PARTE 4

REVISÃO DE PLANOS, CILINDROS, SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO, ESFERAS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS EM GERAL (Leitura para Casa)

Vamos agora fazer uma revisão de planos, cilindros, superfícies de revolução, esferas e superfícies quádricas em geral.

4.1 Revisão de Planos

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a um plano que é perpendicular ao vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$, temos que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a este plano se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor $\vec{v}$. Em outras palavras, P pertence ao plano se e somente se

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, temos que P pertence ao plano se e somente se

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

o que equivale a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Temos assim que a equação do plano que contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$ é dado por

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Observe ainda que a equação acima pode ser escrita como

$$ax + by + cz = d,$$

onde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Reciprocamente, é fácil verificar que toda equação da forma $ax + by + cz = d$, se a, b e c não forem todos nulos, representa um plano cujo vetor normal é dado por (a, b, c).

4.2 Revisão de Cilindros

Dada uma curva C em um plano e uma reta l que não está contida no plano da curva C, chamamos o conjunto de pontos formado por todas as retas que interceptam C e são paralelas a l de *cilindro*.

A curva C é chamada de *diretriz* do cilindro e a cada reta paralela a l que intercepta C é chamada de *geratriz*.

O cilindro que mais estamos acostumados é aquele obtido tomando-se como curva C uma circunferência no plano xy e como l uma reta perpendicular a este plano. Este cilindro é conhecido como *cilindro circular reto*. De um modo geral, trabalhamos com mais frequência com cilindros cuja curva diretriz C está contida em um dos planos coordenados e a reta geratriz l é perpendicular ao plano coordenado que contém C. Observe que, nesta situação, a curva C é função apenas duas variáveis. Desta forma, temos que a superfície em $\mathbb{R}^3$ cuja equação contém apenas as variáveis x e y é um cilindro cuja geratatriz é paralela ao eixo z. Da mesma forma, temos que a superfície em $\mathbb{R}^3$ cuja equação contém apenas as variáveis x e z é um cilindro cuja geratriz é paralela ao eixo y. E, finalmente, temos que a superfície em $\mathbb{R}^3$ cuja equação contém apenas as variáveis y e z é um cilindro cuja geratriz é paralela ao eixo x.

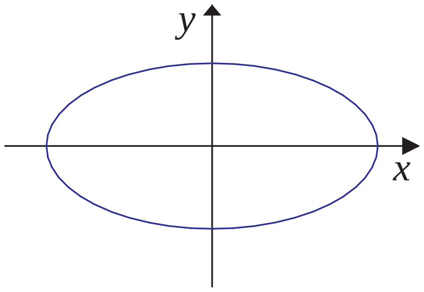
Observe que se a "curva"C for, por exemplo, a reta $ax + by = c$, o "cilindro"gerado trata-se de um plano cujo vetor perpendicular é o vetor $(a, b, 0)$. Desta forma, podemos ver os planos como "cilindros"especiais.

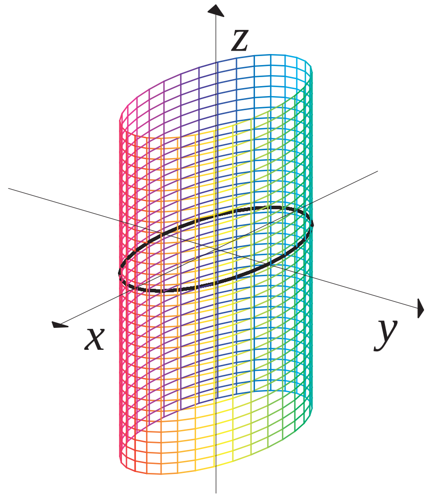
Exemplo 4.2.1: Esboce as superfícies em $\mathbb{R}^3$ dadas pelas equações abaixo.

a) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$
b) $y = x^2$
c) $z = \sqrt[3]{x}$
d) $z = \operatorname{sen} y$
e) $z = |x|$

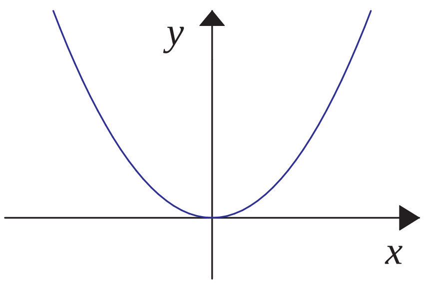
Solução:

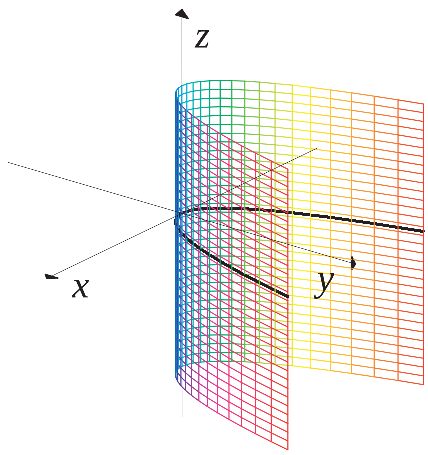
a) Neste caso, observe que, **no plano** xy, a equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, é a equação de uma elipse com centro na origem e $a = 2$ e $b = 1$. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, no plano xy, e cuja geratriz é paralela ao eixo z. Este cilindro é chamado de *cilindro eliptico* (figuras abaixo).



