PARTE 5

LIMITE

5.1 Um Pouco de Topologia

Vamos agora nos preparar para definir limite de funções reais de várias variáveis reais. Para isto, precisamos de alguns conceitos importantes. Em primeiro lugar, vamos recordar que dados dois vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a distância entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é dada por

$$||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_n - u_n)^2},$$

onde a função $||\,.\,|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*. Observe ainda que

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2} = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}.$$

Desta forma, uma *bola aberta em* $\mathbb{R}^n$ *de raio* r *com centro em* $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, que denotaremos por $B_r(X_0)$, é definida por

$$B_r(X_0) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 < r^2\}$$

e, uma *bola fechada em* $\mathbb{R}^n$ *de raio* r *com centro em* $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, que denotaremos por $\overline{B_r(X_0)}$, é definida por

$$\overline{B_r(X_0)} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 \leq r^2\}.$$

Desta forma, no plano ($\mathbb{R}^2$), temos que uma bola aberta de raio r com centro em (x_0, y_0) é o conjunto de pontos que estão dentro da circunferência de raio r com centro em (x_0, y_0), cuja equação é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. E, no espaço ($\mathbb{R}^3$), temos que uma bola aberta de raio r com centro em (x_0, y_0, z_0) é o conjunto de pontos que estão dentro da esfera de raio r com centro em (x_0, y_0, z_0), cuja equação é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Vamos definir agora *pontos interiores*, *conjuntos abertos*, *vizinhança*, *pontos de acumulação*, *pontos de fronteira* e *conjuntos fechados*.

DEFINIÇÃO 5.1.1: (Ponto Interior) Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $X_0 \in A$ é um *ponto interior* de A se existe uma bola aberta com centro em X_0 inteiramente contida em A.

DEFINIÇÃO 5.1.2: (Conjunto Aberto) Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que A é um *conjunto aberto* se todos os seus pontos são pontos interiores.

Exemplo 5.1.1: Toda bola aberta $B_r(X_0) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 < r^2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Em particular, a bola aberta $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.1.2: O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

DEFINIÇÃO 5.1.3: (Vizinhança) Uma vizinhança de $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto que contém X_0.

Exemplo 5.1.3: Toda bola aberta $B_r(X_0) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 < r^2\}$ é uma vizinhança de X_0.

DEFINIÇÃO 5.1.4: (Ponto de Acumulação) Dizemos que $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se toda bola aberta com centro em X_0 contém pelo menos um ponto $X \in A$, $X \neq X_0$.

Exemplo 5.1.4: O conjunto dos pontos de acumulação da bola aberta $B_1(0,0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \in x^2 + y^2 < 1\}$ é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \in x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exemplo 5.1.5: O conjunto dos pontos de acumulação da bola fechada $\overline{B_1(0,0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \in x^2 + y^2 \leq 1\}$ é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \in x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exemplo 5.1.6: O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\mathbb{R}^{\nvDash} \backslash \{(0,0)\}$ é todo o plano.

Exemplo 5.1.7: O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\overline{B_1(0,0)} \cup \{(2,0)\}$ é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \in x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Observação 5.1.1: Se $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação do conjunto A, podemos nos aproximar de X_0, o quanto quisermos, por uma sequência de pontos onde todos os pontos pertencem a A. Esta definição será necessária para apresentar o conceito de limite de funções de várias variáveis reais, pois a possibilidade de aproximação de um ponto em $\mathbb{R}^n$ é bem mais ampla do que simplesmente se aproximar pela direita ou pela esquerda, ou através de uma combinação pela direita e pela esquerda, que eram os casos possíveis de aproximação em se tratando de pontos na reta.

DEFINIÇÃO 5.1.5: (Ponto de Fronteira e Fronteira) Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de fronteira* de A, se toda bola aberta com centro em X_0 possuir pelo menos um ponto que pertence a A e um ponto que não pertence a A. O conjunto dos pontos de fronteira de um conjunto A é chamado de *fronteira* de A. A fronteira de A é denotada por ∂A.

Exemplo 5.1.8: A fronteira da bola aberta $B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 < 1\}$ é a circunferência $x^2+y^2=1$.

Exemplo 5.1.9: A fronteira da bola fechada $\overline{B_1(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 \leq 1\}$ é a circunferência $x^2+y^2=1$.

Exemplo 5.1.10: A fronteira do conjunto $\overline{B_1(0,0)} \cup \{(2,0)\}$ é a circunferência $x^2+y^2 = 1$ e o ponto $(2,0)$.

