No caso de funções vetoriais $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, temos que existem, e são únicas, m funções reais de n variáveis reais, $f_i : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, tais que para todo $X \in Dom(F)$,

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)).$$

Estas funções são chamadas de *funções coordenadas de F* ou *funções componentes de F*. Desta forma, representamos a função F como

$$\begin{array}{rcccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & & X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)). \end{array}$$

Como exemplo de função vetorial de uma variável real podemos citar $F(t) = (\cos t\,,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$ e como exemplo de função vetorial de várias variáveis reais, podemos citar $F(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\,,\ xy\,,\ x+y\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Observação 1.2.1: Um ponto ou vetor $X \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado tanto na horizontal quanto na vertical. Isto é, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ou $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Em relação ao domínio da função F temos um importante comentário a fazer. Continuaremos aqui abusando da linguagem, tal como fizemos em Cálculo 1. Isto é, quando a função F for dada por sua expressão e fizermos a pergunta: *"qual é o domínio da função F?"* Estaremos de fato perguntando: *"qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no qual F está bem definida?"*, ou seja, *"qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no qual todas as m expressões dadas por $f_i(X)$, $i = 1, ..., m$, estão bem definidas?"* Desta forma, podemos ver que chamando de D_i o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no qual a expressão dada por $f_i(X)$ está bem definida, o domínio da função F é a interseção de todos os D_i, $i = 1, ..., m$, i.e. $Dom(F) = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$. Confira os exemplos abaixo.

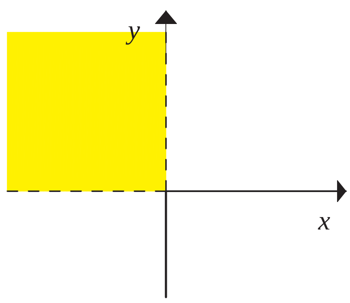
Exemplo 1.2.1: Determine e esboce o domínio da função

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{-x}}\right).$$

Solução: Neste caso, temos que $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ e $f_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$. Portanto, $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0\}$, de modo que

$$Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1, y > 0 \ \text{ e } \ x < 0\}.$$

Na figura ao lado temos um esboço de $Dom(F)$ (em amarelo).



♡

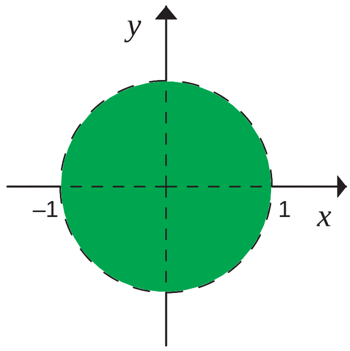
Exemplo 1.2.2: Determine e esboce o domínio da função

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

Solução: Neste caso, temos que $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$, $f_2(x,y) = \dfrac{x}{y}$ e $f_3(x,y) = \dfrac{y}{x}$. Portanto, $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$ e $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$, de modo que

$$Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1, y \neq 0 \text{ e } x \neq 0\}.$$

Na figura ao lado temos um esboço de $Dom(F)$ (em verde).



♡

A seguir apresentamos os conceitos de *imagem*, *gráfico* e *conjunto de nível* de funções vetoriais de várias variáveis reais.

Dada a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos os seguintes conjuntos

- Imagem de F: $Im(F) = \{F(X) \in \mathbb{R}^m \,|\, X \in Dom(F)\}$.
- Gráfico de F: $G(F) = \{(X, F(X)) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, X \in Dom(F)\}$.
- Conjunto de Nível K de F: dado $K \in Im(F)$,
  $C_K(F) = \{X \in Dom(F) \,|\, F(X) = K\}$.

Observação 1.2.2: Em Cálculo I, a visualização dos gráficos ajudavam em muito a compreensão das funções reais de uma variável real, que eram nossa matéria prima. Em tempo, lembre-se que dada uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seu gráfico é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in Dom(f)\}$. Aqui em Cálculo 2, a visualização deste conjunto de pares ordenados $(X, F(X))$, $X \in Dom(F)$, que constituem o gráfico da função F, continuarão de grande valia para um melhor entendimento das funções. Entretanto, vale a pena ressaltar que tal visualização apenas será possível se $n + m \leq 3$.

