PARTE 2

FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

2.1 Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Vamos agora tratar de um caso particular de funções vetoriais $F : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que são as funções vetoriais de uma variável real. Neste caso, temos que $n = 1$, i.e. o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2.1.1: Dado um conjunto $Dom(F) \subseteq \mathbb{R}$, uma *função vetorial F de uma variável real* é uma correspondência, $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, que a cada ponto $t \in Dom(F)$, associa um e apenas um $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo 2.1.1: Abaixo temos exemplos de funções vetoriais de uma variável real, com $m = 2$ ((a) e (c)) e $m = 3$ ((b) e (d)).
a) $F_1(t) = (2t, 4t)$, $t \geq 0$.
b) $F_2(t) = (t, 2t, 4t)$, $t \geq 0$.
c) $F_3(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
d) $F_4(t) = (\cos t,\ \mathrm{sen}\, t, t)$, $t \geq 0$.

2.2 Operações com Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Definiremos a seguir as usuais operações de soma, diferença, e produto por escalar entre funções vetoriais, da mesma forma que fizemos para funções reais. Além disso, definiremos novas operações, conforme pode ser visto na definição a seguir.

DEFINIÇÃO 2.2.1: Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a constante $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, definimos as seguintes funções:

a) a função $F + G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *soma de F e G*, dada por

$$(F+G)(t) = F(t) + G(t), \forall\, t \in D;$$

b) a função $F - G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *diferença entre F e G*, dada por

$$(F-G)(t) = F(t) - G(t), \forall\, t \in D;$$

c) a função $kF : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela constante k*, dada por

$$(kF)(t) = kF(t), \forall\, t \in D;$$

d) a função $fF : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela função escalar f*, dada por

$$(fF)(t) = f(t)F(t), \forall\, t \in D;$$

e) se $f(t) \neq 0$, $\forall t \in D$, a função $\dfrac{F}{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *quociente de F pela função escalar f*, dada por

$$\left(\frac{F}{f}\right)(t) = \frac{F(t)}{f(t)}, \forall\, t \in D;$$

f) a função $F.G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada de *produto escalar de F e G*, dada por

$$(F.G)(t) = F(t).G(t), \forall\, t \in D;$$

g) se $m = 3$, a função $F \times G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, chamada de *produto vetorial de F e G*, dada por

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t), \forall\, t \in D.$$

Exemplo 2.2.1: Sabendo que $f(t) = \operatorname{sen} t$, $F(t) = (t, e^t, t^2)$ e $G(t) = (t, 1, t^3)$, calcule:

(a) $F + G$ (b) $2F$ (c) fF (d) $F.G$ (e) $F \times G$.

Solução:

a) $(F+G)(t) = F(t) + G(t) = (t, e^t, t^2) + (t, 1, t^3) = (2t, 1 + e^t, t^2 + t^3)$;
b) $(2F)(t) = 2F(t) = 2(t, e^t, t^2) = (2t, 2e^t, 2t^2)$;
c) $(fF)(t) = f(t)F(t) = \operatorname{sen} t\,(t, e^t, t^2) = (t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t, t^2 \operatorname{sen} t)$;
d) $(F.G)(t) = F(t).G(t) = (t, e^t, t^2).(t, 1, t^3) = t^2 + e^t + t^5$;
e) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & e^t & t^2 \\ t & 1 & t^3 \end{vmatrix} = (t^3e^t - t^2, t^3 - t^4, t - te^t)$.

♡

2.3 Cálculo com Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Veremos agora os conceito de limite, continuidade e derivada de funções vetoriais de uma variável real. Iniciaremos com a definição de limite. A noção limite de funções vetoriais de uma variável real naturalmente conserva a idéia de limite vista em Cálculo 1, onde apenas é preciso fazer o devido ajuste das distâncias envolvidas. Lembre-se que se $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ são dois vetores em $\mathbb{R}^m$, a distância entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é dada por

$$||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_m - u_m)^2},$$

onde a função $||\,.\,|| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*. Observe ainda que

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_m^2} = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}.$$

No que se segue, vamos supor que D é um intervalo ou uma união finita de intervalos.