DEFINIÇÃO 5.1.6: (Conjunto Fechado) Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que A é um *conjunto fechado* se ele contém todos os seus pontos de fronteira.

Exemplo 5.1.11: Toda bola fechada $\overline{B_r(X_0)} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 \leq r^2\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$. Em particular, a bola fechada $\overline{B_r(x_0,y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.1.12: O conjunto $\overline{B_1(0,0)} \cup \{(2,0)\}$ é um conjunto fechado.

Exemplo 5.1.13: O conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$.

Vamos definir agora *conjuntos limitados* e *conjuntos compactos*.

DEFINIÇÃO 5.1.7: (Conjunto Limitado) Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que A é um *conjunto limitado* se existe $M > 0$ tal que $A \subseteq R$, onde R é o "retângulo"em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$R = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, -M \leq x_1 \leq M, -M \leq x_2 \leq M, ..., -M \leq x_n \leq M, \}.$$

Exemplo 5.1.14: Toda bola aberta, em $\mathbb{R}^n$, de raio r e centro em X_0 é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$ e toda bola fechada, em $\mathbb{R}^n$, de raio r e centro em X_0 também é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.1.15: O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 4\}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.1.16: O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ NÃO é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$.

DEFINIÇÃO 5.1.8: (Conjunto Compacto) Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que A é um *conjunto compacto* se ele é fechado e limitado.

Exemplo 5.1.17: Toda bola fechada, em $\mathbb{R}^n$, de raio r e centro em X_0 é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.1.18: O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 4\}$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.1.19: O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ NÃO é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$, pois, apesar de ser um conjunto fechado, ele não é um conjunto limitado.

Vamos agora passar à definição de limite.

5.2 Limite

A essência do conceito de limite continua sendo a que vimos em Cálculo 1A. Vamos portanto recordá-la.

Recordação de limite de funções reais de uma variável real: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real. Suponha que f está definida no intervalo aberto I contendo x_0 (exceto possivelmente no próprio x_0). Dizemos que $f(x)$ *tende a* l, $l \in \mathbb{R}$, *quando* x *tende a* x_0, cuja notação é $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Tradução: Dada uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no intervalo aberto I contendo x_0 (exceto possivelmente no próprio x_0), dizemos que f possui limite l quando x tente a x_0 se, dado uma distância máxima que permitimos que $f(x)$ se afaste de l (uma dada distância ε), sempre é possível encontrar uma outra distância (uma distância δ), tal que se x não se afastar de x_0 uma distância maior do que esta distância encontrada (a distância δ), o valor da função f, para pontos nesta vizinhança limitada, estará próximo de l o quanto queremos (a distância dada ε).

Observação 5.2.1: Note que um ponto x_0 pertencente a um intervalo aberto I é trivialmente um ponto de acumulação de I.

O que devemos fazer então para definir limite de funções reais de n variáveis reais é simplesmente adaptar o conceito de distância, que antes, em Cálculo 1A, era dado pelo módulo, uma vez que o domínio da função era um subconjunto da reta, para o conceito de distância em $\mathbb{R}^n$, que é onde os novos pontos do domínio estão.

DEFINIÇÃO 5.2.1: (Limite) Seja f a função real de várias variáveis $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(f)$. Dizemos que $f(X)$ *tende a* l, $l \in \mathbb{R}$, *quando* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *tende a* X_0, cuja notação é $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = l$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $X \in Dom(f)$,

$$0 < ||X - X_0|| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \delta \Rightarrow |f(X) - l| < \varepsilon.$$

Desta forma, para a função real de duas variáveis

$$\begin{array}{rccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array},$$

temos que $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in Dom(f)$,

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Exemplo 5.2.1: Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Solução: Aplicando a definição de limite, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon.$$

Observando que

$$\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{5x^2}{x^2+y^2}|y| \overset{*}{\leq} 5|y| \overset{**}{\leq} 5\sqrt{x^2+y^2}, \tag{1}$$

