♡

Exemplo 5.3.5: Verifique se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Solução: Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é limitada, uma vez que

$$0 \leq \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = 1,$$

de modo que

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

Além disso, a função $f(x,y) = 2x$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

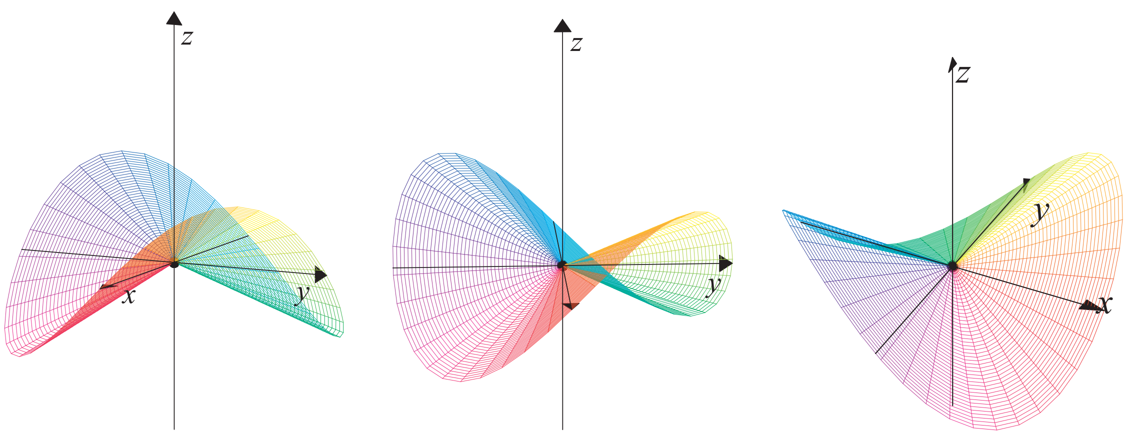
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \, . \, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Portanto, temos que f é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0).$$

♡

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sob diferentes ângulos.



$\heartsuit$

Vejamos agora as propriedades de continuidade.

TEOREMA 5.3.1: Seja $k \in \mathbb{R}$ e sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funções contínuas em X_0. Neste caso, temos que

a) As funções kf, $f \pm g$, fg também são contínuas em X_0;
b) Se $g(X_0) \neq 0$, então a função $\dfrac{f}{g}$ também é contínua em X_0.

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $B \subseteq Dom(f)$ um conjunto de pontos de acumulação do $Dom(f)$. Dizemos então que f é *contínua* em B, se f é *contínua* em todos os pontos de B.

TEOREMA 5.3.2: As funções polinomiais em $\mathbb{R}^n$ são contínuas em $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 5.3.3: As funções racionais em $\mathbb{R}^n$ são contínuas em seus domínios.

Exemplo 5.3.6: Seja

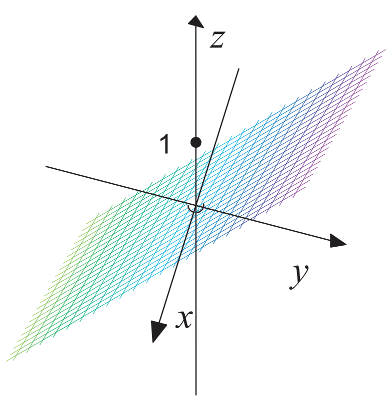
$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2y; & (x,y) \neq (0,0) \\ 1; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde f é contínua.

Solução: Observe que no aberto $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = x + 2y$ que, por ser polinomial, é contínua (Teorema 5.3.2). Portanto temos que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Resta então analisar se f é contínua na origem. Neste caso, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x + 2y = 0 \neq 1 = f(0,0),$$

de modo que f não é contínua na origem. Abaixo temos um esboço do gráfico da função f.



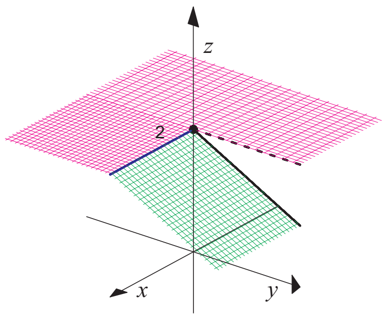
♡

Exemplo 5.3.7: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y}{2} + 2; & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 2; & \text{no restante} \end{cases}.$$

Esboce o gráfico de f determine os pontos onde f é contínua.

Solução:



Pelo gráfico esboçado acima, podemos ver que f é contínua em todo plano, exceto no conjunto da forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 0\}$. (Observe que f também é contínua na origem.) De fato, dividindo em casos, temos que:

Caso 1: se $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, então $f(x_0, y_0) = -\dfrac{y_0}{2} + 2$, de modo que f é contínua por ser polinomial.

