PARTE 3

FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

3.1 Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Vamos agora tratar do segundo caso particular de funções vetoriais de várias variáveis reais, $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que são as funções reais de várias variáveis reais. Neste caso, temos que $m = 1$ e $n \geq 2$, i.e. o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, enquanto que a imagem é um subconjunto da reta .

DEFINIÇÃO 3.1.1: Dado $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, uma *função real f de várias variáveis reais* é uma correspondência, $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que a cada ponto $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(f)$, associa um e apenas um $y = f(X) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.1: Abaixo temos alguns exemplos de funções reais de várias variáveis, com $n = 2$ ((a) e (b)) e $n = 3$ ((c) e (d)).
a) $f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
b) $g(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
c) $h(x, y, z) = x + y + z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
d) $w(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$.

Conforme já mencionado, o conjunto $Dom(f)$ é chamado de *domínio* da função f. Além disso, continuaremos abusando da linguagem, conforme mencionado nas aulas anteriores. Isto é, quando a função f for dada por sua expressão e fizermos a pergunta: *"qual é o domínio da função f?"* Estaremos de fato perguntando: *"qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no qual f está bem definida?"*, ou seja, *"qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no qual a expressão dada por $f(X)$ está bem definida?"*

3.2 Operações com Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Definiremos a seguir as usuais operações de soma, diferença, produto e quociente, da mesma forma que fizemos para funções reais de uma variável.

DEFINIÇÃO 3.2.1: Considere as funções $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e a constante $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, definimos as seguintes funções:

a) a função $f + g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *soma de f e g*, dada por

$$(f+g)(X) = f(X) + g(X), \forall\, X \in D;$$

b) a função $f - g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *diferença entre f e g*, dada por

$$(f-g)(X) = f(X) - g(X), \forall\, X \in D;$$

c) a função $kf : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *produto de f pela constante k*, dada por

$$(kf)(X) = kf(X), \forall\, X \in D;$$

d) a função $fg : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *produto de f pela função g*, dada por

$$(fg)(X) = f(X)g(X), \forall\, X \in D;$$

e) se $g(X) \neq 0$, $\forall X \in D$, a função $\dfrac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *quociente de f pela função g*, dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{f(X)}{g(X)}, \forall\, X \in D.$$

Vamos agora nos concentrar em funções reais de apenas duas variáveis reais.

3.3 Funções Reais de Duas Variáveis Reais

Vamos trabalhar agora apenas com funções reais de duas variáveis reais. Isto é, vamos trabalhar com funções f da forma

$$\begin{array}{rccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y). \end{array}$$

Vamos iniciar identificando e esboçando o domínio de algumas funções de duas variáveis reais.

Exemplo 3.3.1: Determine e esboce o domínio das funções definidas pelas expressões abaixo.

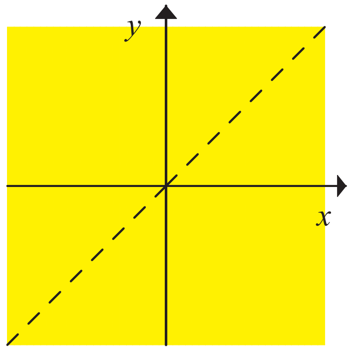
a) $f_1(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.
b) $f_2(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$.
c) $f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
d) $f_4(x,y) = \sqrt{x^2-y^2-1}$.
e) $f_5(x,y) = \dfrac{y}{x-1}$.
f) $f_6(x,y) = \ln(xy-1)$.

Solução:

a) Neste caso, como o termo $x-y$ aparece no denominador da expressão de f_1, devemos ter $x-y \neq 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq x\}.$$

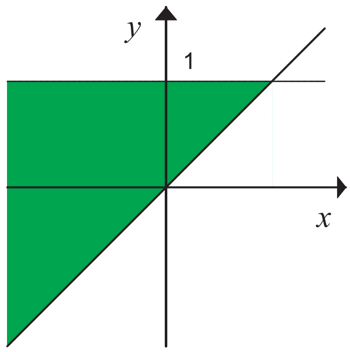
Temos portanto que o domínio da função é todo plano xy, excetuando a reta $y = x$ (figura ao lado).



b) Neste caso, para podermos tirar as duas raizes que aparecem na expressão de f_2, devemos ter $y - x \geq 0$ e $1 - y \geq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x \;\text{ e }\; y \leq 1\}.$$

Ao lado temos um esboço da região determinada pelas retas $y = x$ e $y = 1$.



