PARTE 6

DERIVADAS PARCIAIS

6.1 Introdução

Vamos falar agora das derivadas parciais de uma função real de várias variáveis reais, $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Para simplificar, vamos começar com uma função em $\mathbb{R}^2$, para só depois generalizar o conceito de derivada parcial para funções em $\mathbb{R}^n$.

Seja

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) \end{array}$$

Vamos fixar $y = y_0$ e, com isto, criar uma função da reta na reta, g_{y_0}, definida como

$$g_{y_0}(x) := f(x, y_0).$$

Esta nova função definida é uma função real de variável real, bem estudada em Cálculo 1A, para a qual sabemos aplicar o conceito de diferenciabilidade. Sendo assim, se g_{y_0} for diferenciável em x_0, temos que existe $g'_{y_0}(x_0)$, a qual é dada pelo limite abaixo

$$g'_{y_0}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g_{y_0}(x_0 + h) - g_{y_0}(x_0)}{h}.$$

Definimos então a *derivada parcial de f com relação a x no ponto (x_0, y_0)*, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'_{y_0}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g_{y_0}(x_0 + h) - g_{y_0}(x_0)}{h},$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Encontramos também outras notações para a derivada parcial da função f com relação à variável x. Elas são: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x = D_x f = D_1 f$.

Vamos fazer a mesma coisa, só que agora com a variável x. Isto é, vamos fixar $x = x_0$ e criar a função da reta na reta, h_{x_0}, definida como

$$h_{x_0}(y) := f(x_0, y).$$

Esta nova função definida também é uma função real de variável real. Se h_{x_0} for diferenciável em y_0, temos que existe $h'_{x_0}(y_0)$ a qual é dada pelo limite

$$h'_{x_0}(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{h_{x_0}(y_0+k) - h_{x_0}(y_0)}{k}.$$

Definimos então a *derivada parcial de f com relação a y no ponto* (x_0, y_0), denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'_{x_0}(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{h_{x_0}(y_0+h) - h_{x_0}(y_0)}{k},$$

isto é

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

As notações para a derivada parcial da função f com relação à variável y, são então: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = f_y = D_y f = D_2 f$.

Para melhor entender estas novas definições, vamos aplicá-las para determinar as derivadas parciais da função no exemplo abaixo.

Exemplo 6.1.1: Determine as derivadas parciais de f, onde

$$f(x, y) = x^2 y + 2x.$$

Solução: Pela definição acima, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 y_0 + 2(x_0+h) - (x_0^2 y_0 + 2x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 y_0 + 2hx_0y_0 + h^2 y_0 + 2x_0 + 2h - x_0^2 y_0 - 2x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx_0y_0 + h^2 y_0 + 2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0y_0 + hy_0 + 2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x_0y_0 + hy_0 + 2 = 2x_0y_0 + 2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2(y_0+k) + 2x_0 - (x_0^2 y_0 + 2x_0)}{k} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 y_0 + x_0^2 k + 2x_0 - x_0^2 y_0 - 2x_0}{k} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 k}{k} = \lim_{h\to 0} x_0^2 = x_0^2.
\end{aligned}$$

♡

Observe que na hora de derivar com respeito a x, tudo se passou como se x fosse a única variável e y fosse apenas mais uma constante. Aconteceu o inverso na hora de derivar com respeito a y: encaramos y como a única variável e x como uma constante qualquer. Sendo assim, todas as regras de derivação de funções de uma variável podem ser naturalmente aplicadas, considerando que cada vez existe apenas uma variável e, a outra variável que "sobra", é vista apenas como uma outra constante. De fato, no exemplo acima concluimos que se $f(x,y) = x^2y + 2x$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2 \end{aligned}$$

Vamos aplicar esta observação nos exemplos abaixo.

Exemplo 6.1.2: Seja $f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$. Determine as derivadas parciais de f.