Caso 2: se $x_0 < 0$ ou $y_0 < 0$, $f(x_0, y_0) = 2$, de modo que f é contínua por ser constante.

Caso 3: se $y_0 = 0$ e $x_0 > 0$, f também é contínua, pois

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y\geq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y\geq 0}} -\frac{y}{2} + 2 = 2 = f(x_0, 0)$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y\leq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y\leq 0}} 2 = 2 = f(x_0, 0).$$

Caso 4: se $(x_0, y_0) = (0,0)$, f também é contínua, pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 2$. De fato,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\geq 0, y\geq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\geq 0, y\geq 0}} -\frac{y}{2} + 2 = 2$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{no resto}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{no resto}}} 2 = 2.$$

Caso 5: se $x_0 = 0$ e $y_0 > 0$, f é descontínua, pois $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)$. De fato,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x\geq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x\geq 0}} -\frac{y}{2} + 2 = -\frac{y_0}{2} + 2 < 2, (y_0 > 0)$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\leq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0,0)\\ x\leq 0}} 2 = 2,$$

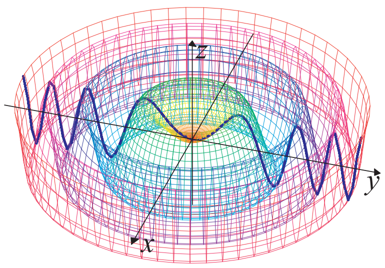
♡

Como consequência do Corolário 5.2.2 da seção anterior, temos que a composta de funções contínuas também é uma função contínua. Confira o corolário a seguir.

COROLÁRIO 5.3.1: Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja X_0 um ponto de acumulação de $Dom(g)$ e seja $g(X_0)$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Se g é contínua em X_0 e f é contínua em $g(X_0)$, então $f \circ g$ também é contínua em X_0.

Exemplo 5.3.8: Verifique se a função $h(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

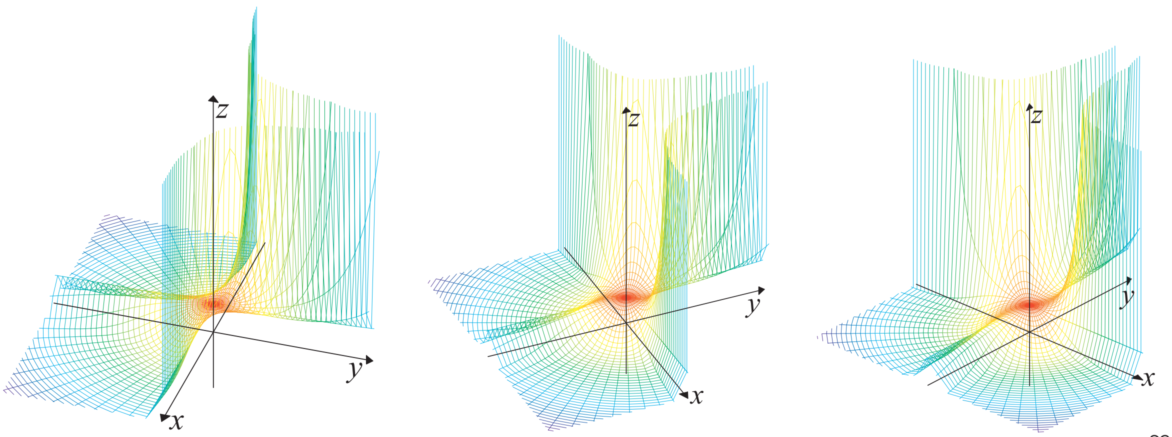
Solução: Observe que $h(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$, é a composta das funções $f(t) = \operatorname{sen} t$ e $g(x,y) = x^2+y^2$, i.e. $h(x,y) = f(g(x,y))$. Como a função g é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 5.3.2), e a função f também é uma função contínua em toda reta, pelo Corolário 5.3.1, temos que h é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.



♡

Exemplo 5.3.9: Verifique se a função $h(x,y) = e^{x^2y}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Observe que $h(x,y) = e^{x^2y}$, é a composta das funções $f(t) = e^t$ e $g(x,y) = x^2y$, i.e. $h(x,y) = f(g(x,y))$. Como a função g é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 5.3.2), e a função f também é uma função contínua em toda reta, pelo Corolário 5.3.1, temos que h é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.



♡

Exemplo 5.3.10: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde f é contínua.

