3.9 Superfícies de Nível de Funções Reais de Três Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, dado $k \in Im(f)$, temos que o conjunto de nível da função f correspondente ao nível k é o subconjunto do domínio dado por

$$S_k(f) = \{(x, y, z) \in Dom(f) \,|\, f(x, y, z)) = k\}.$$

No caso em questão, que é o das funções reais de três variáveis reais, os conjuntos de nível de f são de fato superfícies, as quais são portanto chamadas de *superfícies de nível* de f.

Observação 3.9.1: Como sabemos que f é constante ao longo das superfícies de nível, observe que duas superfícies de nível de uma função f correspondentes aos níveis k_1 e k_2, onde $k_1 \neq k_2$, não podem se interceptar.

Vamos agora fazer alguns exemplos.

Exemplo 3.9.1: Determine e esboce as superfícies de nível das funções dadas abaixo.

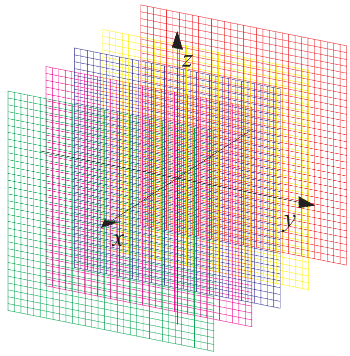
a) $h_1(x, y, z) = x$.
b) $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2$.
c) $h_3(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$.
e) $h_4(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.
d) $h_5(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Solução:

a) Neste caso, observe que $Dom(h_1) = \mathbb{R}^3$ e que $Im(h_1) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, as superfícies de h_1 correspondentes ao nível k são dadas por

$$S_k(h_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = k\},$$

ou seja, as superfícies de nível de h_1 são planos paralelos ao plano yz. Por exemplo,
para $k = 0$, temos o plano $x = 0$;
para $k = 1$, temos o plano $x = 1$;
para $k = 2$, temos o plano $x = 2$;
para $k = -1$, temos o plano $x = -1$;
para $k = -2$, temos o plano $x = -2$.
As superfícies de nível de h_1 encontram-se esboçadas ao lado.

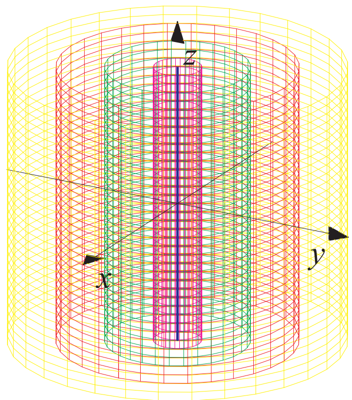


b) Neste caso, observe que $Dom(h_2) = \mathbb{R}^3$ e que a imagem de h_2 é

$$Im(h_2) = \{k \in \mathbb{R} \,|\, k \geq 0\}.$$

Desta forma, temos que para todo $k \geq 0$, as superfícies de nível de h_2 correspondentes ao nível k são dadas por

$$S_k(h_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = k\}.$$



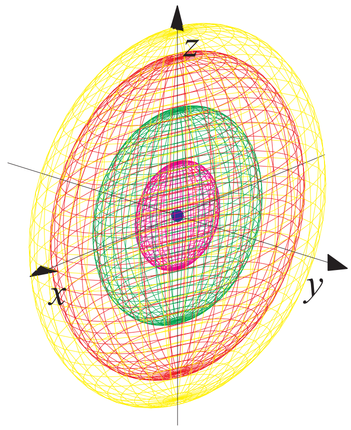
Observe que para $k = 0$, temos que a superfície de nível de h_2 é da forma $x^2 + y^2 = 0$, o que corresponde ao eixo z. Já para cada $k > 0$, temos que a superfície de nível de h_2 correspondente ao nível k é da forma $x^2 + y^2 = k > 0$, o que corresponde a cilindros circulares concentricos (figura ao lado). De fato, por exemplo
para $k = 0$, temos $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$, que é a reta $(x, y, z) = (0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$;
para $k = 1$, temos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$;
para $k = 2$, temos o cilindro $x^2 + y^2 = 2$;
para $k = 3$, temos o cilindro $x^2 + y^2 = 3$.