DEFINIÇÃO 2.3.1: (Limite) Seja F a função vetorial $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Suponha que F está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto possivelmente no próprio ponto $t = t_0$). Dizemos que $F(t)$ *tende a* L, $L \in \mathbb{R}$, *quando* t *tende a* t_0, cuja notação é $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow ||F(t) - L|| < \varepsilon.$$

Observe que para $F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t))$ e $L = (l_1, ..., l_m)$, temos que

$$||F(t) - L|| = \sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2 + ... + (f_m(t) - l_m)^2}.$$

Sendo assim, é fácil verificar que $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = L$ se e somente se $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = l_i$, para todo $i = 1, ..., m$. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 2.3.1: Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rccl} F & : & D \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)). \end{array}$$

e seja $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$. Suponha que F está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto possivelmente no próprio ponto $t = t_0$). Então, temos que

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i, \quad i = 1, ...m.$$

Portanto, pelo teorema acima, temos que

" O limite de F, quando t tende a t_0, existe e é igual a $L = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ se e somente se o limite de todas as suas funções coordenadas f_i, $i = 1, ...m$, quando t tende a t_0, existem e são iguais a l_i, $i = 1, ...m$, respectivamente."

Exemplo 2.3.1: Calcule $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, \dfrac{1-\cos t}{t}\right)$.

Solução: De acordo com o teorema anterior, como $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ e $\lim_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, \frac{1-\cos t}{t}\right) &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}, \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\right)\\ &= (1,0)\,.\end{aligned}$$

$\heartsuit$

As propriedades de limite conhecidas continuam válidas, acrescidas agora de propriedades envolvendo os produtos escalar e vetorial e a norma em $\mathbb{R}^m$ (em lugar do módulo).

TEOREMA 2.3.2: (Propriedades de Limite) Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$, $\lim_{t\to t_0} G(t) = M$ e $\lim_{t\to t_0} f(t) = k$. Neste caso, temos que

a) $\lim_{t\to t_0}(F \pm G)(t) = L \pm M$
b) $\lim_{t\to t_0}(fF)(t) = kL$
c) $\lim_{t\to t_0}\left(\dfrac{F}{f}\right)(t) = \dfrac{L}{k}$, se $k \neq 0$
d) $\lim_{t\to t_0} ||F(t)|| = ||L||$
e) $\lim_{t\to t_0}(F.G)(t) = L.M$
f) caso $m = 3$, $\lim_{t\to t_0}(F \times G)(t) = L \times M$

Observação 2.3.1: Caso o ponto $t_0 \in D$ seja um extremo de intervalo, temos os conceitos de *limites laterais*, cujas definições são adaptações naturais da Definição 2.3.1 e cujas notações são as usuais. Além disso, os Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 permanecem válidos se $t_0 \in D$ for um extremo de intervalo.

Vejamos agora os conceito de continuidade de funções vetoriais de uma variável real.

DEFINIÇÃO 2.3.2: (Continuidade) Seja F a função vetorial $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq D$. Dizemos que F é *contínua no ponto* t_0, se

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Observação 2.3.2: Caso o ponto $t_0 \in D$ seja um extremo de intervalo, o limite utilizado é um limite lateral apropriado.

Observe que de acordo com o Teorema 2.3.1, temos que

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0) \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} f_i(t) = f_i(t_0), \quad i = 1, ..., m.$$

Sendo assim, temos que

" F é contínua em t_0 se e somente se todas as suas funções coordenadas são contínuas em t_0."

Dizemos ainda que F é *contínua em um intervalo* $B \subset D$ se F é contínua para todo $t \in B$ e dizemos simplesmente que F é *contínua* se F é contínua para todo t em seu domínio.

Podemos agora definir formalmente o que se entende em matemática por uma *curva*, que, de uma certa forma, reflete a nossa noção intuitiva. Confira a definição abaixo.

DEFINIÇÃO 2.3.3: (Curva) Considere a função vetorial $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, onde I é um intervalo da reta. Se F é uma função contínua, chamamos sua imagem de *curva*.

Em outras palavras, temos que

" curva é a imagem de uma função vetorial contínua definida em um intervalo."

Observação 2.3.3: Quando estivermos nos referindo a uma curva C em $\mathbb{R}^m$, imagem da função (contínua) $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, diremos que C é uma curva *parametrizada* pela função F ou que F é uma *parametrização* para C.

Observação 2.3.4: Nem todo autor define curva da forma que fizemos. Em alguns livros, curva é definida como a própria função vetorial contínua $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e sua imagem C é chamada de *traço* da curva. Optamos por definir da forma que fizemos para o conceito coincidir com nossa noção intuitiva.

Vamos agora passar ao conceito de derivada.