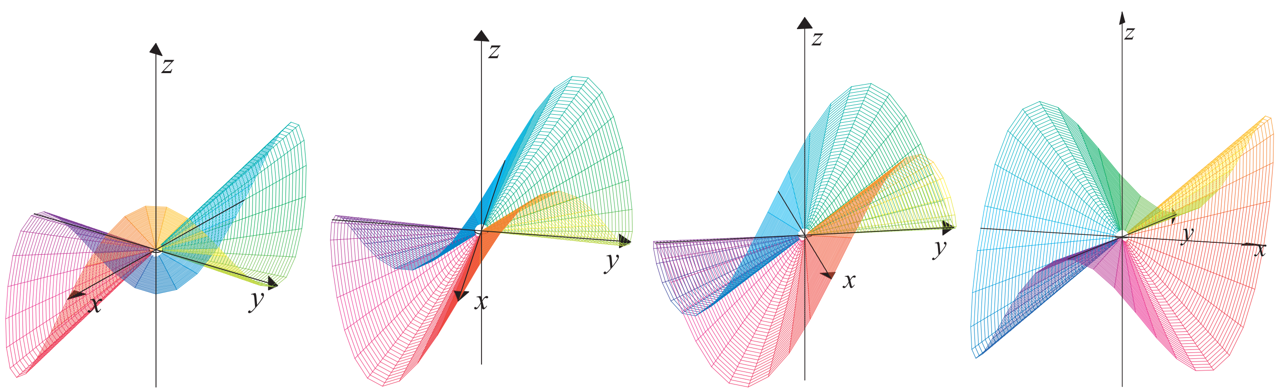
para $\varepsilon > 0$ dado, basta fazer $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. De fato, se $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, segue que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow 5\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon,$$

portanto, de (1), temos que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon,$$

conforme desejado. Explicações das desigualdades: $(*)\ 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ e $(**)\ |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$). Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para facilitar a visualização.



♡

Vejamos agora as propriedades de limite. Cabe ressaltar que vimos todas as versões destas propriedades para funções da reta na reta em Cálculo 1A.

TEOREMA 5.2.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(f)$, então

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = l \Leftrightarrow \lim_{X \to X_0} f(X) - l = 0.$$

TEOREMA 5.2.2: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(f)$, então

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = l \Leftrightarrow \lim_{Y \to 0} f(Y + X_0) = l.$$

TEOREMA 5.2.3: (Propriedades de Limite) Considere as funções $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{X \to X_0} f(X) = l$, $\lim_{X \to X_0} g(X) = m$ e seja $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que

a) $\lim_{X \to X_0}(f \pm g)(X) = l \pm m$;
b) $\lim_{X \to X_0}(kf)(X) = kl$;
c) $\lim_{X \to X_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{l}{m}$, se $m \neq 0$;
d) $\lim_{X \to X_0} |f(X)| = |l|$.

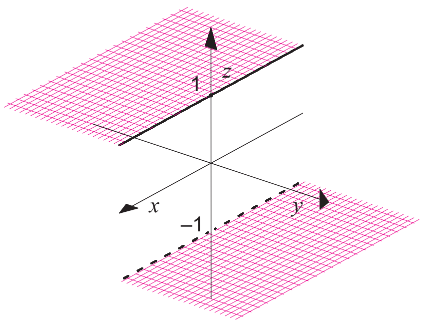
TEOREMA 5.2.4: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(f)$, então

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = 0 \Leftrightarrow \lim_{X \to X_0} |f(X)| = 0.$$

Observação 5.2.1: Note que é fundamental no Teorema 5.2.4 que o valor do limite seja 0, pois caso contrário, é possível ter $\lim_{X \to X_0} |f(X)| = l \neq 0$, sem que sequer exista $\lim_{X \to X_0} f(X)$. Por exemplo, para a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \leq 0 \\ -1, & \text{se } y > 0 \end{cases},$$

temos que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} |f(x, y)| = \lim_{(x,y) \to (0,0)} 1 = 1 \neq 0$, enquanto que não existe $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.



TEOREMA 5.2.5: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função polinomial, então $\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$.

Exemplo 5.2.2: Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 5x^2y + xy^2$.

Solução: Como a função $f(x,y) = 5x^2y + xy^2$ é polinomial, temos pelo Teorema 5.2.5 acima que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 5x^2y + xy^2 \\ &= f(0,0) = 0. \end{aligned}$$

♡

TEOREMA 5.2.6: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função racional, e seja X_0 um ponto do $Dom(f)$, então $\lim_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.