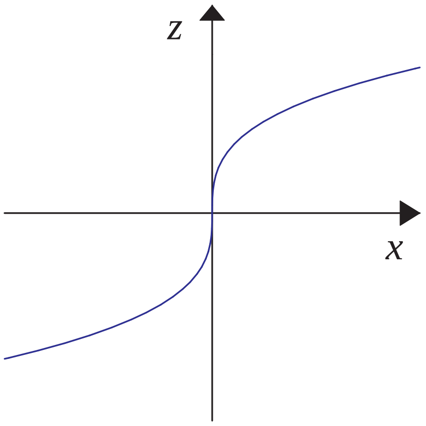


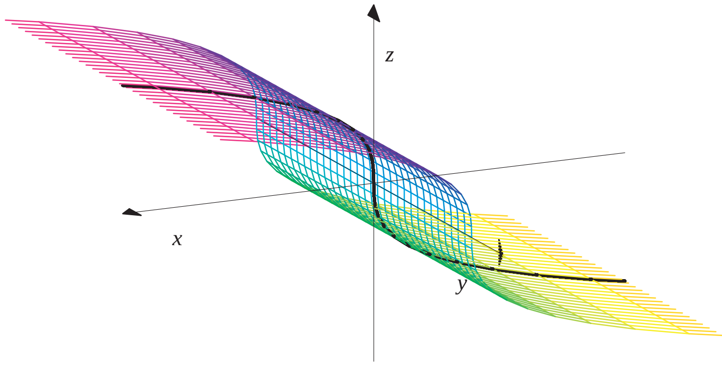
b) Neste caso, observe que, **no plano** xy, a equação $y = x^2$, é a equação de uma parábola. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $y = x^2$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é a parábola $y = x^2$, no plano xy, e cuja geratriz é paralela ao eixo z. Este cilindro é chamado de *cilindro parabólico* (figura ao lado).



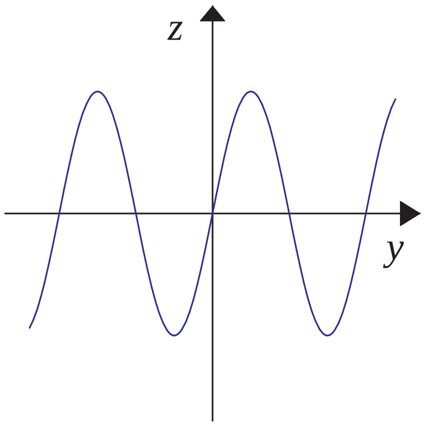


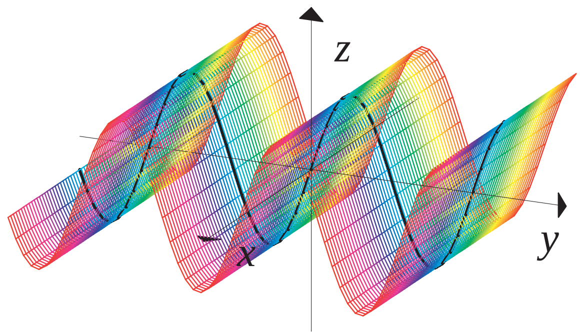
c) Neste caso, observe que, **no plano** xz, a equação $z = \sqrt[3]{x}$, é a equação de uma raiz cúbica. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $z = \sqrt[3]{x}$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é a raiz cúbica $z = \sqrt[3]{x}$, no plano xz, e cuja geratriz é paralela ao eixo y. (figuras abaixo).



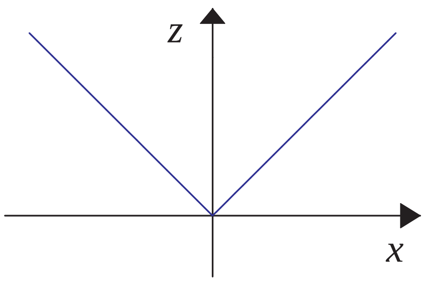


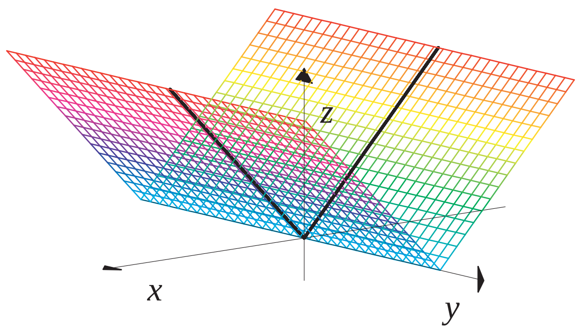
d) Neste caso, observe que, **no plano** yz, a equação $z = \operatorname{sen} y$, é a equação de uma senóide. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $z = \operatorname{sen} y$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é a senóide $z = \operatorname{sen} y$, no plano xz, e cuja geratriz é paralela ao eixo x. (figura ao lado).





e) Neste caso, observe que, **no plano** xz, a equação $z = |x|$, é a equação da função módulo. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $z = |x|$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é o gráfico da função módulo $y = x^2 z = |x|$, no plano xy, e cuja geratriz é paralela ao eixo y (figura ao lado).