DEFINIÇÃO 2.3.4: (Derivada) Considere a função $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq D$. Dizemos que F é *derivável em* t_0, se

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}$$

existe. Neste caso, definimos a *derivada de* F *em* t_0, denotada por $F'(t_0)$ ou $\dfrac{dF}{dt}(t_0)$, como sendo o valor deste limite.

Observe que, pelo Teorema 2.3.1, temos que

" F é derivável em t_0 se e somente se suas funções coordenadas são deriváveis em t_0 e, neste caso,

$$F'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_m'(t_0)).\text{"}$$

Exemplo 2.3.2: Calcule a derivada de F em $t_0 = 1$, onde $F(t) = (3t^2, \operatorname{sen} t^3, e^{t^2})$.

Solução: Conforme observado acima, como todas as três funções coordenadas de F são deriváveis para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} F'(1) &= \left((3t^2)'\big|_1 , (\operatorname{sen} t^3)'\big|_1 , (e^{t^2})'\Big|_1 \right) \\ &= \left(6t\big|_1 , 3t^2 \cos t^3\big|_1 , 2t\, e^{t^2}\Big|_1 \right) \\ &= (6 , 3\cos 1 , 2e) . \end{aligned}$$

♡

Vamos agora às propriedades da derivada.

TEOREMA 2.3.3: (Propriedades da Derivada) Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, todas diferenciáveis em $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq D$. Neste caso, temos que

a) $(aF \pm bG)'(t_0) = aF'(t_0) \pm bG'(t_0)$, $a, b \in \mathbb{R}$
b) $(fF)'(t_0) = f'(t_0)F(t_0) + f(t_0)F'(t_0)$
c) $(F.G)'(t_0) = F'(t_0).G(t_0) + F(t_0).G'(t_0)$
d) caso $m = 3$, $(F \times G)'(t_0) = F'(t_0) \times G(t_0) + F(t_0) \times G'(t_0)$

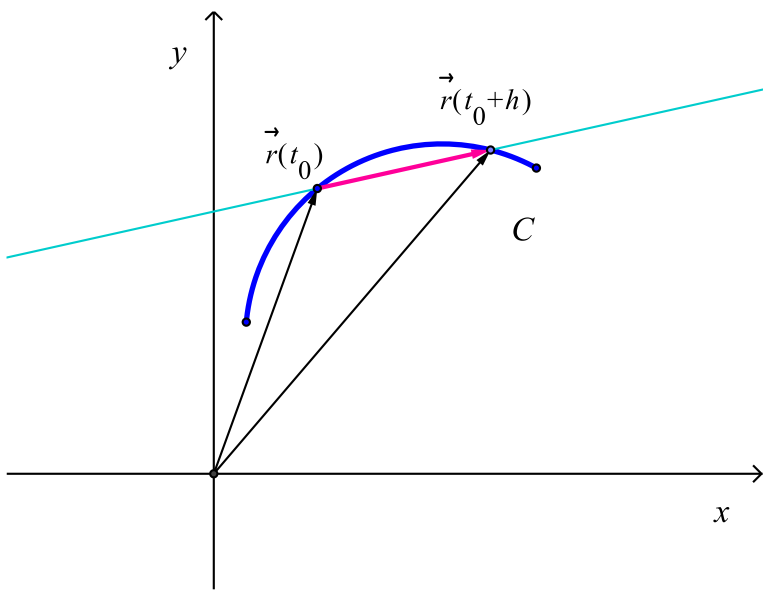
e) $||F(t_0)||' = \left(\sqrt{F(t_0).F(t_0)}\right)' = \dfrac{F(t_0).F'(t_0)}{||F(t_0)||}$

Observação 2.3.6: Caso o ponto $t_0 \in D$ seja um extremo de intervalo, temos os conceitos de *derivadas laterais*, cujas definições são adaptações naturais da Definição 2.3.4 e cujas notações são as usuais. Além disso, o Teorema 2.3.3 permanece válido se $t_0 \in D$ for um extremo de intervalo.

Dizemos ainda que a função $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* ou *derivável* se F é diferenciável para todo $t_0 \in D$.