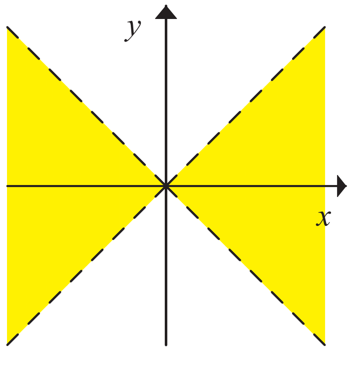
c) Neste caso, para podermos tirar a raiz que aparece na expressão de f_3, devemos ter $x^2 - y^2 \geq 0$. Além disso, como o termo $\sqrt{x^2-y^2}$ está no denominador da função f_3, é necessário ter $x^2 - y^2 \neq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 > 0\}.$$

Como $x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < x^2 \Leftrightarrow |y| < |x| \Leftrightarrow -|x| < y < |x|$, temos que

$$Dom(f_3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -|x| < y < |x|\}.$$

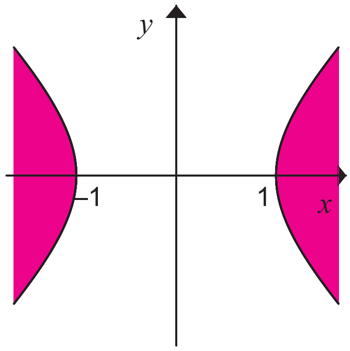
Ao lado temos um esboço do domínio da função f.



d) Neste caso, para podermos tirar a raiz que aparece na expressão de f_4, devemos ter $x^2 - y^2 - 1 \geq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 \geq 1\}.$$

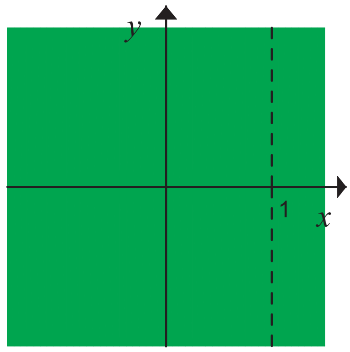
Ao lado temos um esboço da região determinada pela hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.



e) Neste caso, como o termo $x - 1$ aparece no denominador da expressão de f_5, devemos ter $x - 1 \neq 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_5) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}.$$

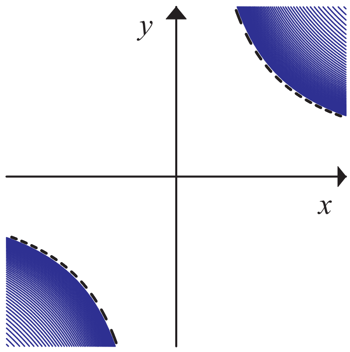
Temos portanto que o domínio da função é todo plano xy, excetuando a reta $x = 1$ (figura ao lado).



f) Neste caso, como o termo $xy - 1$ aparece como argumento do logaritmo natural na expressão de f_6, devemos ter $xy - 1 > 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}.$$

Ao lado temos um esboço da região determinada pela hipérbole $xy = 1$. (figura ao lado).



♡

3.4 Exemplos de Funções Reais de Duas Variáveis Reais

Veremos a seguir exemplos de alguns tipos de funções reais de duas variáveis reais.

Exemplo 3.4.1: (Função Polinomial) Uma *função polinomial* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^n y^m,$$

onde p é um natural fixo e os coeficientes a_{mn} são números reais dados. A soma é estendida a todas soluções (m, n), m e n naturais, da inequação $m + n \leq p$.

Exemplo: $f(x, y) = 2x^5y^2 + x^2y^3$.

Exemplo 3.4.2: (Função Afim) Uma *função afim* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

onde a, b e c são números reais dados. A função afim é um caso particular de uma função polinomial.

Exemplo: $f(x, y) = 2x + 7y + \sqrt{6}$.

Exemplo 3.4.3: (Função Linear) Uma *função linear* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by,$$

onde a e b são números reais dados. A função linear é um caso particular de uma função afim.

Exemplo: $f(x, y) = 2x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,y$.

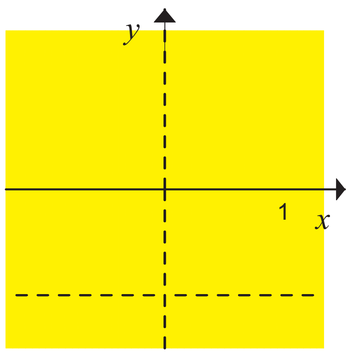
Exemplo 3.4.4: (Função Racional) Uma *função racional* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)},$$

onde p e q são funções polinomiais dadas. Temos, neste caso, que $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, q(x, y) \neq 0\}$.