♡

4.3 Revisão de Superfícies de Revolução

Um outro tipo de superfícies comumente encontradas são as *superfícies de revolução.* Uma *superfície de revolução* é uma superfície obtida pela rotação de uma curva plana C (C está contida em um plano), no espaço, em torno de uma reta l, contida no plano da curva. A reta l é chamada de *eixo de revolução ou rotação.* Neste caso, observe que as interseções de uma superfície de revolução com planos perpendiculares ao eixo de revolução, quando não é vazia, fornecem pontos ou circunferências. Portanto, se a superfície de revolução é o gráfico de uma função, temos que suas curvas de nível ou são pontos ou são circunferências.

Vamos apenas tratar aqui de algumas superfícies de revolução de são obtidas pela rotação de curvas dadas na forma implícita ao redor de um dos eixos do plano coordenado. Além disto, vamos supor que que a curva não intercepta o eixo de rotação em mais de um ponto. Como exemplos deste tipos que trataremos, temos: curva dada pela equação $f(x, y) = 0$ girada em torno do eixo x ou do eixo y; curva dada pela equação $f(x, z) = 0$ girada em torno do eixo x ou do eixo z e curva dada pela equação $f(yz) = 0$ girada em torno do eixo y ou do eixo z.

Para ilustrar o processo, suponha que a curva no plano yz dada pela equação $f(y, z) = 0$ (ou a curva no plano xz dada pela equação $f(x, z) = 0$) tenha sido girada em torno do eixo z. Neste caso, temos que um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer contido na superfície resultou da rotação de um ponto Q particular contido na curva, cujas coordenadas (y_0, z_0) satisfazem a equação $f(y_0, z_0) = 0$ (ou cujas coordenadas (x_0, z_0) satisfazem a equação $f(x_0, z_0) = 0$). Contudo, analisando o processo de rotação, podemos observar que $z = z_0$ e $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$, se $y_0 > 0$ ou $y_0 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, se $y_0 < 0$ ou ($z = z_0$ e $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$, se $x_0 > 0$ ou $x_0 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, se $x_0 < 0$). Desta forma, temos que

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = f(y_0, z_0) = 0, y_0 > 0 \ \ (\text{ou } f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = f(x_0, z_0) = 0, x_0 > 0)$$

ou

$$f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = f(y_0, z_0) = 0, y_0 < 0 \ \ (\text{ou } f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = f(x_0, z_0) = 0, x_0 < 0).$$

Como P é um ponto arbitrário na superfície, uma forma de reconhecer se uma dada equação representa uma superfície de revolução de uma curva $f(y, z) = 0$ no plano yz em torno do eixo z (ou de uma curva $f(x, z) = 0$ no plano yz em torno do eixo z) é verificar se esta equação só apresenta as variáveis x e y na forma $\sqrt{x^2 + y^2}$. E, sendo assim, para descobrir a equação $f(y, z) = 0$ que originou a superfície, basta substituir o termo $\sqrt{x^2 + y^2}$ por y (ou, então, para descobrir a equação $f(x, z) = 0$ que originou a superfície, basta substituir o termo $\sqrt{x^2 + y^2}$ por x).

Analogamente, uma forma de reconhecer se uma dada equação representa uma superfície de revolução de uma curva $f(y, z) = 0$ no plano yz (ou de uma curva $f(x, y) = 0$ no plano xy) em torno do eixo y é verificar se esta equação só apresenta as variáveis x e z na forma $\sqrt{x^2 + z^2}$. E, sendo assim, para descobrir a equação $f(y, z) = 0$ que originou a superfície, basta substituir o termo $\sqrt{x^2 + z^2}$ por z (ou, então, para descobrir a equação $f(x, y) = 0$ que originou a superfície, basta substituir o termo $\sqrt{x^2 + y^2}$ por x).

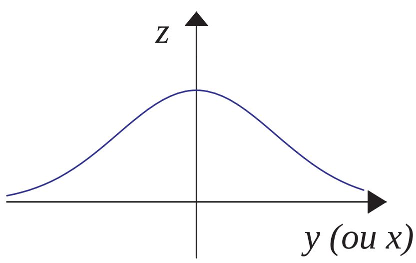
Finalmente, uma forma de reconhecer se uma dada equação representa uma superfície de revolução de uma curva $f(x,z)=0$ no plano xz (ou de uma curva $f(x,y)=0$ no plano xy) em torno do eixo x é verificar se esta equação só apresenta as variáveis y e z na forma $\sqrt{y^2+z^2}$. E, sendo assim, para descobrir a equação $f(x,z)=0$ que originou a superfície, basta substituir o termo $\sqrt{y^2+z^2}$ por z (ou, então, para descobrir a equação $f(x,y)=0$ que originou a superfície, basta substituir o termo $\sqrt{y^2+z^2}$ por y).