2.4 Interpretação Geométrica da Derivada

Considere o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e um ponto t_0 pertence ao interior do intervalo I. Seja C uma curva no plano parametrizada pela função contínua e injetora $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, diferenciável em t_0. Em outras palavras, C é a curva imagem da função $\vec{r}$, onde $\vec{r}$ é diferenciável em t_0. Considere agora dois pontos P e Q em C, cujos vetores posição são, respectivamente, $\vec{r}\,(t_0)$ e $\vec{r}\,(t_0+h)$. Neste caso, $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\vec{r}\,(t_0+h) - \vec{r}\,(t_0)$, que é um vetor sobre a reta secante à curva C que contém os pontos P e Q (figura abaixo). Observe que se $h > 0$, o vetor $\dfrac{\vec{r}\,(t_0+h) - \vec{r}\,(t_0)}{h}$, que é um múltiplo escalar do vetor $\vec{r}\,(t_0+h) - \vec{r}\,(t_0)$, possui a mesma direção e sentido deste vetor. Ao fazermos $h \to 0$, observamos que este vetor se aproxima de um vetor sobre a reta tangente à curva C no ponto P. Por esta razão, $\vec{r}\,'(t_0)$ é chamado de *vetor tangente* à curva C, parametrizada por $\vec{r}$, no ponto P. Confira a definição abaixo.



DEFINIÇÃO 2.4.1: (Vetor tangente unitário) Seja $\vec{r}$ é uma função contínua e injetora. Dado um ponto $\vec{r}\,(t_0) \in C$, se $\vec{r}\,'(t_0)$ existe e é não-nulo, definimos o vetor $\vec{t}$, dado por $\vec{t}\,(t_0) = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{||\vec{r}\,'(t_0)||}$, como o *vetor unitário tangente* à curva C, parametrizada por $\vec{r}$, no ponto $\vec{r}\,(t_0)$.

DEFINIÇÃO 2.4.2: (Reta tangente) Seja $\vec{r}$ é uma função contínua e injetora. Dado um ponto $\vec{r}\,(t_0) \in C$, se $\vec{r}\,'(t_0)$ existe e é não-nulo, a equação paramétrica da reta tangente à curva C no ponto $\vec{r}\,(t_0)$ é dada por

$$(x, y) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.4.1: Determine a reta tangente à curva C parametrizada por $\vec{r}$, onde $\vec{r}\,(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, no ponto (0,1).

Solução: Conforme visto, a reta tangente à curva C parametrizada pela função $\vec{r}$, no ponto $\vec{r}\,(t_0)$, é dada por

$$(x, y) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

se $\vec{r}\,'(t_0)$ não é nulo. No caso, temos que $\vec{r}\,'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, de modo que $||\vec{r}\,'(t)|| \neq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Além disso, temos que o ponto (0,1) corresponde a $\vec{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. De fato, resolver a igualdade $\vec{r}\,(t_0) = (0, 1)$, corresponde a resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t_0) = \cos t_0 & = & 0 \\ & & \\ y(t_0) = \operatorname{sen} t_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad t_0 \in [0, 2\pi],$$

cuja solução é $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Sendo assim, temos que

$$\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0).$$

Portanto, a equação da reta tangente pedida é dada por

$$(x, y) = (0, 1) + \lambda(-1, 0),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

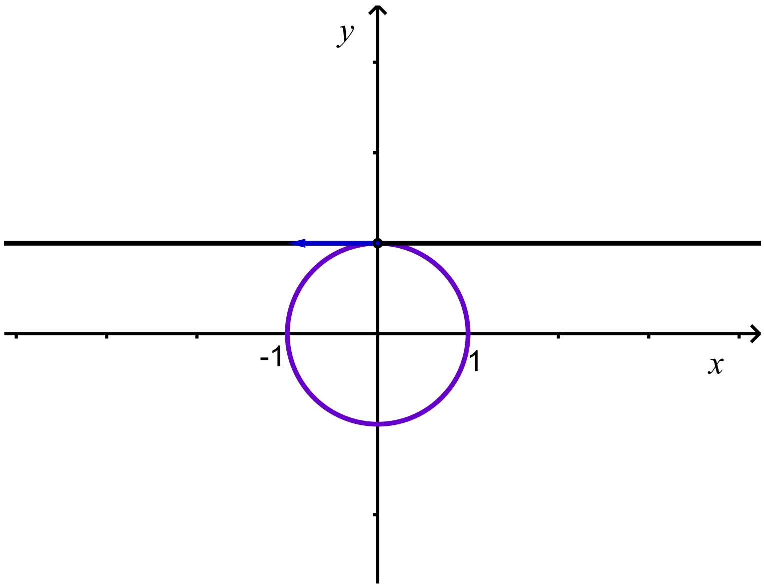
isto é,

$$(x, y) = (-\lambda, 1),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

o que corresponde à reta

$$y = 1.$$

Observe que $\vec{r}$ só deixa de ser injetora nos pontos $t_0 = 0$ e $t_1 = 2\pi$, pois $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (1, 0)$, que não é o ponto em questão no problema. Entretanto, só por curiosidade, observe que a derivada à direita de $\vec{r}$ no ponto $t_0 = 0$ e a derivada à esquerda de $\vec{r}$ no ponto $t_1 = 2\pi$ são ambas iguais a $(0, 1)$.



