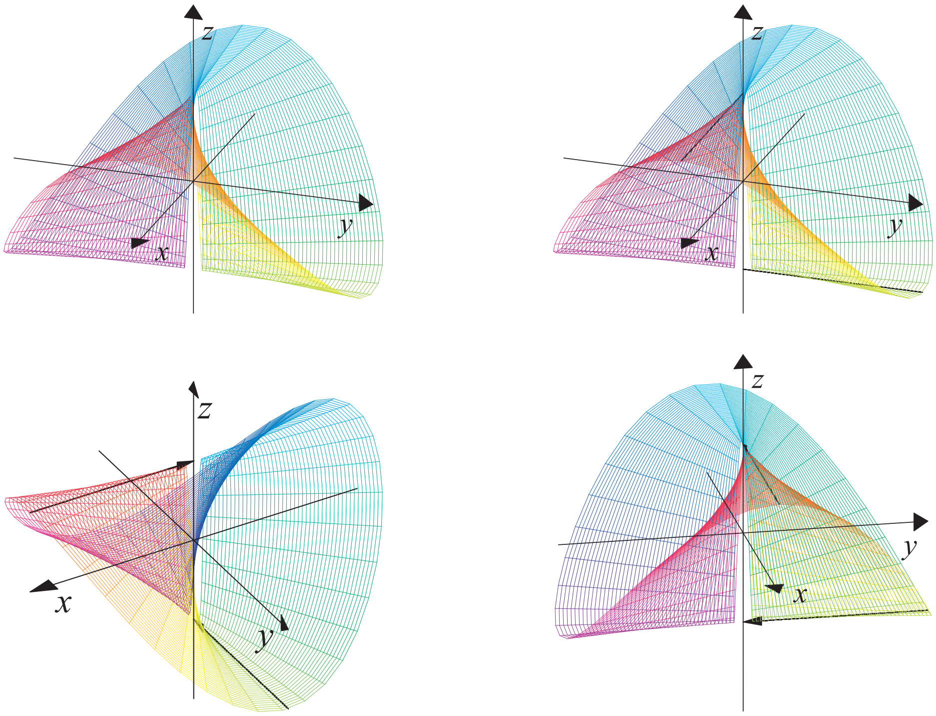
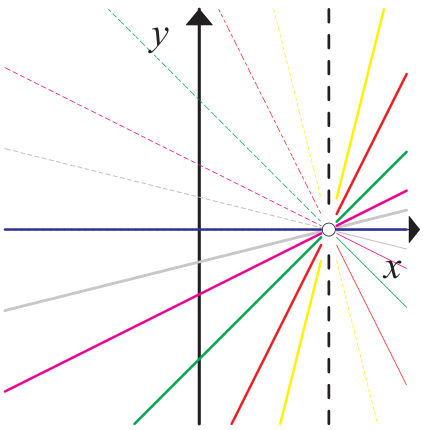
Como os limites ao longo de dois diferentes caminhos são distintos, temos que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação C_1 e C_2.



♡

Exemplo 5.2.8: Abaixo encontram-se esboçadas as curvas de nível da função $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}$. Curvas de cores e estilos diferentes são referentes a diferentes níveis. Com base nestas informações, verifique se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ existe. Justifique.



Solução: Vamos chamar a curva vermelha e com traço ininterrupto de C_1 e ela será correspondente ao nível k_1, vamos chamar a curva azul e com traço ininterrupto de C_2 e ela será correspondente ao nível k_2 e vamos chamar a curva verde tracejada de C_3 e ela será correspondente ao nível k_3. Conforme dito, curvas de cores e estilos diferentes são referentes a diferentes níveis. Desta forma, temos que k_1 k_2 e k_3 são todos distintos entre si. Portanto, calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ ao longo das curvas C_1, C_2 e C_3, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} k_1 = k_1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} k_2 = k_2,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_3}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_3}} k_3 = k_3.$$

Sendo assim, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ não existe pois, encontramos diferentes caminhos (curvas de níveis correspondentes a diferentes níveis) ao longo dos quais os valores dos limites são distintos. Atenção: bastavam apenas duas curvas.

♡

Observação 5.2.5: Conforme verificado no exemplo anterior, se estivermos analisando $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ e soubermos que diferentes curvas de nível da função f "desembocam"em (x_0, y_0), isto nos informa que o limite mencionado não existe, pois cada curva de nível C_i, correspondente ao nível k_i, fornece um caminho ao longo do qual o limite vale k_i. A função do exemplo anterior é a função $f(x,y) = \dfrac{y}{x-1}$ do Exemplo 5.3.1c. As curvas de nível k_i de f são as retas $y = k_i(x-1)$. Por exemplo, para $k_1 = 0$, temos a reta $y = 0$; para $k_2 = 1$, temos a reta $y = x - 1$ e para $k_3 = -2$, temos a reta $y = -2x + 2$. Desta forma, fazendo C_1 a curva de nível $k_1 = 0$ ($C_1 : y = 0,\ x \neq 1$) parametrizada por $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \neq 1$, C_2 a curva de nível $k_2 = 1$ ($C_2 : y = x - 1$, $x \neq 1$) parametrizada por $\gamma_2(t) = (t, t-1)$, $t \neq 1$ e C_3 a curva de nível $k_3 = -2$ ($C_3 : y = -2x + 2,\ x \neq 1$) parametrizada por $\gamma_3(t) = (t, -2t + 2)$, $t \neq 1$ e calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-1}$ ao longo das curvas C_1, C_2 e C_3, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{y}{x-1} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t-1} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} \frac{y}{x-1} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t-1}{t-1} = \lim_{t\to 0} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \text{ao longo de } C_3}} \frac{y}{x-1} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_3(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{-2t+2}{t-1} = \lim_{t\to 0} -2 = -2,$$