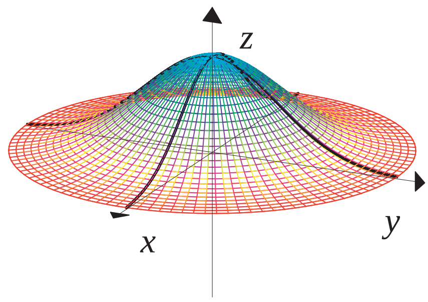
Exemplo 4.3.1: Esboce as superfícies de revolução dadas pelas equações abaixo, identificando a curva e o eixo de revolução.

a) $z=e^{-(x^2+y^2)}$
b) $x^2+z^2=e^{-2y^2}$

Solução:

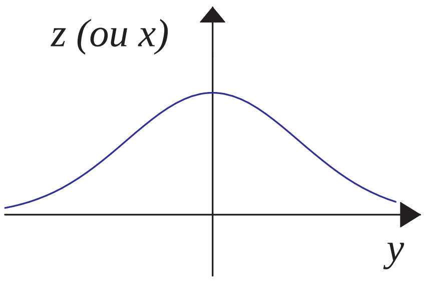
a) Neste caso, observe que, as variáveis x e y só aparece na forma $(\sqrt{x^2+y^2})^2$. Estamos portanto diante de uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva no plano yz (ou xz) em torno do eixo z. Além disso, como $z=f(x,y)$, temos que a curva no plano yz é o gráfico de uma função $z=g(y)$ (ou $z=h(x)$). Desta forma, para descobrir a função $z=g(y)$ (ou $z=h(x)$), cuja rotação do gráfico resultou na superfície em questão, vamos substituir o termo (x^2+y^2) na equação da superfície por y^2 (ou por x^2). Encontramos assim, a função $z=g(y)=e^{-y^2}$. Temos então que esta superfície é a superfície gerada pela rotação do gráfico da função $z=g(y)=e^{-y^2}$, no plano yz, em torno do eixo z (ou, o que dá no mesmo, a rotação da curva $z=h(x)=e^{-x^2}$, no plano xz, em torno do eixo z) (figura ao lado).

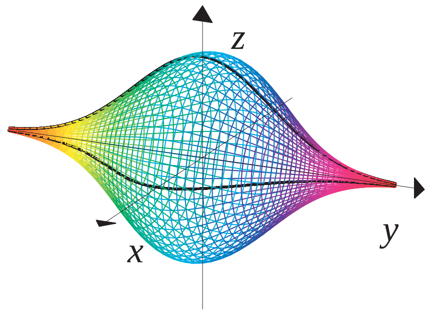




b) Neste caso, observe que, as variáveis x e z só aparece na forma $(\sqrt{x^2+z^2})^2$. Estamos portanto diante de uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva no plano xy (ou yz) em torno do eixo y. Portanto, conforme vimos, vamos substituir o termo (x^2+z^2) na equação da superfície por z^2 (ou por x^2) para descobrir a equação da curva no plano xy (ou yz), cuja rotação em torno do eixo y gerou a superfície dada. Desta forma, encontramos a equação $z^2=e^{-2y^2}$, o que corresponde a $z=g_1(y)=e^{-y^2}$ ou $z=g_2(y)=-e^{-y^2}$. Como a rotação é em torno do eixo y, podemos escolher uma das duas equações, pois o resultado da rotação de ambas será o mesmo. Vamos escolher $z=g_1(y)=e^{-y^2}$. Temos então que esta superfície é superfície gerada pela rotação do gráfico da função $z=g_1(y)=e^{-y^2}$, no plano yz, em torno do eixo y (ou, o que dá no mesmo, a rotação do gráfico da função $x=h_1(x)=e^{-y^2}$, no plano xy em torno do eixo

y) (figuras abaixo).





♡

4.4 Revisão de Esferas

Considere dois pontos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ em $\mathbb{R}^3$. Sabemos que distância entre estes dois pontos P_0 e P_1 é dada por

$$d(P_0, P) = ||\overline{P_0P_1}|| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Portanto, se $P = (x, y, z)$ é um ponto em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2,$$

onde $a > 0$, temos que a distância de P ao ponto P_0 é constante e igual a a. Temos portanto que o conjunto de pontos que satisfaz a equação acima é o conjunto formado por todos os pontos que distam de P_0 uma distância igual a a. Desta forma, geometricamente, temos então que a equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

é a equação de uma *esfera* com centro em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raio a.

Exemplo 4.4.1: Identifique a superfície dada pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z = 11.$$

Solução:

Reagrupando os termos e completando os quadrados, temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 6z - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + (z + 3)^2 - 9 + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25.$$

Temos portanto que a superfície dada trata-se de uma esfera de centro em $(1, -2, 3)$ e raio igual a 5.