♡

Observação 2.4.1: Nas definições anteriores, pedimos que a parametrização $\vec{r}$ fosse injetora, pois, caso contrário, um ponto P na curva C poderia corresponder a dois pontos t_1 e t_2 distintos, o que poderia gerar inconsistência, como por exemplo, dois vetores tangentes de direções diferentes. Com a exigência da injetividade de $\vec{r}$, dado um ponto P na curva C, temos que a equação $\vec{r}(t_0) = P$ fornece uma única solução para t_0.

Observação 2.4.2: Se C é uma curva no espaço parametrizada pela função $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, tanto a interpretação geométrica como as definições anteriores continuam procedentes, apenas com a alteração de que na equação da reta tangente deve-se incluir a coordenada z, i.e.

$$(x, y, z) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

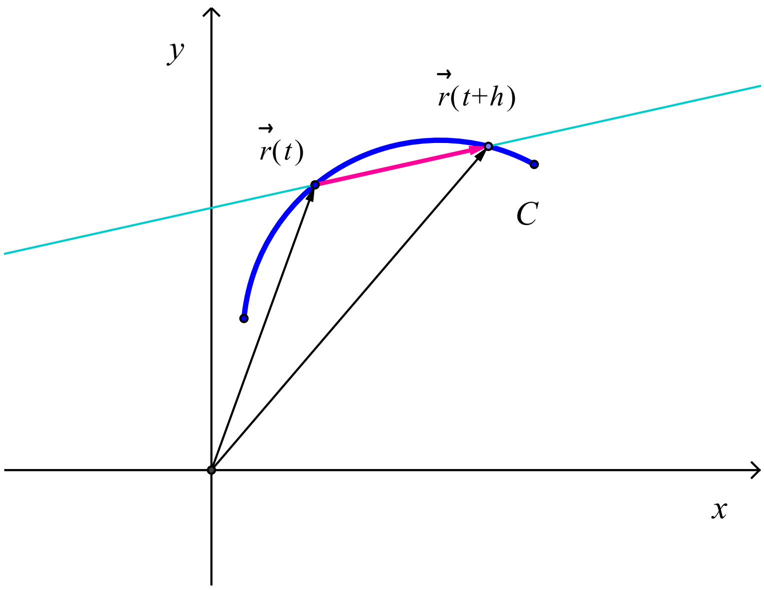
2.5 Interpretação Física da Derivada

Uma razão para escolher especificamente $\vec{r}\,'(t)$ como o vetor tangente, ao invés de um múltiplo dele, é que muitas vezes vamos considerar o parâmetro t como a variável tempo e $\vec{r}\,(t)$ como sendo a representação da trajetória de uma partícula que se desloca no espaço ou no plano. Com esta interpretação, $||\vec{r}\,'(t)||$ é a definição natural de velocidade do movimento ao longo da trajetória C descrita por $\vec{r}\,(t)$ quando t varia. O termo "velocidade" se deve ao fato de que, para h pequeno, tem-se que $\dfrac{||\vec{r}\,(t) - \vec{r}\,(t+h)||}{|h|}$ é aproximadamente a taxa média de distância percorrida sobre o intervalo de t a $t + h$

(figura abaixo). Além do mais, é fácil mostrar que se $\vec{r}\,'(t)$ existe,

$$\lim_{h\to 0}\frac{||\vec{r}\,(t+h)-\vec{r}\,(t)||}{|h|}=||\vec{r}\,'(t)||.$$

Sendo assim, $||\vec{r}\,'(t)||$ é o limite das taxas médias sobre intervalos de tempo arbitrariamente pequenos. Desta forma, a função real v definida por $v(t)=||\vec{r}\,'(t)||$ é chamada de *velocidade escalar*, e o vetor $\vec{v}$, definido por $\vec{v}\,(t)=\vec{r}\,'(t)$, é chamado de *vetor velocidade* no ponto $\vec{r}\,(t)$.