Exemplo: $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2 + 7y^3}{xy + x}$. Observe que

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x(y + 1) \neq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0 \text{ e } y \neq -1\} \end{aligned}$$



Temos portanto que o domínio da função é todo plano xy, excetuando as retas $x = 0$ e $y = -1$ (figura ao lado).

3.5 Curvas de Nível de Funções Reais de Duas Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, dado $k \in Im(f)$, temos que o conjunto de nível da função f correspondente ao nível k é o subconjunto do domínio dado por

$$C_k(f) = \{(x, y) \in Dom(f) \,|\, f(x, y) = k\}.$$

No caso em questão, que é o das funções reais de duas variáveis reais, os conjuntos de nível de f são de fato curvas, as quais são portanto chamadas de *curvas de nível* de f. Conforme mencionado, as curvas de nível são muito úteis para se ter uma visão do comportamento da função. Isto porque elas nos fornecem todos os pontos do domínio tais que o valor da função é constante. Desta forma, se tivéssemos todas as curvas de nível k poderíamos construir o gráfico de f "pegando"cada curva de nível de f e colocando na altura $z = k$.

Observação 3.5.1: Como sabemos que f é constante ao longo das curvas de nível, observe que duas curvas de nível de uma função f correspondentes aos níveis k_1 e k_2, onde $k_1 \neq k_2$, não podem se interceptar.

Vamos agora fazer alguns exemplos.

Exemplo 3.5.1: Determine e esboce as curvas de nível das funções dadas abaixo.

a) $f_1(x, y) = x + y$.
b) $f_2(x, y) = x^2 + y^2$.
c) $f_3(x, y) = \dfrac{y}{x-1}$.
d) $f_4(x, y) = \ln(xy - 1)$.
e) $f_5(x, y) = y^2 - x^2$.
f) $f_6(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

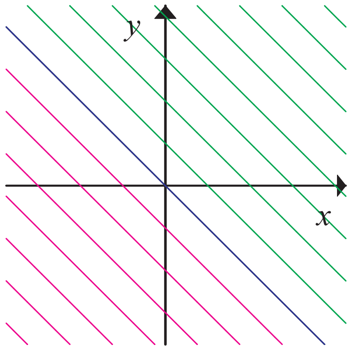
Solução:

a) Neste caso, observe que $Dom(f_1) = \mathbb{R}^2$ e que $Im(f_1) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_1 é dado por

$$C_k(f_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = k\},$$

ou seja, as curvas de nível k de f_1 são retas $x + y = k$. Por exemplo,
para $k = 0$, temos a reta $y = -x$;
para $k = 1$, temos a reta $y = -x + 1$;
para $k = 2$, temos a reta $y = -x + 2$;
para $k = -1$, temos a reta $y = -x - 1$;
para $k = -2$, temos a reta $y = -x - 2$.
As curvas de nível de f_1 encontram-se esboçadas abaixo. A curva de nível $k = 0$ está

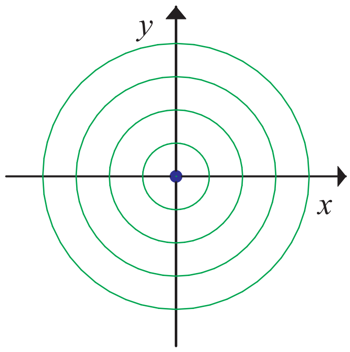
esboçada em azul, as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ estão esboçadas em rosa.



b) Neste caso, observe que $Dom(f_2) = \mathbb{R}^2$ e que $Im(f_2) = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \geq 0\}$. Desta forma, temos que para todo $k \geq 0$ real, o conjunto de nível k de f_2 é dado por

$$C_k(f_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = k\}.$$

Observe que para $k = 0$, temos apenas o ponto $(0, 0)$, i.e. $C_0(f_2) = \{(0, 0)\}$. Já para $k > 0$, temos que as curvas de nível $k > 0$ de f_2 são circunferências $x^2 + y^2 = k$, i. e. circunferências de raio $\sqrt{k}$ e centro na origem. Por exemplo,
para $k = 1$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 1$;
para $k = 2$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 2$;
para $k = 3$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 3$;
para $k = 4$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
As curvas de nível de f_2 encontram-se esboçadas abaixo. A curva de nível $k = 0$ (a origem) está esboçada em azul e as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde.