♡

4.5 Revisão de Superfícies Quádricas

Uma equação do segundo grau nas variáveis x, y e z mais geral tem a forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde admitimos que nem todos os coeficientes $A, B, ..., F$ são nulos. A representação geométrica do conjunto de pontos no espaço que satisfaz a equação acima é chamada de *superfície quádrica*. Já vimos algumas superfícies quádricas como esferas, cilindros parabólicos, elipticos e hiperbólicos.

Excluindo os cilindros, é possível mostrar que por meio de rotações e translações convenientes dos eixos coordenados, podemos colocar a equação do segundo grau apresentada acima em certas formas canônicas e mostrar que existem seis tipos distintos de superfícies quádricas não-degeneradas: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, cone elíptico, parabolóide elíptico e parabolóide hiperbólico.

Vamos trabalhar apenas com superfícies quádricas nas formas canônicas:

• No caso de elipsóides, hiperbolóides de uma folha e hiperbolóides de duas folhas temos a seguinte forma canônica

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

• No caso de cones elípticos temos que a seguinte forma canônica

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{2}$$

onde a, b e c são constantes positivas e nem todos os sinais do lado esquerdo da equação são iguais.

• No caso de parabolóides elípticos e parabolóides hiperbólicos temos uma das seguintes formas canônicas

$$z = \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \quad , y = \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} \quad \text{e } x = \pm\frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2}. \tag{3}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

Para visualizar e esboçar uma superfície é de grande utilidade se valer das interseções das mesmas com os planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados. Chamamos as interseções de uma superfície com os planos coordenados de *traços* e as interseções de uma superfície com os planos paralelos aos planos coordenados chamamos de *seções*. Cabe observar que toda seção de segundo grau de uma superfície quádrica qualquer é uma cônica. Também ajuda bastante no processo de visualizar e esboçar a superfície, verificar a existência de simetrias.

Vamos a seguir ver separadamente cada uma das quádricas mencionadas acima.

4.5.1 Elipsóide

Neste caso, temos que todos os sinais do lado esquerdo da equação (1) são positivos. A equação canônica de um elipsóide é portanto dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde a, b e c são constantes positivas.

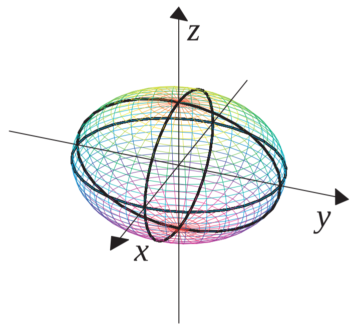
Os traços do elipsóide nos planos coordenados xy, xz e yz estão dados abaixo:

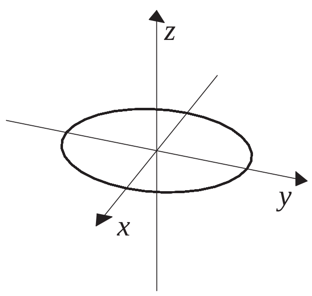
• Traço no Plano xy : elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

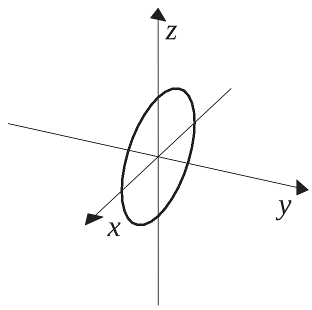
• Traço no Plano xz : elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

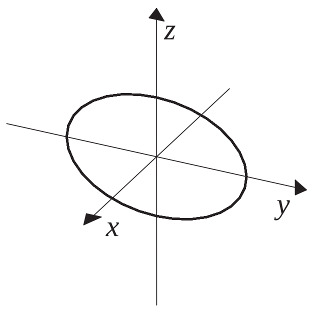
• Traço no Plano yz : elipse $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Na figura ao lado temos o elipsóide e seus traços e nas figuras abaixo temos os três traços em separado.









As seções do elipsóide nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ estão dadas abaixo:

• Seções no plano $z = k$:
– Para $|k| > c$ não temos interseções;
– Para $|k| < c$ temos as elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$;

– Para $|k| = c$ temos os pontos $(0, 0, c)$ e $(0, 0, -c)$.

Observação 4.5.1.1: as seções no plano $y = k$ e $x = k$ se comportam de forma análoga às seções no plano $z = k$.

Observação 4.5.1.2: Se $a = b = c \neq 0$, a superfície é uma esfera.

Observação 4.5.1.3: A equação $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$ é a equação de um elipsóide deslocado, com centro no ponto (x_0, y_0, z_0).