Da mesma forma, se $\vec{v}\,(t)$ é derivável, definimos $\vec{a}\,(t)=\vec{v}\,'(t)$ como o *vetor aceleração* do movimento e $a(t)=||\vec{a}\,(t)||$ como a *intensidade da aceleração*. Quando $\vec{r}\,(t)$ descreve a trajetória de uma partícula de massa constante m, então $m\vec{a}\,(t)$ é o vetor força que atua sobre a partícula e $ma(t)$ é a intensidade da força que age na partícula.

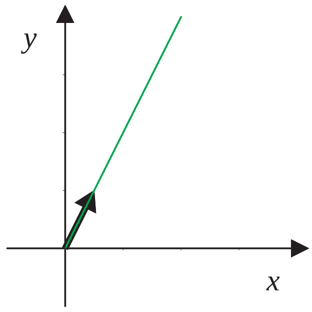
2.6 Exercícios

Exercício 2.6.1: Considere as funções do Exemplo 2.1.1. Determine e esboce (se possível) as imagens e os gráficos destas funções.

Solução:

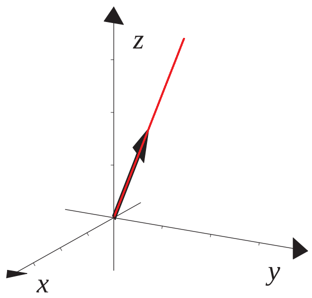
a) Temos que a imagem de F_1 é o conjunto

$$Im(F_1) = \{(2t, 4t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$



Observe que como $x = 2t$ e $y = 4t$, temos que $y(t) = 2x(t)$, $t \geq 0$. Portanto, a imagem desta função é a semi-reta (em $\mathbb{R}^2$) $y = 2x$, $x \geq 0$. Uma outra forma de verificar que trata-se de uma semi-reta, é observar que $F_1(t) = (2t, 4t) = t(2, 4)$, $t \geq 0$. Portanto, a imagem desta função é a semi-reta (em $\mathbb{R}^2$) que contém a origem e é paralela ao vetor $(2, 4)$ (apenas múltiplos positivos deste vetor). A imagem de F_1 está esboçada ao lado.
O gráfico de F_1 é o conjunto

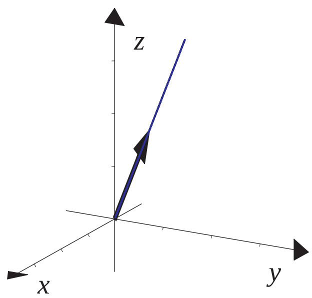
$$G(F_1) = \{(t, 2t, 4t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$



Conforme observado no item anterior, podemos escrever o conjunto de pontos $(t, 2t, 4t)$, $t \geq 0$, como $(t, 2t, 4t) = t(1, 2, 4)$, $t \geq 0$. Portanto, a imagem desta função é a semi-reta (em $\mathbb{R}^3$) que contém a origem e é paralela ao vetor $(1, 2, 4)$ (apenas múltiplos positivos deste vetor). O gráfico de F_1 está esboçado ao lado.

b) Temos que a imagem de F_2 é o conjunto

$$Im(F_2) = \{(t, 2t, 4t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \geq 0\}.$$



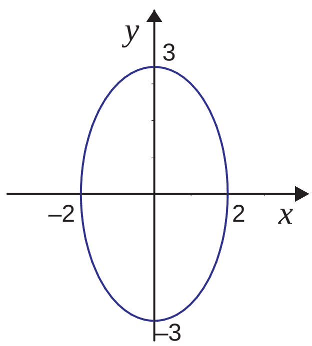
Observe que a *imagem* de F_2 coincide com o *gráfico* de F_1 (figura ao lado).
O gráfico de F_2 é o conjunto

$$G(F_2) = \{(t, t, 2t, 4t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t \geq 0\}.$$

Como o gráfico de F_2 está em $\mathbb{R}^4$, não podemos esboçá-lo.

c) Temos que a imagem de F_3 é o conjunto

$$Im(F_3) = \{(2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

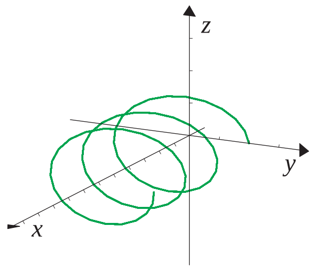


Observe que como $x(t) = 2\cos t$ e $y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t$, $t \in [0, 2\pi]$, temos que $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$. Portanto, todos os pontos da imagem da função F_3 estão contidos na elipse $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$. Não faremos aqui, mas é possível mostrar qua as equações acima representam não apenas alguns pontos desta elipse, mas sim, todos os pontos da mesma (figura ao lado).