Observação 1.2.3: Em Cálculo I, não fazia sentido esboçar nem domínio, nem imagem de função reais de uma variável real, pois tais conjuntos seriam simplesmente subconjuntos da reta. Aqui em Cálculo 2B, além de esboçar o domínio (nos casos em que $n \geq 2$, como nos Exemplos 1.2.1 e 1.2.2 anteriores), vamos ter interesse em esboçar imagens (nos casos em que $m \geq 2$, como nos Exemplos 1.2.3 e 1.2.6 a seguir) e conjuntos de nível (nos casos em que $n \geq 2$, como no Exemplo 1.2.5 a seguir).

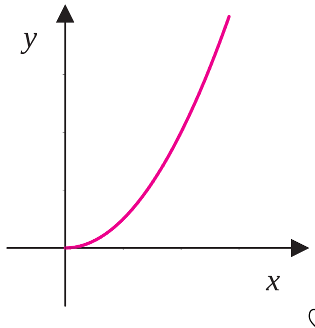
Agora faremos alguns exemplos utilizando os conceitos vistos anteriormente.

Exemplo 1.2.3: Determine e esboce a imagem da função $F(t) = (t, t^2)$, $t \geq 0$.

Solução: Temos que a imagem de F é o conjunto

$$Im(F) = \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$

Observe que $x = t$ e $y = t^2$, de modo que a imagem da função F é a parte da parábola $y = x^2$, com $x \geq 0$ (figura ao lado).



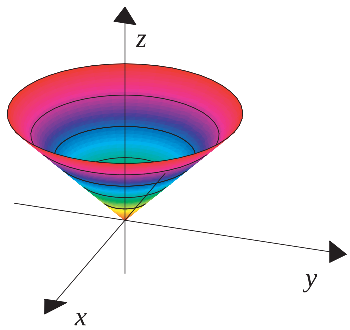
♡

Exemplo 1.2.4: Determine e esboce o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução: Temos que o gráfico de f é o conjunto

$$G(f) = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Observe que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que o gráfico da função f é o semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z \geq 0$ (figura ao lado).



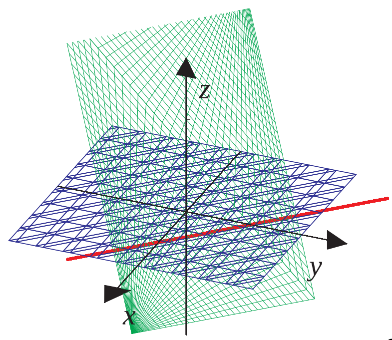
♡

Exemplo 1.2.5: Determine e esboce o conjunto de nível (1,0) da função $F(x, y, z) = (x + y + z\,,\, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solução: Temos que conjunto de nível (1,0) de F é o conjunto

$$C_{(1,0)}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z = 1 \ \text{ e } \ z = 0\},$$

que consiste da interseção do plano $x + y + z = 1$, com o plano $z = 0$, o que fornece a reta $x + y = 1$ no plano xy. o conjunto de nível $(1, 0)$ de F está esboçado na figura ao lado.



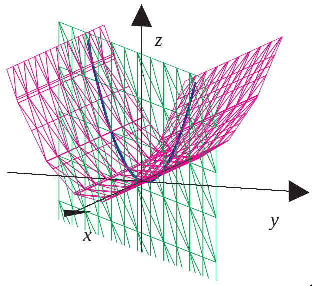
♡

Exemplo 1.2.6: Determine e esboce o gráfico da função $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Temos que o gráfico de F é o conjunto

$$G(F) = \{(t, t, t^2) \in \mathbb{R}^3 \mid \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que $x = t$, $y = t$ e $z = t^2$, de modo que o gráfico da função F é a interseção do plano $x = y$ com o cilindro $z = y^2$ (ou $z = x^2$) (figura ao lado).



♡

Exemplo 1.2.7: Determine e esboce a imagem da função $F(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Temos que a imagem de F é o conjunto dado por

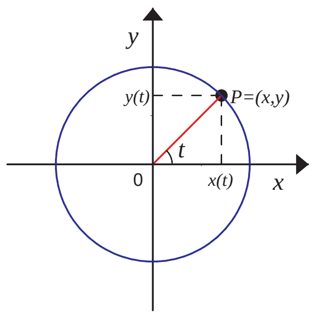
$$Im(F) = \{(\cos t,\ \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Para esboçar este conjunto, observe inicialmente que como $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \operatorname{sen} t$, temos que $x^2(t) + y^2(t) = 1$. Portanto, todos os pontos da imagem desta função estão contidos na circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Agora veremos que as equações acima representam não apenas alguns pontos da circunferência, mas sim todos os pontos da mesma.