Exemplo 5.2.3: Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

Solução: Observe que o domínio da função racional $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ é dado por $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$. Portanto, o ponto $(x_0,y_0) = (1,2) \in Dom(f)$. Desta forma, pelo Teorema 5.2.6 acima que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \\ &= f(1,2) = \frac{5.1^2.2}{1^2+2^2} = 2. \end{aligned}$$

♡

TEOREMA 5.2.7: (Teorema do Confronto (ou do Sanduiche)) Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação de D. Suponha que existe uma vizinhança V_{X_0} de X_0 tal que $f(X) \leq g(X) \leq h(X)$ para todo $X \in V_{X_0} \cap D$, exceto possivelmente no próprio ponto X_0. Desta forma, se $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = l$ e $\lim\limits_{X\to X_0} h(X) = l$ então, $\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ também existe e

$$\lim_{X\to X_0} g(X) = l.$$

TEOREMA 5.2.8: (Teorema do Anulamento) Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação de D. Se $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = 0$ e existe uma vizinhança V_{X_0} de X_0 tal que g é limitada em $V_{X_0} \cap D$, então $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)g(X)$ também existe e

$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = 0.$$

Exemplo 5.2.4: Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

Solução: Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$. Além disso, a função $f(x,y) = 5y$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 5y = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 5y \,.\, \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(Esta função é a mesma do Exemplo 5.2.1.)

♡

Exemplo 5.2.5: Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$.

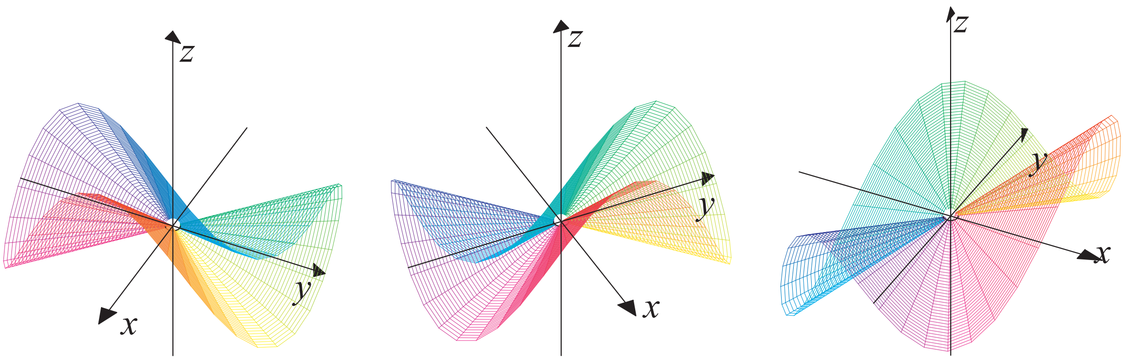
Solução: Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que

$$0 \leq \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Além disso, a função $f(x,y) = x$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \,.\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$.



♡

TEOREMA 5.2.9: Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja X_0 um ponto de acumulação de $Dom(g)$, suponha que $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$ e suponha ainda que a é um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Se f não está definida em a ou se f é contínua em a, então

$$\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u).$$

Observação 5.2.2: Utilizamos a versão deste teorema dada em Cálculo 1A ($g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) para calcular limites do tipo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan x}$. Neste caso, $g(x) = \tan x$, $f(u) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{u}$, $x_0 = 0$, $a = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$ e $f(u) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{u}$ não está definida em $a = 0$, de modo que

$$\lim_{x\to x_0} f(g(X)) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan x} = \lim_{u\to a} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Exemplo 5.2.6: Verifique se $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2}$ existe.

Solução: Neste caso, observe que desejamos saber $\lim_{X\to X_0} f(g(X))$, onde $g(x,y) = x(y-2)$, $f(u) = \dfrac{1-\cos u}{u^2}$, $X_0 = (1,2)$, $a = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} x(y-2) = 0$ e $f(u) = \dfrac{1-\cos u}{u^2}$ não está definida em $a = 0$. Portanto, pelo Teorema 5.2.9, temos que

$$\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2} = \lim_{u\to a} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

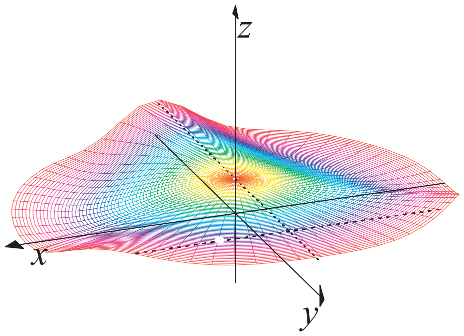
Observe que também podemos aplicar este mesmo raciocínio para determinar

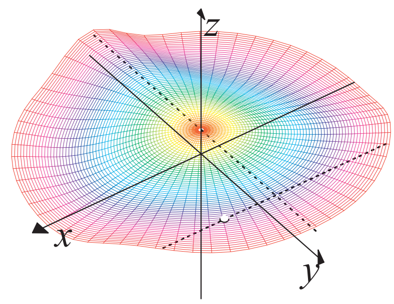
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,2)} \frac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2}.$$

Desta forma, também obteremos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,2)} \frac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2} = \frac{1}{2} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2}.$$

Abaixo temos um esboço do gráfico de f sob diferentes ângulos para facilitar a visualização. Observe que o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2}$ é dado por $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 2\}$, de modo que os pontos correspondentes às duas retas $x = 0$ e $y = 2$, encontram-se tracejados.