O gráfico de F_3 é o conjunto

$$G(F_3) = \{(t, 2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$

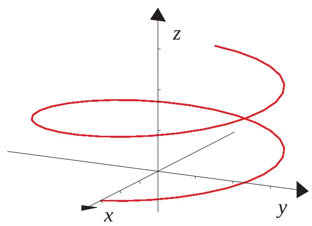
Para esboçar este conjunto, observe inicialmente que sendo $y(t) = 2\cos t$ e $z(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t$, temos, conforme visto acima, que $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$. Ou seja, a projeção do gráfico de F_3, no plano yz, é uma elipse. Desta forma, temos que as coordenadas y e z do gráfico da função F_3 estão contidas no cilindro eliptico reto $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$, $x \geq 0$, pois $x = t \geq 0$. Para finalizar, observe que a variável x vai aumentando conforme o valor de t vai crescendo ($x = t$). Desta forma, temos como gráfico da função F_3 é uma curva que faz uma espiral para frente, conforme o valor de t aumenta. Este exemplo é semelhante ao Exemplo 1.2.8, onde a circunferência é substituida por uma elipse. O gráfico de F_3 está esboçado na figura ao lado.



d) Temos que a imagem de F_4 é o conjunto

$$Im(F_4) = \{(\cos t,\ \mathrm{sen}\,t, t) \in \mathbb{R}^t \,|\, t \geq 0\}.$$

Para esboçar a *imagem* da função F_4, observe que ela é muito semelhante ao *gráfico* da função do Exemplo 1.2.8, onde os pontos da imagem agora pertencem ao cilindro, no plano xy, $x^2(t) + y^2(t) = 1$, $z \geq 0$, pois $z = t \geq 0$.. Portanto, a projeção da imagem da função F_4, no plano xy, é a circuferência de centro na origem e raio igual a um. Além disto, quando o valor de t vai aumentando, a variável z também vai aumentando ($z = t$). Desta forma, temos como imagem da função F_4, uma mola ou hélice na vertical (figura ao lado). O gráfico de F_4 é o conjunto



$$G(F_4) = \{(t, \cos t,\ \mathrm{sen}\,t, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t \geq 0\}.$$

Como o gráfico de F_4 está em $\mathbb{R}^4$, não podemos esboçá-lo.

♡

Exercício 2.6.2: Obtenha a equação da reta tangente à imagem da função $F(t) = (\cos t,\ \mathrm{sen}\,t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, no ponto de sua imagem que corresponde a $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Solução: Observe que quando $t = \dfrac{\pi}{2}$, temos que

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto a equação da reta tangente pedida é igual a

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda F'\left(\frac{\pi}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}\\ &= \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) + \lambda F'\left(\frac{\pi}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Desta forma, devemos encontrar $F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Derivando então F e calculando $F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, encontramos

$$F'(t) = \begin{cases} x(t) = -\operatorname{sen} t \\ y(t) = \cos t \\ z(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 1)$$

A equação desejada é então

$$(x, y, z) = \left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) + \lambda\,(-1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

♡

2.7 Apêndice: Uma Observação Interessante Sobre a Derivada

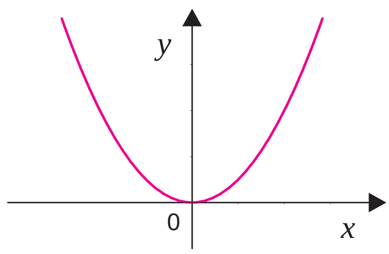
Lembre-se que para uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sua derivada em um ponto x_0 pertencente a um intervalo aberto contido ne domínio de f, se existir, fornece o coeficiente linear da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0)$. Portanto, em Cálculo 1, associávamos a diferenciabilidade de uma função f à suavidade do seu *gráfico*. O que fizemos agora, não foi trabalhar com o gráfico da funções vetoriais de uma variável e sim com sua *imagem*. Vimos uma interpretação geométrica diferente para a derivada de funções vetoriais de uma variável, que é relacionada à sua *imagem*. Portanto, o fato de uma curva, *imagem* de uma função vetorial F, apresentar ou não "bicos", nada mais tem a ver com a diferenciabilidade da funçao vetorial F. Nos dois exemplos abaixo, ilustraremos situações que mostram que não há relação entre a diferenciabilidade de uma função vetorial e sua *imagem* possuir ou não "bicos". No primeiro exemplo temos um caso em que uma curva suave pode tanto ser imagem de uma função diferenciável ou não e, no segundo exemplo, vemos um caso em que uma função diferenciável possui uma imagem com "bicos".