c) Neste caso, observe que

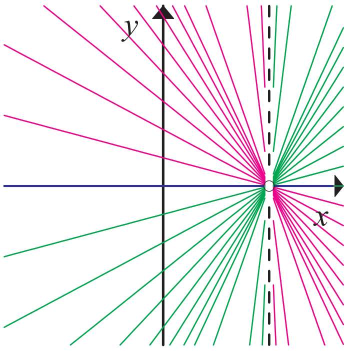
$$Dom(f_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}$$

e que $Im(f_3) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_3 é dado por

$$C_k(f_3) = \{(x, y) \in Dom(f_3) \,|\, y = k(x - 1)\},$$

ou seja, as curvas de nível k de f_3 são retas $y = k(x - 1)$. Por exemplo,
para $k = 0$, temos a reta $y = 0$;
para $k = 1$, temos a reta $y = x - 1$;

para $k = 2$, temos a reta $y = 2x - 2$;
para $k = -1$, temos a reta $y = -x + 1$;
para $k = -2$, temos a reta $y = -2x + 2$.
As curvas de nível de f_3 encontram-se esboçadas abaixo. As curvas de nível $k = 0$ (semi-retas) estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 0$ (semi-retas) estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ (semi-retas) estão esboçadas em rosa.



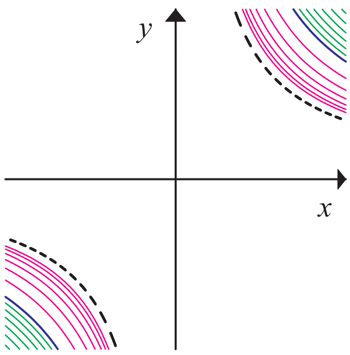
d) Neste caso, observe que

$$Dom(f_4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}$$

e que $Im(f_4) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_4 é dado por

$$C_k(f_4) = \{(x, y) \in Dom(f_4) \,|\, \ln(xy - 1) = k\}.$$

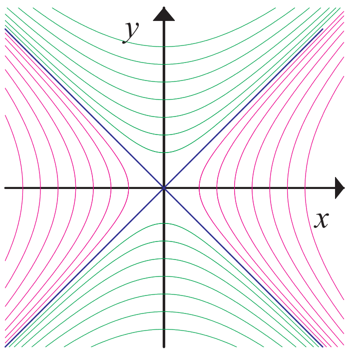
Como $\ln(xy - 1) = k \Leftrightarrow xy - 1 = e^k \Leftrightarrow xy = 1 + e^k$, temos que as curvas de nível k de f são hipérboles $xy = 1 + e^k$. Por exemplo,
para $k = 0$, temos a hipérbole $xy = 2$;
para $k = 1$, temos a hipérbole $xy = 1 + e$;
para $k = 2$, temos a hipérbole $xy = 1 + e^2$;
para $k = -1$, temos a hipérbole $y = xy = 1 + \dfrac{1}{e}$;
para $k = -2$, temos a hipérbole $y = xy = 1 + \dfrac{1}{e^2}$.
As curvas de nível de f_4 encontram-se esboçadas abaixo. As curvas de nível $k = 0$ estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ estão esboçadas em rosa.



e) Neste caso, observe que $Dom(f_5) = \mathbb{R}^2$ e que $Im(f_5) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_5 é dado por

$$C_k(f_5) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 - x^2 = k\}.$$

Observe que para $k = 0$, temos que $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y = \pm x$, i.e. as curvas de nível zero são as retas $y = x$ e $y = -x$. Já para $k > 0$, temos que as curvas de nível $k > 0$ de f_5 são hipérboles $y^2 - x^2 = k > 0$, i. e. hipérboles cujos focos estão no eixo y. Contudo, para $k < 0$, temos que as curvas de nível $k < 0$ de f_5 são hipérboles $y^2 - x^2 = k < 0$, i. e. hipérboles cujos focos estão no eixo x. Por exemplo,
para $k = 0$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$;
para $k = 1$, temos a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$;
para $k = 2$, temos a hipérbole $y^2 - x^2 = 2$;
para $k = -1$, temos a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$;
para $k = -2$, temos a hipérbole $x^2 - y^2 = 2$.
As curvas de nível de f_5 encontram-se esboçadas abaixo. As curvas de nível $k = 0$ (retas) estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ estão esboçadas em rosa.



f) Neste caso, observe que $Dom(f_6) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Já a imagem de f_6, vamos determinar mais tarde. Desta forma, temos que para todo $k \in Im(f_6)$, o conjunto de nível k de f_6 é dado por

$$C_k(f_6) = \left\{ (x, y) \in Dom(f_6) \;\middle|\; \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = k \right\}.$$