Realmente, conforme dito, os limites ao longo das diferentes curvas de nível k_i, fornecem limites distintos e iguais a k_i. Portanto, o limite de fato não existe.

Exemplo 5.2.9: Use a observação acima para verificar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ não existe.

Solução: Neste caso, observe que

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -x\}$$

e que $Im(f) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f é dado por

$$C_k(f) = \left\{(x,y) \in Dom(f) \mid \frac{xy}{x+y} = k\right\}.$$

Para $k = 0$, temos que as curvas de nível zero de f são as retas $x = 0$ e $y = 0$, $(x,y) \neq (0,0)$. Já se $k \neq 0$, temos que $\dfrac{xy}{x+y} = k \Leftrightarrow xy = k(x+y) \Leftrightarrow y(x-k) = kx$, $x \neq -y$. Portanto, a curva de nível $k \neq 0$ de f é o gráfico das função $g(x) = \dfrac{kx}{x-k}$, $x \neq k$, retirando os pontos que pertencem à reta $x = -y$ (pois estes pontos não pertencem ao domínio de f). Para descobrir que pontos do gráfico de g devem ser retirados, procedemos com a seguir.

$$x \neq -y \text{ e } y = \frac{kx}{x-k} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{kx}{x-k} \Leftrightarrow x^2 - kx \neq -kx \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Desta forma, temos abaixo as curvas de nível de f relativas a diferentes valores de k escolhidos.

Para $k = 1$, a curva de nível de f é dada por $y = \dfrac{x}{x-1}$, $x \neq 0$ (e $x \neq 1$).

Para $k = 2$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{2x}{x-2}$, $x \neq 0$ (e $x \neq 2$).

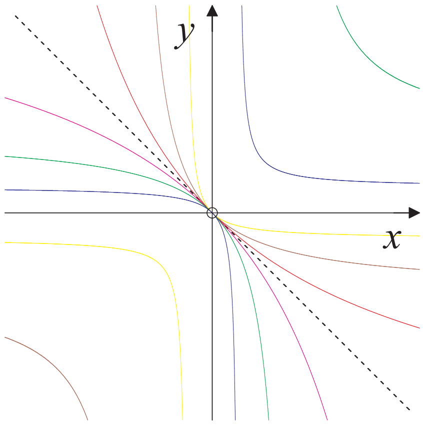
Para $k = 3$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{3x}{x-3}$, $x \neq 0$ (e $x \neq 3$).

Para $k = -1$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{-x}{x+1}$, $x \neq 0$ (e $x \neq -1$).

Para $k = -2$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{-2x}{x+2}$, $x \neq 0$ (e $x \neq -2$).

Para $k = -3$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{-3x}{x+3}$, $x \neq 0$ (e $x \neq -3$).

Algumas curvas de nível de f encontram-se esboçadas abaixo.

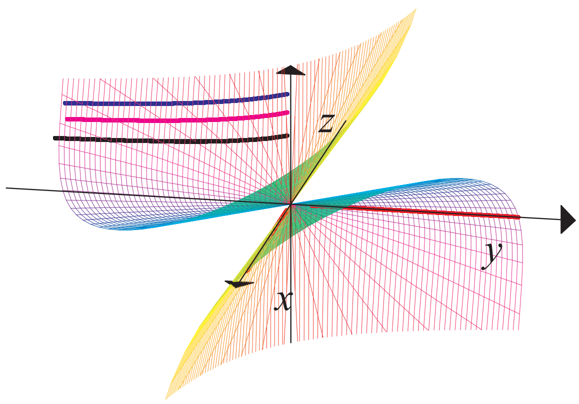


Desta forma, fazendo C_1 a parte da curva de nível $k_1 = 0$ parametrizada por $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t > 0$ e C_2 a parte da curva de nível $k_2 = 1$ parametrizada por $\gamma_2(t) = (t, t/(t-1))$, $0 < t < 1$ e calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t+0} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\,\dfrac{t}{t-1}}{t+\dfrac{t}{t-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dfrac{t^2}{t-1}}{\dfrac{t^2-t+t}{t-1}} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1.$$

Realmente, conforme dito, os limites ao longo de partes de curvas de nível relativas a níveis diferentes fornecem limites distintos, de modo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ não existe. Abaixo temos um esboço do gráfico de f com alguns caminhos de aproximação ilustrados.