Exemplo 2.7.1: Considere as três funções vetoriais abaixo.

$$F_1(t) = (t, t^2), \quad F_2(t) = (t^3, t^6) \quad \text{e} \quad F_3 = \begin{cases} (t, t^2), & \text{se } t \geq 0 \\ (t^3, t^6), & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Determine e esboce a imagem destas funções e verifique que F_1 e F_2 são diferenciáveis na origem, enquanto que F_3 não é diferenciável na origem.

Solução: Nos três casos acima temos que $y(t) = (x(t))^2$, de modo que a imagem das três funções é a parábola $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (figura ao lado). Quanto à diferenciabilidade destas funções, é fácil ver que



$$F_1'(t) = (1, 2t) \quad \text{e} \quad F_2(t) = (3t^2, 6t^5),$$

de modo que

$$F_1'(0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad F_2'(0) = (0, 0).$$

Observe ainda que tanto F_1 como F_2 são diferenciáveis na origem, mas que só F_1 possui reta tangente na origem (a reta $y = 0$), uma vez que $F_2'(0) = (0, 0)$. Já em relação à função F_3, temos que

$$F_3'(t) = \begin{cases} (1, 2t), & \text{se } t < 0 \\ \nexists, & \text{se } t = 0 \\ (3t^2, 6t^5), & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

pois, o limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{F_3(h) - F_3(0)}{h}$ não existe, uma vez que os limites laterais são diferentes. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{F_3(h) - F_3(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h}{h}, \frac{h^2}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^+} (1, h) = (1, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{F_3(h) - F_3(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{h^3}{h}, \frac{h^6}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^-} \left(h^2, h^5 \right) = (0, 0). \end{aligned}$$

♡

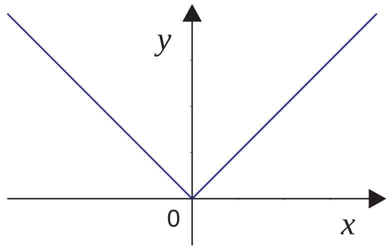
Exemplo 2.7.2: Considere as funções vetoriais

$$G_1(t) = (t, |t|) \quad \text{e } G_2(t) = (t|t|, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine e esboce a imagem destas funções e verifique que G_1 não é diferenciável na origem, enquanto que G_2 é diferenciável na origem.

Solução: Observe que

$$G_2(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2), & \text{se } t < 0 \\ (t^2, t^2), & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$



Deste modo, temos que

$$y(t) = \begin{cases} -x(t), & \text{se } x < 0 \\ x(t), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Portanto, a imagem de G_2 é dada por $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, como $G_1(t) = (t, |t|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, também temos que $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a imagem das duas funções é igual a $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ (figura ao lado). vamos agora estudar a diferenciabilidade destas funções na origem. Quanto à diferenciabilidade da função G_1, observe que

$$G_1'(t) = \begin{cases} (1, -1), & \text{se } t < 0 \\ \nexists, & \text{se } t = 0 \\ (1, 1), & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

pois,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h}{h}, \frac{h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^+} (1, 1) = (1, 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{h}{h}, \frac{-h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^-} (1, -1) = (1, -1). \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h}$, temos que não existe $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h}$, o que significa que G_1 não é diferenciável na origem.

Quanto à diferenciabilidade da função G_2, observe que

$$G_2'(t) = \begin{cases} (-2t, 2t), & \text{se } t < 0 \\ (0, 0), & \text{se } t = 0 \\ (2t, 2t), & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

pois,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{G_2(h) - G_2(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h^2}{h}, \frac{h^2}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^+} (h, h) = (0, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{G_2(h)-G_2(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\left(-\frac{h^2}{h},\frac{h^2}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0^-}(-h,h)=(0,0).\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{G_2(h)-G_2(0)}{h}=(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{G_1(h)-G_1(0)}{h}$, temos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{G_1(h)-G_1(0)}{h}=(0,0)$, o que significa que $G_1'(0)=(0,0)$.

$\heartsuit$