Solução: Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, que é o quociente das funções $p(x,y) = x+y$ e $q(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. A função p é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 5.3.2) e a função q é a composta da função $f_1(t) = \sqrt{t}$, que é uma função contínua em seu domínio ($Dom(f_1) = [0,\infty)$), com a função $g_1(x,y) = x^2+y^2$, que é também trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 5.3.2). Como q não se anula em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos pelo Teorema 5.3.1b que f é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, pois f é o quociente de duas funções contínuas, onde a função do denominador não se anula. Vamos agora analisar se f é contínua na origem. Como aparentemente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não parece se encaixar em nenhum dos teoremas vistos anteriormente (trata-se apenas de uma função limitada sozinha), vamos partir para tentar mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não existe. Para isto, vamos escolher dois caminhos de aproximação diferentes e mostrar que ao longo destes caminhos os limites não são iguais. Considere portanto a curva C_1 parametrizada pela função $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$ e a curva C_2 parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2}|t|}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2}t} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Desta forma, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes são distintos, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não existe. Portanto, f não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

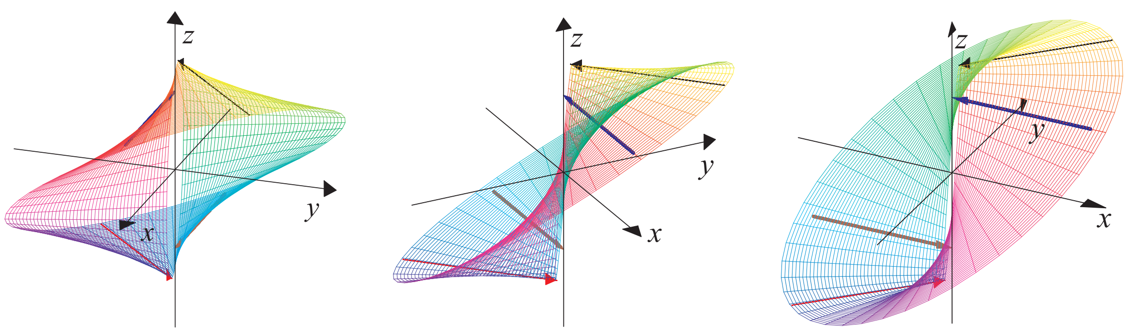
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \nexists.$$

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação C_1 e C_2. Além disto, vamos incluir dois novos caminhos de aproximação, ao longo das curvas C_3 e C_4, que são interessantes em matéria de visualização. Considere portanto a curva C_3 parametrizada pela função $\gamma_3(t) = (t,0)$, $t \leq 0$ e a curva C_4 parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \leq 0$. Desta forma, calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ao longo das curvas C_3 e C_4, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_3}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^-} f(\gamma_3(t)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{-t} = \lim_{t\to 0^-} -1 = -1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_4}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^-} f(\gamma_4(t)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{2}|t|}$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{-\sqrt{2}t} = \lim_{t\to 0^-} -\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$



♡

Exemplo 5.3.12: Seja

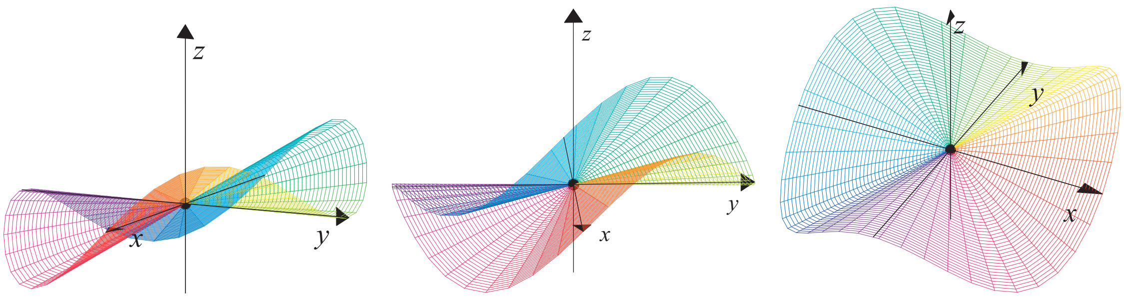
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde f é contínua.

Solução: Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, que é uma função racional, cujo denominador não se anula neste conjunto. Desta forma, pelo Teorema 5.3.3, temos que f é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Vamos agora analisar se f é contínua na origem. Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que $0 \le \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$. Além disso, a função $h(x,y) = y$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Concluimos assim que f também é contínua na origem, sendo portanto contínua em todo $\mathbb{R}^2$.



