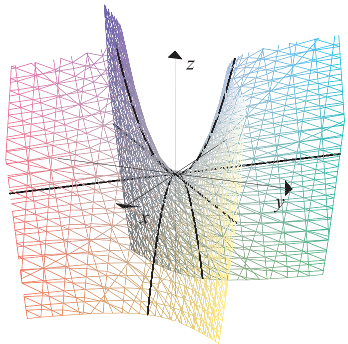
c) Temos que o gráfico de h_3 é dado por

$$G(h_3) = \{(x, y, y^2 - x^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

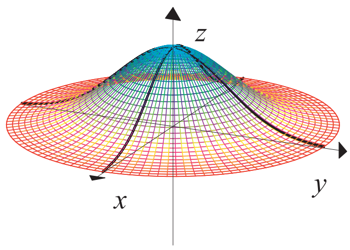
Temos portanto que o gráfico da função é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ (figura ao lado).



d) Temos que o gráfico de h_4 é dado por

$$G(h_4) = \left\{\left(x, y, e^{-(x^2+y^2)}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

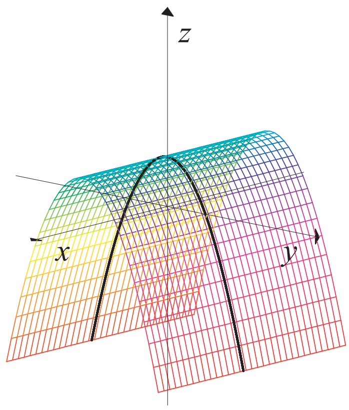
Neste caso, observe que, as variáveis x e y só aparece na forma $(\sqrt{x^2+y^2})^2$. Estamos portanto diante de uma superfície de revolução. Desta forma, para descobrir a função $z = f(y)$ (ou $z = f(x)$), cuja rotação do gráfico resultou na superfície em questão, vamos substituir o termo $(x^2 + y^2)$ na expressão de h_4 por y^2 (ou por x^2). Encontramos assim, a função $z^2 = f(y) = e^{-y^2}$. Temos então, que o gráfico de h_4 é a superfície gerada pela rotação da curva $z^2 = e^{-y^2}$, no plano yz, em torno do eixo z (ou, o que dá no mesmo, a rotação da curva $z^2 = e^{-x^2}$, no plano xz, em torno do eixo z) (figura ao lado).



d) Temos que o gráfico de h_5 é dado por

$$G(h_5) = \left\{\left(x, y, 1 - y^2\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

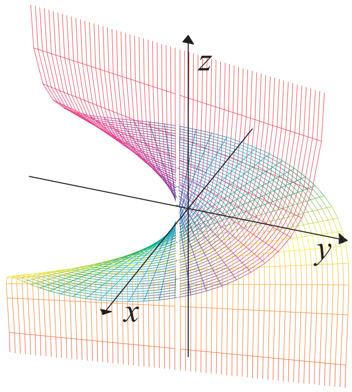
Neste caso, observe que, **no plano** yz, a equação $z = 1 - y^2$, é a equação de uma parábola. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $z = 1 - y^2$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é a parábola $z = 1 - y^2$, no plano yz, e cuja geratriz é paralela ao eixo x. Este cilindro é chamado de *cilindro parabólico* (figura ao lado).



f) Temos que o gráfico de h_6 é dado por

$$G(h_6) = \left\{ \left(x, y, \frac{y}{x-1} \right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 1 \right\}.$$

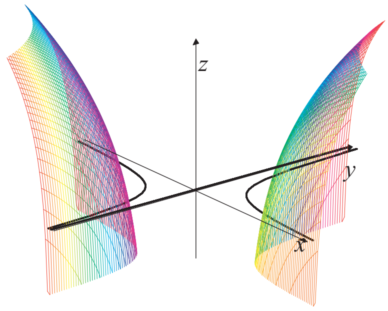
Lembre-se que vimos no Exemplo 3.3.1 (e) que $Dom(h_6) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}$. Na figura ao lado temos o gráfico esboçado pelo Maple V. Embora seja difícil visualizar, a reta dada pela interseção dos planos $x = 1$ e $y = 0$ não pertence ao gráfico da função e, quanto mais o valor de x se aproxima de 1, maior fica o valor da função. Imagine mais ou menos uma "vareta"que ao mesmo tempo que gira em torno da reta $x = 1$, $y = 0$, vai levantando uma extremidade e abaixando a outra.



g) Temos que o gráfico de h_7 é dado por

$$G(h_7) = \{(x, y, \ln(xy-1)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in Dom(f_4)\}.$$

Lembre-se que vimos no Exemplo 3.3.1 (f) que $Dom(h_7) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}$. Na figura ao lado temos o esboço do gráfico da função.