♡

Observação 5.2.6: No exemplo acima (Exemplo 5.2.9) observe que ao longo de qualquer reta que contém a origem, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y} = 0$. De fato, considere C_m a curva dadas na forma parametrica por $\gamma_m(t) = (t, mt)$, $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_m}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_m(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{t+mt} = \lim_{t\to 0} \frac{mt}{1+m} = 0.$$

5.3 Continuidade

DEFINIÇÃO 5.3.1: (Continuidade) Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in Dom(f)$ um ponto de acumulação do $Dom(f)$. Dizemos que f é *contínua* em X_0, se $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.

Exemplo 5.3.1: Verifique se

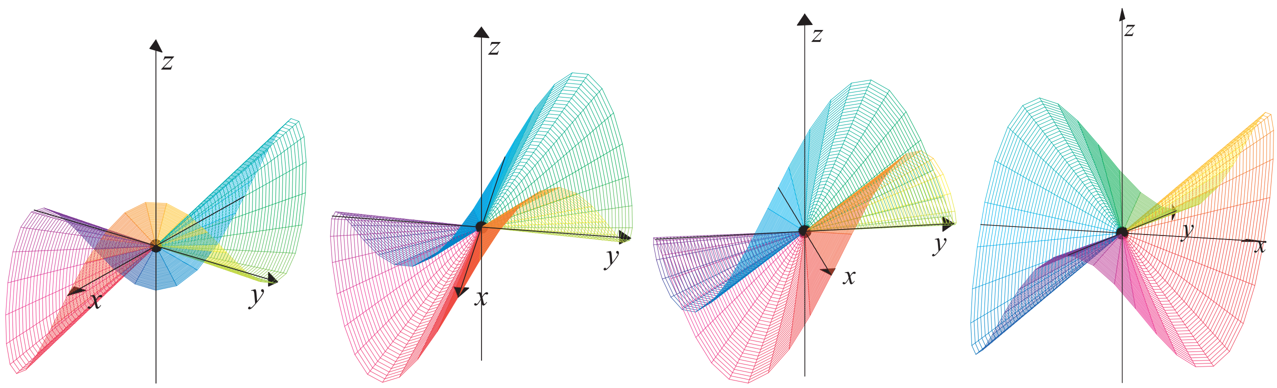
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Solução: Vimos no Exemplo 5.2.4 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$. Portanto, temos que g é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0 = g(0,0).$$

Abaixo temos um esboço do gráfico de g, observe que o "furo"na origem que existia referente ao esboço do gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ (Exemplos 5.2.1 e 5.2.4), foi "tapado".



♡

Exemplo 5.3.2: Verifique se

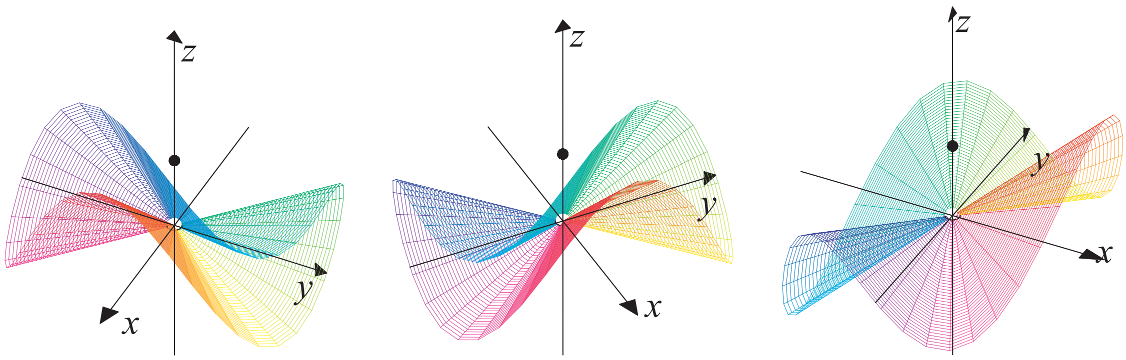
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 3; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Solução: Vimos no Exemplo 5.2.5 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = 0$. Portanto, temos que g não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = 0 \neq 3 = g(0,0).$$

Abaixo temos um esboço do gráfico da função g.



♡

Exemplo 5.3.3: Verifique se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Solução: Vimos no Exemplo 5.2.7 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, f não é contínua em $(0,0)$.

♡

Exemplo 5.3.4: Verifique se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Solução: Como aparentemente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ não parece se encaixar em nenhum dos teoremas vistos anteriormente (trata-se apenas de uma função limitada sozinha), vamos partir para tentar mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Para isto, vamos escolher dois caminhos de aproximação diferentes e mostrar que ao longo destes caminhos os limites não são iguais. Considere portanto a curva C_1 parametrizada pela função $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$ e a curva C_2 parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Desta forma, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes são distintos, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, f não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \nexists.$$

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação C_1 e C_2. Além disto, vamos incluir um novo caminho de aproximação, ao longo da curva C_3, que é interessante em matéria de visualização. Considere portanto a curva C_3 parametrizada pela função $\gamma_3(t) = (t,-t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ao longo da curva C_3, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_3}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_3(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$