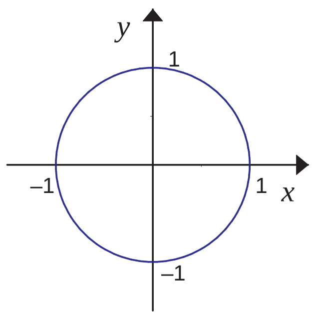
De fato, considere a circunferência de raio 1 e centro na origem esboçada ao lado. Neste caso, é fácil ver que

$$\begin{cases} x = x(t) = \cos t, \\ & t \in [0, 2\pi], \\ y = y(t) = \operatorname{sen} t, \end{cases}$$

onde t é o ângulo central indicado. Observe que quando t varia de 0 a 2π, o ponto $P = (x, y)$ parte do ponto $(1, 0)$ e completa a volta ao longo da circunferência no sentido anti-horário.



Concluimos portanto que a imagem desta função é precisamente a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ (figura ao lado).

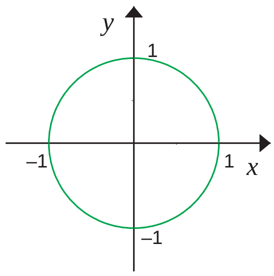


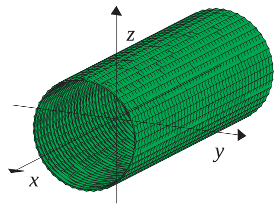
Exemplo 1.2.8: Esboce o gráfico da função $F(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Temos que o gráfico de F é o conjunto dado por

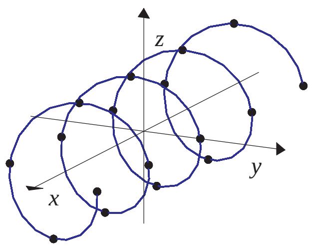
$$Im(F) = \{(t, \cos t,\ \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Para esboçar este conjunto, observe inicialmente que sendo $y(t) = \cos t$ e $z(t) = \operatorname{sen} t$, temos do Exemplo 1.2.6 acima, que $y^2(t) + z^2(t) = 1$. Ou seja, a projeção do gráfico de F, no plano yz, é a circunferência de raio 1 e centro na origem (figura abaixo à esquerda). Desta forma, temos que as coordenadas y e z do gráfico da função F estão contidas no cilindro circular reto $y^2 + z^2 = 1$ (figura abaixo à direita).





Além disto, a variável x vai aumentando conforme o valor de t vai crescendo, pois $x = t$. Desta forma, temos como gráfico desta função, uma curva que faz uma espiral para frente, conforme o valor de t aumenta. Esta curva, semelhante a uma mola espiral, é chamada de *hélice*.



♡

Veremos agora exemplos que mostram que um mesmo conjunto pode ser apresentado como imagem de uma função, ou como gráfico de outra função, ou ainda, como conjunto de nível de uma terceira função.

Exemplo 1.2.9: Determine o gráfico da função

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x^2 + y^2. \end{array}$$

Solução: Temos que o gráfico de f é o conjunto

$$G(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Note que $z = x^2 + y^2$, de modo que o gráfico da função f é o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

♡

Exemplo 1.2.10: Determine a imagem da função

$$\begin{array}{rccc} H & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = (x, y, x^2 + y^2). \end{array}$$

Solução: Temos que a imagem de H é o conjunto

$$Im(H) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Novamente vemos que $z = x^2+y^2$, de modo que a imagem da função H é o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

♡

Exemplo 1.2.11: Determine o conjunto de nível 0 da função

$$\begin{array}{rccl} g \ : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & g(x, y, z) = z - (x^2 + y^2). \end{array}$$

Solução: Temos que conjunto de nível 0 de g é o conjunto

$$C_0(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ z = x^2 + y^2\},$$

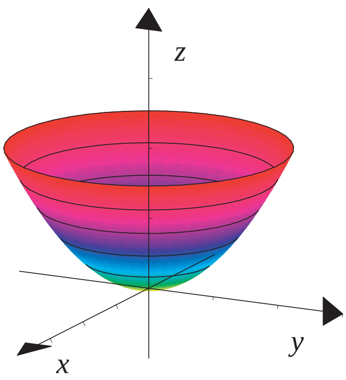
que equivale a

$$C_0(g) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

que também fornece o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

♡

Observe que nos três exemplos acima, o conjunto pedido era dado pelo parabolóide $z = x^2+y^2$, esboçado ao lado. Compare esta observação com as definições apresentadas abaixo.