♡

Exemplo 5.3.13: Seja

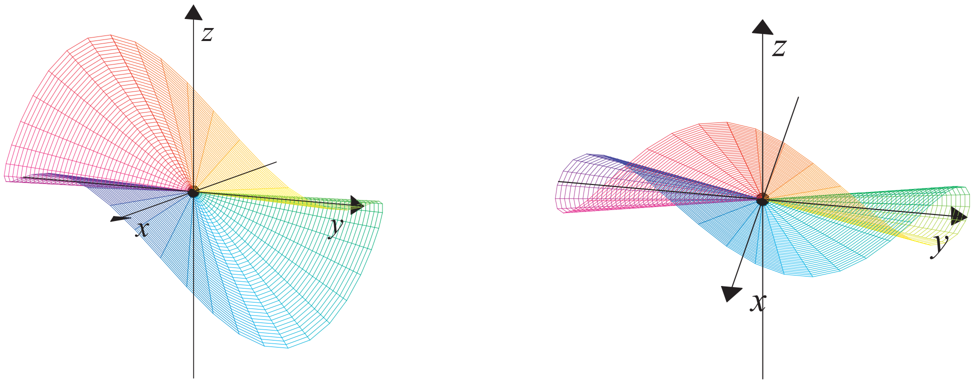
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde f é contínua.

Solução: Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, que é uma função racional, cujo denominador não se anula neste conjunto. Desta forma, pelo Teorema 5.3.3, temos que f é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Vamos agora analisar se f é contínua na origem. Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que $0 \le \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$. Além disso, a função $h(x,y) = x$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \, . \, \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Concluimos assim que f também é contínua na origem, sendo portanto contínua em todo $\mathbb{R}^2$. Abaixo temos um esboço do gráfico de f sob diferentes ângulos.



♡

Exemplo 5.3.14: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde f é contínua.

Solução: Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, que é uma função racional, cujo denominador não se anula neste conjunto. Desta forma, pelo Teorema 5.3.3, temos que f é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Vamos agora analisar se f é contínua na origem. Como aparentemente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não parece se encaixar em nenhum dos teoremas vistos anteriormente, vamos partir para tentar mostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Para isto, vamos escolher dois caminhos de aproximação diferentes e mostrar que ao longo destes caminhos os limites não são iguais. Considere portanto a curva C_1 parametrizada pela função $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$ e a curva C_2 parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t^2,t)$, $t \geq 0$ (inspirada nas curvas de nível estudadas no Exemplo 3.5.1f). Desta forma, calculando separadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

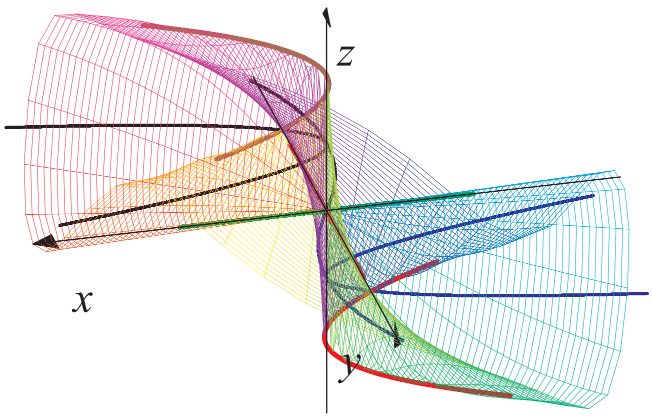
e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) \;=\; \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4}{2t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Desta forma, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes são distintos, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Portanto, f não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \nexists.$$

Concluimos assim que f é contínua apenas em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação C_1 e C_2.



♡

Observação 5.3.1: No exemplo acima (Exemplo 5.3.14) observe que ao longo de qualquer reta que contém a origem, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$. De fato, considere C_m a curva dadas na forma parametrica por $\gamma_m(t) = (t, mt)$, $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_m}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_m(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{m^2t^3}{t^2+m^4t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{m^2t}{1+m^2t^2} = 0.$$

5.4 Exercícios

Exercício 5.4.1: Determine se a função abaixo é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução: Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, que é o quociente das funções $p(x,y) = x^2$ e $q(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. A função p é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 5.3.2) e a função q é a composta da função $f_1(t) = \sqrt{t}$, que é uma função contínua em seu domínio ($Dom(f_1) = [0,\infty)$), com a função $g_1(x,y) = x^2 + y^2$, que é também trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 5.3.2). Como q não se anula em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos pelo Teorema 5.3.1b que f é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, pois é o quociente de duas funções contínuas, onde a função do denominador não se anula. Vamos agora analisar se f é contínua na origem. Observe que a função $g_2(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é limitada, uma vez que

$$0 \leq \left| \frac{x}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = 1.$$

Além disso, a função $f_2(x,y) = x$ é tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \ . \ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0).$$

Concluimos assim que f também é contínua na origem, sendo portanto contínua em todo $\mathbb{R}^2$.