c) Neste caso, observe que $Dom(h_3) = \mathbb{R}^3$ e que a imagem de h_3 é

$$Im(h_3) = \{k \in \mathbb{R} \,|\, k \geq 0\}.$$

Desta forma, temos que para todo $k \geq 0$, as superfícies de nível de h_3 correspondentes ao nível k são dadas por

$$S_k(h_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 + z^2 = k\}.$$



Observe que para $k = 0$, temos que a superfície de nível de h_3 se degenera em apenas um ponto, que é a origem $(0, 0, 0)$. Já para cada $k > 0$, temos que a superfície de nível de h_3 correspondente ao nível k é da forma $x^2 + 4y^2 + z^2 = k > 0$, o que corresponde a elipsóides concentricos (figura ao lado). De fato, por exemplo para $k = 0$, temos $x^2 + 4y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0$ e $z = 0$, que é a origem $(0, 0, 0)$;
para $k = 1$, temos o elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$;
para $k = 2$, temos o elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2$;
para $k = 3$, temos o elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 3$.

d) Neste caso, observe que

$$Dom(h_4) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z < 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

e que a imagem de h_4 é

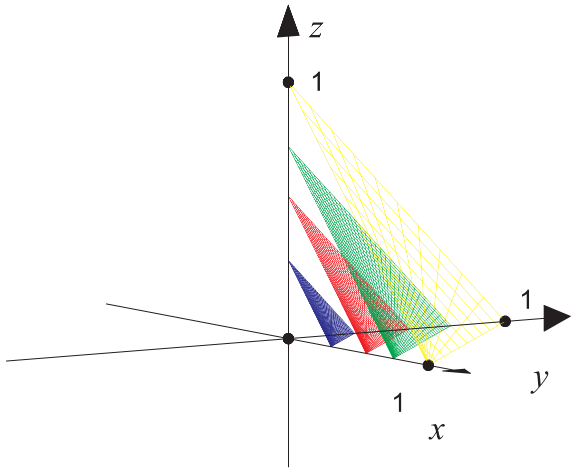
$$Im(h_4) = \{k \in \mathbb{R} \,|\, k > 1\}.$$

De fato, como $x + y + z < 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, temos que $0 < x + y + z < 1 \Leftrightarrow -1 < -x - y - z < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - x - y - z < 1$, de modo que $\dfrac{1}{1 - x - y - z} > 1$ e, portanto, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}} > 1$. Desta forma, temos que para todo $k > 1$, as superfícies de nível de h_4 correspondentes ao nível k são dadas por

$$\begin{aligned}
S_k(h_4) &= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}} = k\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \,\middle|\, \sqrt{1 - x - y - z} = \frac{1}{k}\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \,\middle|\, 1 - x - y - z = \frac{1}{k^2}\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \,\middle|\, x + y + z = 1 - \frac{1}{k^2}\right\}
\end{aligned}$$

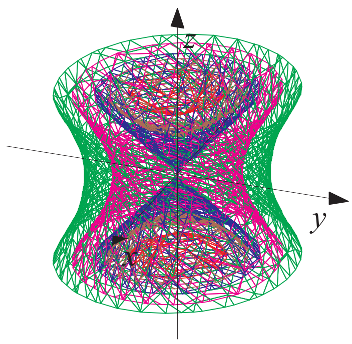
Portanto, temos que as superfícies de nível de h_4 correspondentes ao nível k $(k > 1)$ são da forma $x + y + z = 1 - \dfrac{1}{k^2}$, o que corresponde a planos paralelos ao plano

$x+y+z=1$, contidos no tetraedro $x+y+z<1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ (excetuando a face $x+y+z=1$) (figura abaixo). De fato, por exemplo,
para $k=1$, temos $x+y+z=0 \Leftrightarrow x=0$, $y=0$ e $z=0$, pois $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$;
para $k=2$, temos o plano $x+y+z=1-\dfrac{1}{4}$;
para $k=3$, temos o plano $x+y+z=1-\dfrac{1}{9}$;
para $k=4$, temos o plano $x+y+z=1-\dfrac{1}{16}$.