Observe que $k = 0 \in Im(f_6)$, e que o conjunto de nível 0 de f_6 é dado por

$$C_0(f_6) = \{(x, y) \in Dom(f_6) \,|\, x = 0 \text{ ou } y = 0\}.$$

Desenvolvendo então a igualdade $\dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} = k$, para $k \neq 0$, temos que

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^4} = k \quad \Leftrightarrow \quad xy^2 = kx^2 + ky^4 \Leftrightarrow kx^2 - y^2 x + ky^4 = 0.$$

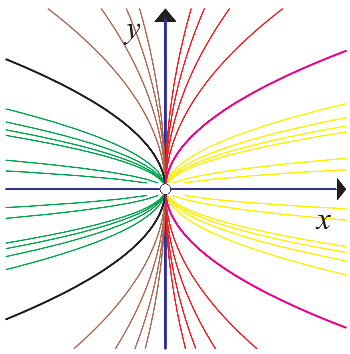
Resolvendo a equação acima em x, segue que

$$x = \frac{y^2 \pm y^2\sqrt{1 - 4k^2}}{2k}.$$

De posse deste resultado, fica claro que $Im(f_6) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Sendo assim, para $k \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $k \neq 0$, temos que o conjunto de nível k de f_6 é dado por

$$C_k(f_6) = \left\{(x,y) \in Dom(f_6) \;\middle|\; x = y^2\left(\frac{1 \pm 1\sqrt{1-4k^2}}{2k}\right)\right\},$$

ou seja, as curvas de nível $k(k \neq 0)$ de f_6 são as parábolas $x = y^2\left(\dfrac{1 \pm 1\sqrt{1-4k^2}}{2k}\right)$, com $(x,y) \neq (0,0)$. Por exemplo,
para $k = 1/2$, temos a parábola $x = y^2$;
para $k = 1/3$, temos as parábolas $x = y^2\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $x = y^2\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$;
para $k = 1/4$, temos as parábolas $x = y^2\left(\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}\right)$ e $x = y^2\left(\dfrac{4-\sqrt{12}}{2}\right)$;
para $k = -1/2$, temos a parábola $x = -y^2$;
para $k = -1/3$, temos as parábolas $x = -y^2\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $x = -y^2\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$;
para $k = -1/4$, temos as parábolas $x = -y^2\left(\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}\right)$ e $x = -y^2\left(\dfrac{4-\sqrt{12}}{2}\right)$;
As curvas de nível de f_6 encontram-se esboçadas abaixo.



Vamos agora passar aos gráficos de funções reais de duas variáveis. Portanto, é interessante que você faça uma revisão de planos, cilindros, esferas, superfícies de revolução e superfícies quádricas em geral. Na Parte 4, temos uma revisão destes tópicos. Não deixe de estudá-los.

3.6 Gráficos de Funções Reais de Duas Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, temos que o gráfico da função f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in Dom(f)\}.$$

No caso em questão, que é o das funções reais de duas variáveis reais, atente para o fato de que os gráficos destas funções estão em $\mathbb{R}^3$.

A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis é uma tarefa difícil. Por isto, em alguns casos nos contentamos com as curvas de nível. Vamos agora fazer alguns exemplos que não estão entre os mais difíceis.

Exemplo 3.6.1: Determine e esboce os gráficos das funções dadas abaixo. Use as curvas de nível encontradas no Exemplo 3.5.1, se achar necessário.

a) $h_1(x, y) = x + y$.
b) $h_2(x, y) = x^2 + y^2$.
c) $h_3(x, y) = y^2 - x^2$.
d) $h_4(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
e) $h_5(x, y) = 1 - y^2$.
f) $h_6(x, y) = \dfrac{y}{x-1}$.
g) $h_7(x, y) = \ln(xy - 1)$.

Solução:

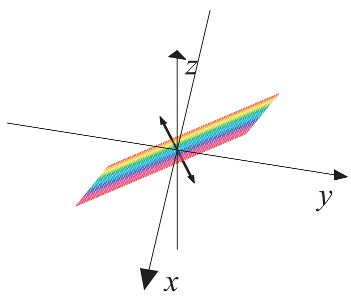
a) Temos que o gráfico de h_1 é dado por

$$G(h_1) = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Temos portanto que o gráfico da função é o plano

$$z = x + y,$$

que é o plano que contém a origem e é perpendicular aos vetores $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$ (figura ao lado).



b) Temos que o gráfico de h_2 é dado por

$$G(h_2) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Temos portanto que o gráfico da função é o parabolóide $z = x^2 + y^2$ (figura ao lado).