♡

Vamos agora nos concentrar em funções reais de três variáveis reais.

3.7 Funções Reais de Três Variáveis Reais

Vamos estudar agora com mais detalhes as funções reais de três variáveis reais. Isto é, funções f da forma

$$\begin{array}{rccl} f \; : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

Vamos iniciar identificando e esboçando o domínio de algumas funções de duas variáveis reais.

Exemplo 3.7.1: Determine e esboce o domínio das funções definidas pelas expressões abaixo.

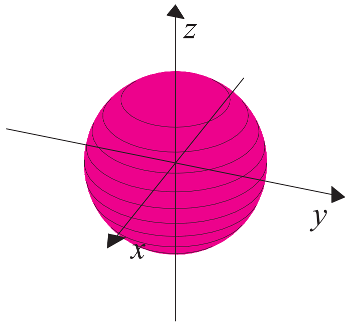
a) $f_1(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.
b) $f_2(x, y, z) = \sqrt{1 - z}$.
c) $f_3(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

Solução:

a) Neste caso, para podermos tirar a raiz de $1 - x^2 - y^2 - z^2$ que aparece na expressão de f_1, devemos ter $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

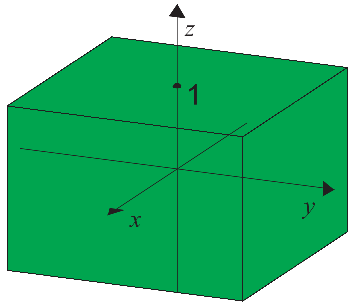
Temos portanto que o domínio da função é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e seu interior (figura ao lado).



b) Neste caso, para podermos tirar a raiz de $1 - z$ que aparece na expressão de f_2, devemos ter $1 - z \geq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \leq 1\}.$$

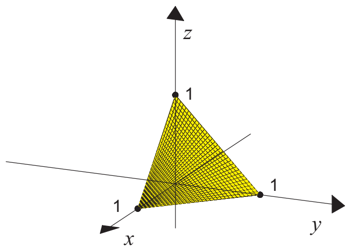
Temos portanto que o domínio da função f_2 é a região do espaço abaixo do plano $z = 1$, incluindo o próprio plano $z = 1$.



c) Neste caso, para podermos tirar a raiz de $1 - x - y - z$ que aparece na expressão de f_3, devemos ter $1 - x - y - z \geq 0$. Além disso, como o termo $\sqrt{1 - x - y - z}$ está no denominador da função f_3, é necessário ter $1 - x - y - z \neq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z < 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\}.$$

Temos portanto que o domínio da função f_3 é a região do primeiro octante limitada pelo do plano $x + y + z = 1$, excluindo o próprio plano $x + y + z = 1$.



♡

3.8 Exemplos de Funções Reais de Três Variáveis Reais

Veremos a seguir exemplos de alguns tipos de funções reais de três variáveis reais.

Exemplo 3.8.1: (Função Polinomial) Uma *função polinomial* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \sum_{m+n+k \leq p} a_{mnk} x^n y^m z^k,$$

onde p é um natural fixo e os coeficientes a_{mnk} são números reais dados. A soma é estendida a todas soluções (m, n, k), m, n e k naturais, da inequação $m + n + k \leq p$.

Exemplo: $f(x, y, z) = 2x^5y^2z + x^2y^3z^3 + z^2$.

Exemplo 3.8.2: (Função Afim) Uma *função afim* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d,$$

onde a, b, c e d são números reais dados.

Exemplo: $f(x, y, z) = 2x + 7y + \dfrac{\sqrt{5}}{7} z + 3.$

Exemplo 3.8.3: (Função Linear) Uma *função linear* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = ax + by + cz,$$

onde a, b e c são números reais dados.

Exemplo: $f(x, y, z) = 2x + \dfrac{2}{\sqrt{3}} y + z.$

Exemplo 3.8.4: (Função Racional) Uma *função racional* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{p(x, y, z)}{q(x, y, z)},$$

onde p e q são funções polinomiais dadas. Temos, neste caso, que $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, q(x, y, z) \neq 0\}$.

Exemplo: $f(x, y, z) = \dfrac{x^2y^2 + 7y^3 + z^2}{xy + xz}$. Neste caso, observe que

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy + xz \neq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x(y + z) \neq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 0 \text{ e } y + z \neq 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, o domínio de f é todo $\mathbb{R}^3$, menos o plano $x = 0$ e plano $y + z = 0$.