4.5.2 Hiperbolóide de Uma Folha

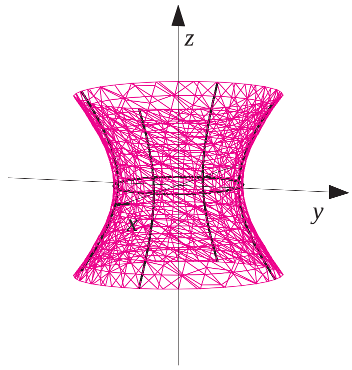
Neste caso, temos que apenas um dos sinais do lado esquerdo da equação (1) é negativo. Por exemplo, a equação canônica de um hiperbolóide de uma folha, cujo eixo é o eixo z, é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

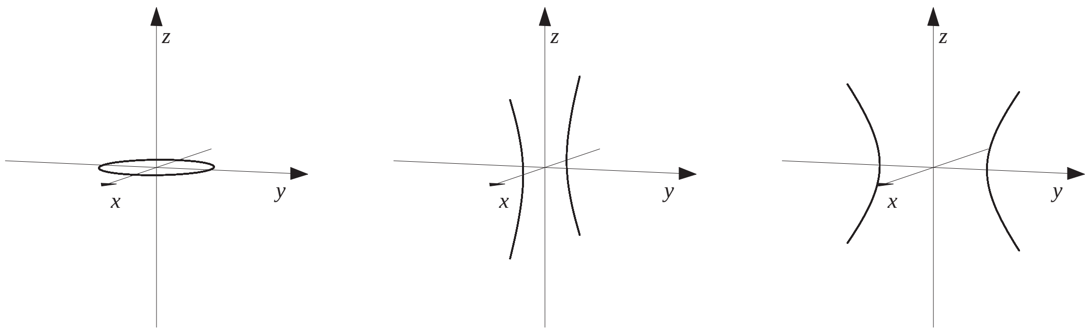
onde a, b e c são constantes positivas.

Os traços do hiperbolóide de uma folha $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ nos planos coordenados xy, xz e yz estão dados abaixo:

- Traço no Plano xy : elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
- Traço no Plano xz : hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;
- Traço no Plano yz : hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



Na figura ao lado temos o hiperbolóide de uma folha e seus traços e nas figuras abaixo temos os três traços em separado.



As seções do hiperbolóide de uma folha $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ estão dadas abaixo:

• Seções no plano $z = k$: elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2}$.
• Seções no plano $y = k$:
– Para $|k| = b$ temos as retas $z = \dfrac{c}{a}\,x$ e $z = -\dfrac{c}{a}\,x$;
– Para $|k| < b$ temos as hipérboles $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2}$, cujos focos estão no eixo x;
– Para $|k| > b$ temos as hipérboles $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{k^2}{b^2} - 1$, cujos focos estão no eixo z.

Observação 4.5.2.1: as seções no plano $x = k$ se comportam de forma análoga às seções no plano $y = k$.

Observação 4.5.2.2: O eixo do hiperbolóide de uma folha corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.

Observação 4.5.2.3: Se $a = b$, o hiperbolóide de uma folha $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo z.

Observação 4.5.2.4: A equação $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$ é a equação de um hiperbolóide de uma folha deslocado, com centro no ponto (x_0, y_0, z_0), cujo eixo é o eixo z.

4.5.3 Hiperbolóide de Duas Folhas

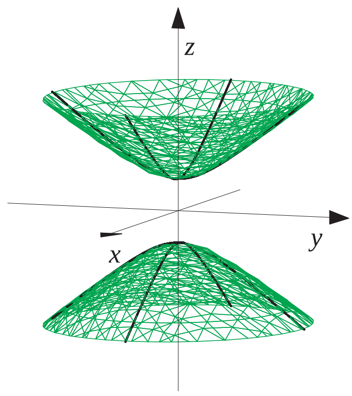
Neste caso, temos que dois dos sinais do lado esquerdo da equação (1) são negativos. Por exemplo, a equação canônica de um hiperbolóide de duas folhas, cujo eixo é o eixo z, é dada por

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

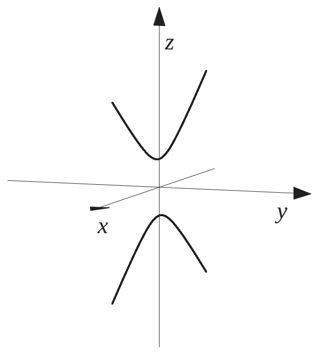
onde a, b e c são constantes positivas.

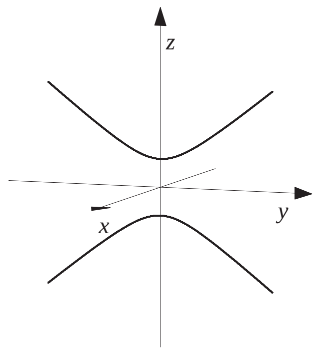
Os traços do hiperbolóide de duas folha $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ nos planos coordenados xy, xz e yz estão dados abaixo:

• Traço no Plano xy : não há;
• Traço no Plano xz : hipérbole $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$;
• Traço no Plano yz : hipérbole $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Na figura ao lado temos o hiperbolóide de duas folhas e seus traços e nas figuras abaixo temos os dois traços em separado.





As seções do hiperbolóide de duas folhas $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ estão dadas abaixo:

• Seções no plano $z = k$:
– Para $|k| = c$ temos os pontos $(0, 0, c)$ e $(0, 0, -c)$;
– Para $|k| < c$ a seção é vazia;
– Para $|k| > c$ temos as elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} - 1$.
• Seções no plano $y = k$: as hipérboles $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2}$.
• Seções no plano $x = k$: as hipérboles $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2}$.