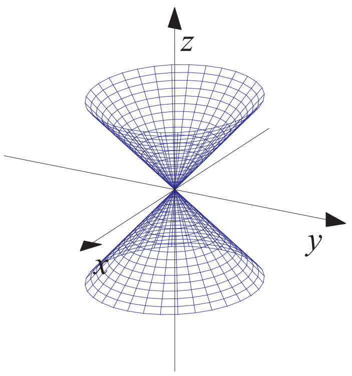


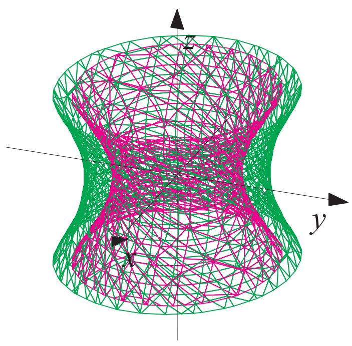
e) Neste caso, observe que $Dom(h_5)=\mathbb{R}^3$ e que $Im(h_5)=\mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, as superfícies de nível de h_5 correspondentes ao nível k são da forma

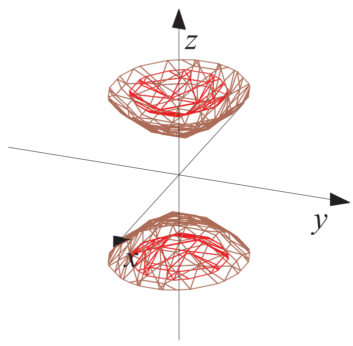
$$S_k(h_5)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2-z^2=k\}.$$



Portanto, vamos ter três casos diferentes:
– para $k=0$, temos que as superfície de nível de h_5 é o cone $x^2+y^2-z^2=0$;
– para cada $k>0$, temos que a superfície de nível de h_5 correspondente ao nível k é da forma $x^2+y^2-z^2=|k|$. Temos assim, que as superfícies de nível de h_5 são hiperbolóides de duas folhas;
– para cada $k<0$, temos que a superfície de nível de h_5 correspondente ao nível k é da forma $z^2-x^2-y^2=|k|$. Temos assim, que as superfícies de nível de h_5 são hiperbolóides de uma folha.







3.10 Gráficos de Funções Reais de Três Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, temos que o gráfico da função f é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$G(f) = \{(x, y, z, f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x, y, z) \in Dom(f)\}.$$

No caso em questão, que são o das funções reais de três variáveis reais, atente para o fato de que os gráficos destas funções estão em $\mathbb{R}^4$, de modo que não é possível esboçá-los.

Exemplo 3.10.1: Determine o gráfico da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução: $G(f) = \{(x, y, z, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

3.11 Exercícios

Exercício 3.11.1: Determine e esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

Resposta: Temos que $Dom(f)\mathbb{R}^2$ e $Im(f) = (0, \infty)$. As curvas de nível k, para $k.0$, são dadas por

$$\begin{aligned} C_k(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^{x^2 y} = k\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 y = \ln k\}. \end{aligned}$$

Observe que se $k = 1$, temos que $x^2 y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. Portanto, as curvas de nível 1 de f são os eixos coordenados. Se $0 < k < 1$ ou se $k > 1$, as curvas de nível de f são dadas pela equação $y = \dfrac{\ln k}{x^2}$. Note que se $0 < k < 1$, $\ln k < 0$, de modo que as curvas estão abaixo do eixo x e se $k > 1$, $\ln k > 0$, de modo que as curvas estão acima do eixo x. Abaixo temos um esboço das curvas de nível.

As curvas de nível $k = 1$ (eixos coordenados) estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 1$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $0 < k < 1$ estão esboçadas em rosa.