DEFINIÇÃO 1.2.2:

• Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ está definido *explicitamente* se S é o gráfico em $\mathbb{R}^{n+m}$ de uma função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

• Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ está definido *parametricamente* se S é a imagem em $\mathbb{R}^m$ de uma função $H : Dom(H) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

• Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ está definido *implicitamente* se S é o conjunto de nível em $\mathbb{R}^{n+m}$ de uma função $G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Na próxima aula, vamos falar de funções vetoriais de uma variável real e veremos mais exemplos de identificação e esboço de imagens. Já na terceira aula, vamos falar de funções reais de várias variáveis reais, de modo que veremos mais exemplos de identificação e esboço de domínios, conjuntos de nível e gráficos.

1.3 Exercícios

Exercício 1.3.1: Descreva o conjunto S, onde S é a parábola $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ de forma explícita, implícita e paramétrica.

Resposta: Forma explícita: S é o gráfico da função f

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = x^2, \end{array}$$

isto é,

$$S = G(f) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Forma implícita: S é o conjunto de nível zero da função g

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = y - x^2, \end{array}$$

isto é,

$$S = C_0(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 = 0\}.$$

Forma paramétrica: S é a imagem da função F

$$\begin{array}{rcccc} F & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & F(t) = (t, t^2), \end{array}$$

isto é,

$$S = Im(F) = \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 1.3.2: Responda cada um dos itens a seguir.

a) Defina uma função f_1 cujo conjunto de nível 0 é a parábola $y = x^2$ em $\mathbb{R}^2$.

b) Defina uma função f_2 cujo conjunto de nível 0 é o cilindro parabólico $y = x^2$ em $\mathbb{R}^3$.

c) Determine e esboce o domínio e a imagem da função $f_3(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right)$.

d) Determine uma função f_4 tal que seu gráfico é a imagem da função f_3 do item (c).

Resposta:

a)

$$\begin{array}{rcccc} f_1 & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = y - x^2, \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcccc} f_2 & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = y - x^2, \end{array}$$

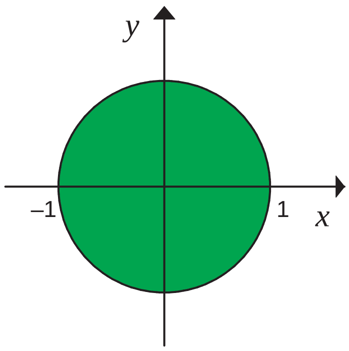
c) Temos que o domínio de f_3 é o conjunto

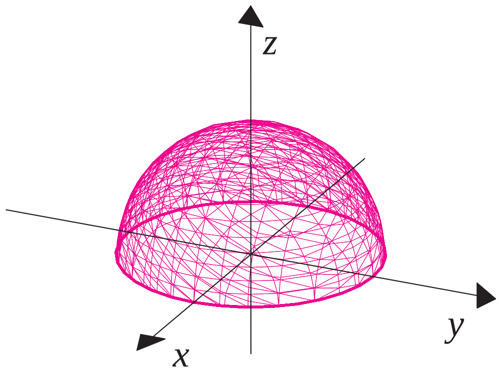
$$\begin{aligned} Dom(f_3) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1-(x^2+y^2) \geq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

O domínio de f_3 é portanto a circunferência de centro na origem e raio igual a 1 e seu interior (figura abaixo à esquerda).
A imagem de f_3 é o conjunto

$$Im(f_3) = \left\{ \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

A imagem de f_3 é portanto a semi-esfera de centro na origem e raio igual a 1, com $z \geq 0$ (figura abaixo à direita).





d)

$$\begin{array}{rcccl} f_4 & : & Dom(f_4) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}, \end{array}$$

onde $Dom(f_4) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$. Observe que de fato,

$$G(f_4) = \{\left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

♡