Observação 4.5.3.1: O eixo do hiperbolóide de duas folhas corresponde à variável cujo coeficiente é positivo. Não existe traço no plano coordenado perpendicular ao eixo.

Observação 4.5.3.2: Se $a = b$, o hiperbolóide de duas folhas $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{c^2} = 1$ é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo z.

Observação 4.5.3.3: A equação $\dfrac{(z - z_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{c^2} = 1$ é a equação de um hiperbolóide de duas folhas com centro no ponto (x_0, y_0, z_0), cujo eixo é o eixo z.

4.5.4 Cone Elíptico

Neste caso, temos que a forma canônica de um cone elíptico é dada por

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{4}$$

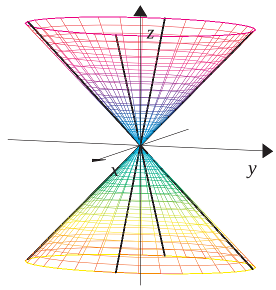
onde a, b e c são constantes positivas e nem todos os sinais do lado esquerdo da equação são iguais. Por exemplo, a equação canônica de um cone elíptico, cujo eixo é o eixo z, é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

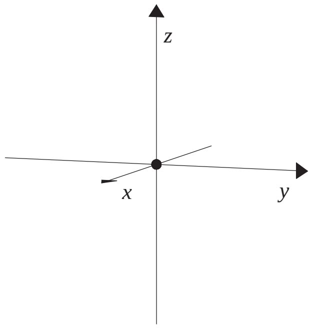
onde a, b e c são constantes positivas.

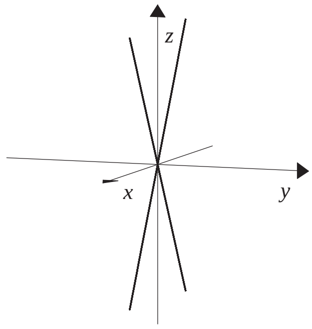
Os traços do cone elíptico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ nos planos coordenados xy, xz e yz estão dados abaixo:

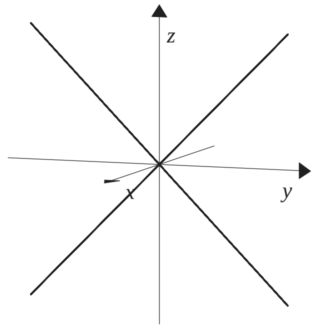
- Traço no Plano xy : o ponto $(0, 0, 0)$;
- Traço no Plano xz : temos as retas $z = \dfrac{c}{a}x$ e $z = -\dfrac{c}{a}x$;
- Traço no Plano yz : temos as retas $z = \dfrac{c}{b}y$ e $z = -\dfrac{c}{b}y$.



Na figura ao lado temos o cone elíptico e seus traços e nas figuras abaixo temos os três traços em separado.







As seções do cone elíptico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ estão dadas abaixo:

- Seções no plano $z = k$, $k \neq 0$: as elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2}$;
- Seções no plano $y = k$, $k \neq 0$: as hipérboles $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{k^2}{b^2}$;
- Seções no plano $x = k$, $k \neq 0$: as hipérboles $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2}$.

Observação 4.5.4.1: O eixo do cone elíptico corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.

Observação 4.5.4.2: Se $a = b$, temos o cone circular $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, que é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo z.

Observação 4.5.4.3: A equação $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$ é a equação de um cone elíptico deslocado, com centro no ponto (x_0, y_0, z_0), cujo eixo é o eixo z.

4.5.5 Parabolóide Elíptico

Neste caso, temos que as formas canônicas de um parabolóide elíptico são dadas pelas equações abaixo.

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \quad , y = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \quad \text{e} \quad x = \pm\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right). \tag{5}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

Por exemplo, a equação canônica de um parabolóide elíptico com concavidade voltada para cima, cujo eixo é o eixo z, é dada por

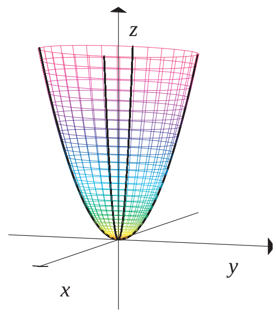
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

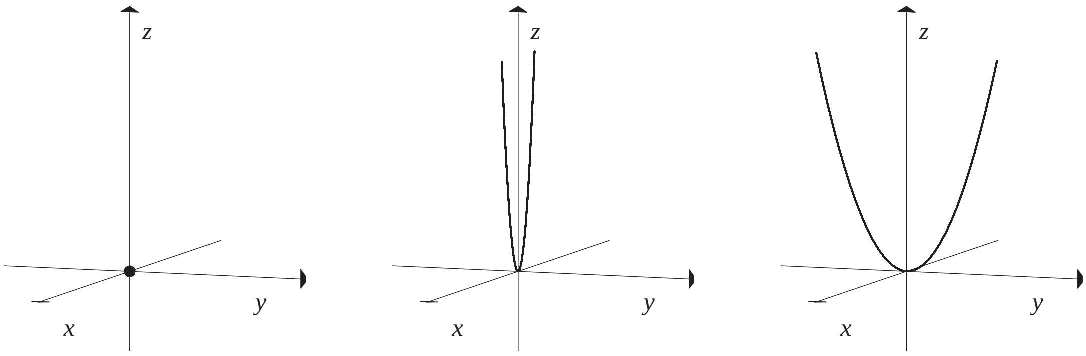
onde a e b são constantes positivas.