♡

Observação 5.2.3: Caso f esteja definida em a e não seja contínua neste ponto, as funções reais de variáveis reais abaixo servem para exemplificar (conforme visto em Cálculo 1A) que a igualdade $\lim\limits_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim\limits_{u\to a} f(u)$ pode falhar. Considere as funções $f(u) = \begin{cases} u+1, & u \neq 1 \\ 5, & u = 1 \end{cases}$ e $g(x) = 1$ para todo x real. Escolhendo $x_0 = 3$, observe que $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = \lim\limits_{x\to 3} 1 = 1$, de modo que $a = 1$. Além disso, temos que $\lim\limits_{u\to 1} f(u) = 2$ mas, $\lim\limits_{x\to 3} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to 3} 5 = 5 \neq 2 = \lim\limits_{u\to 1} f(u)$.

Observação 5.2.4: Sabendo que $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$, se existir uma vizinhança V_{X_0} de X_0 tal que $g(X) \neq a$ para todo $X \in V_{X_0} \cap Dom(g)$, $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$, a igualdade $\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u)$ do Teorema 5.2.9 também irá valer, independente do comportamento de f em a. O enunciado do teorma para este caso seria assim: *"Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja X_0 um ponto de acumulação de $Dom(g)$ e suponha que $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$. Se a é um ponto de acumulação de $Dom(f)$ e se existe uma vizinhança V_{X_0} de X_0 tal que $g(X) \neq a$ para todo $X \in V_{X_0} \cap Dom(g)$, então $\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u)$."*

Observe que, pelo o Teorema 5.2.9 acima, se $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$ e f é uma função contínua em a, então,

$$\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u) = f(a) = f\left(\lim_{X\to X_0} g(X)\right).$$

Em outras palavras, temos que se f é uma função contínua, podemos "passar o limite para dentro", de modo que: "o limite da f é igual a f do limite". Pela importância deste resultado, que é a própria caracterização de funções contínuas (conforme visto em Cálculo 1A), vamos enunciá-lo abaixo.

COROLÁRIO 5.2.1: Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja X_0 um ponto de acumulação de $Dom(g)$ e suponha que $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$. Se a é um ponto de acumulação de $Dom(f)$ e f é contínua em a, então

$$\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = f\left(\lim_{X\to X_0} g(X)\right).$$

Agora vamos ver um teorema que será bastante útil para demonstrar que uma dada função NÃO possui limite.

TEOREMA 5.2.10: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(f)$. Suponha que $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = l$. Considere agora a curva C parametrizada pela função contínua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, tal que $\gamma(t_0) = X_0$, $t_0 \in [a,b]$. Suponha que, para todo $t \neq t_0$, tem-se que $\gamma(t) \neq X_0$, e que, $\gamma(t) \in Dom(f)$, $\forall t \in [a,b]$, $t \neq t_0$. Neste caso, segue que

$$\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = l,$$

ou um limite lateral apropriado.

Observe que se for possível encontrar uma curva $C_1 \subset Dom(f) \cup \{X_0\}$, parametrizada pela função γ_1, e uma curva $C_2 \subset Dom(f) \cup \{X_0\}$, parametrizada pela função γ_2, de modo que $\gamma_1(u_0) = X_0 = \gamma_2(v_0)$ e tal que $\lim\limits_{u\to u_0} f(\gamma_1(u)) \neq \lim\limits_{v\to v_0} f(\gamma_2(v))$ (ou um limite lateral apropriado), podemos concluir pelo Teorema 5.2.10 acima, que NÃO existe $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$.

Exemplo 5.2.7: Verifique se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ existe.

Solução: Considere $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Vamos mostrar que o limite acima não existe apresentando dois caminhos distintos de aproximação, de modo que o limite ao longo destes caminhos não sejam iguais. Para isto, considere a curva C_1 parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$ e a curva C_2 parametrizada por $\gamma_2(t) = (0,t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando separadamente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0-t^2}{0+t^2} = \lim_{t\to 0^+} -1 = -1.$$