Os traços do parabolóide elíptico $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ nos planos coordenados xy, xz e yz estão dados abaixo:

- Traço no plano xy : o ponto $(0, 0, 0)$;
- Traço no plano xz : temos a parábola $z = \dfrac{x^2}{b^2}$;
- Traço no plano yz : temos a parábola $z = \dfrac{y^2}{a^2}$.

Na figura ao lado temos o parabolóide elíptico e seus traços e nas figuras abaixo temos os três traços em separado.





As seções do parabolóide elíptico $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ estão dadas abaixo:

- Seções no plano $z = k$, $k \neq 0$:

– Para $k > 0$ temos as elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k$;

– Para $k < 0$ a seção é vazia;

- Seções no plano $y = k$: as parábolas $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2}$.
- Seções no plano $x = k$: as parábolas $z = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{k^2}{a^2}$.

Observação 4.5.5.1: O eixo do parabolóide elíptico corresponde à variável cujo expoente é igual a um.

Observação 4.5.5.2: Se $a = b$, temos o parabolóide circular $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2}$, que é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo z.

Observação 4.5.5.3: A equação $z - z_0 = \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2}$ é a equação de um parabolóide elíptico com concavidade voltada para cima deslocado, com centro no ponto (x_0, y_0, z_0), cujo eixo é o eixo z.

4.5.6 Parabolóide Hiperbólico

Neste caso, temos que as formas canônicas de um parabolóide hiperbólico são dadas pelas equações abaixo.

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad , y = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \quad \text{e} \quad x = \pm\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right). \tag{6}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

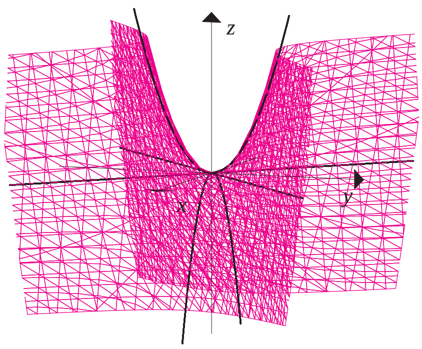
Por exemplo, a equação canônica de um parabolóide hiperbólico é dada por

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2},$$

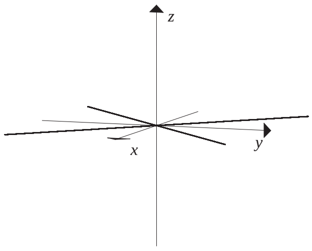
onde a e b são constantes positivas.

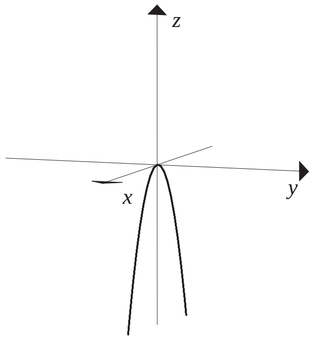
Os traços do parabolóide hiperbólico $z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$ nos planos coordenados xy, xz e yz estão dados abaixo:

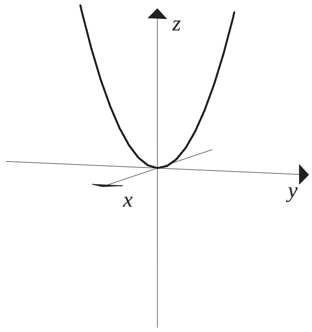
- Traço no plano xy : temos as retas $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$;
- Traço no plano xz : temos as parábolas $z = -\dfrac{x^2}{b^2}$;
- Traço no plano yz : temos as parábolas $z = \dfrac{y^2}{a^2}$.



Na figura ao lado temos o parabolóide hiperbólico e seus traços e nas figuras abaixo temos os três traços em separado.







As seções do parabolóide hiperbólico $z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$ nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ estão dadas abaixo:

• Seções no plano $z = k$, $k \neq 0$:
– Para $k > 0$ temos as hipérboles $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = |k|$, cujos focos estão no eixo y;
– Para $k < 0$ temos as hipérboles $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = |k|$, cujos focos estão no eixo x;
• Seções no plano $y = k$: as parábolas $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2}$ (concavidade para baixo).
• Seções no plano $x = k$: as parábolas $z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{k^2}{a^2}$ (concavidade para cima).

Observação 4.5.6.1: A equação $z - z_0 = \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2}$ é a equação de um parabolóide hiperbólico deslocado, com centro no ponto (x_0, y_0, z_0).