Solução: De acordo com o que foi observado, vamos abandonar a definição e aplicar as regras de derivação normalmente. Se tivéssemos que derivar a função

$$g(t) = \arctan(t^2 + C),$$

onde C é uma constante, não teriamos dúvida (espero que não) em afirmar que

$$g'(t) = \frac{2t}{1 + (t^2 + C)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Agora, sempre no nosso espírito de fornecer as definições e resultados da maneira mais geral possível, vamos generalizar o conceito de derivada parcial para uma função real definida em $\mathbb{R}^n$.

6.2 Derivadas Parciais

Seja

$$\begin{aligned} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

e seja $X_0 = (x_{1\,0}, x_{2\,0}, ..., x_{n\,0}) \in Dom(f)$. Vamos criar uma nova função $g_{i\,X_0}$, definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_{i\,X_0} : Dom(g_{i\,X_0}) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_i &\mapsto g_{i\,X_0}(x_i) = f(x_{1\,0}, x_{2\,0}, ...x_{(i-1)\,0}, x_i, x_{(i+1)\,0}, x_{n\,0}) \end{aligned}$$

Isto é, todas as variáveis, com exceção de x_i, foram fixadas:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{1\,0}\\
x_2 &= x_{2\,0}\\
&\vdots\\
x_{i-1} &= x_{(i-1)\,0}\\
x_{i+1} &= x_{(i+1)\,0}\\
&\vdots\\
x_n &= x_{n\,0}
\end{aligned}$$

$g_{i\,X_0}$ é portanto uma função da reta na reta e, se $g_{i\,X_0}$ é derivável em $x_{i\,0}$, definimos a *derivada parcial de f com relação à variável x_i no ponto* $X_0 = (x_{1\,0}, x_{2\,0}, ..., x_{n\,0})$ como $g'_{i\,X_0}(x_{i\,0})$ e a notação utilizada é $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) &= g'_{i\,X_0}(x_{i\,0}) = \lim_{h\to 0}\frac{g_{i\,X_0}(x_{i\,0}+h) - g_{i\,X_0}(x_{i\,0})}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_{1\,0}, ..., x_{i\,0}+h, ..., x_{n\,0}) - f(x_{1\,0}, ..., x_{i\,0}, ..., x_{n\,0})}{h}
\end{aligned}$$

Neste caso, as outras notações são :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = f_{x_i} = D_{x_i} f = D_i f$$

Conforme observado no caso de funções de duas variáveis, no cálculo de derivadas parciais de funções de n variáveis, todas as regras de derivação de funções de uma variável podem ser naturalmente aplicadas, considerando que cada vez existe apenas uma variável e as outras variáveis que "sobram" são vistas apenas como constantes.

Vamos agora nos concentrar em funções de duas e de três variáveis, e fazer um exemplo em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6.2.1: Seja $f(x, y, z) = \ln(xyz)\ \mathrm{e}^{x^2y}z$. Determine as derivadas parciais de f.

Solução: Utilizando as regras de derivação normalmente, incluindo a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= z\left(\frac{1}{xyz}yz\ \mathrm{e}^{x^2y} + \ln(xyz)\ \mathrm{e}^{x^2y}2xy\right)\\
&= \frac{z}{x}\ \mathrm{e}^{x^2y} + 2xyz\ln(xyz)\ \mathrm{e}^{x^2y}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= z\left(\frac{1}{xyz}xz\ \mathrm{e}^{x^2y} + \ln(xyz)\ \mathrm{e}^{x^2y}x^2\right)\\
&= \frac{z}{y}\ \mathrm{e}^{x^2y} + zx^2\ln(xyz)\ \mathrm{e}^{x^2y}\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \mathrm{e}^{x^2y}\left(\frac{1}{xyz}xzy + \ln(xyz)\right)\\
&= \mathrm{e}^{x^2y}\left(1+\ln(xyz)\right)
\end{aligned}$$

No Exemplo 6.2.2 a seguir, vamos fazer uma pequena recordação de Cálculo 1A, nos preparando para o Exemplo 6.2.3 logo após.

Exemplo 6.2.2: Vamos contar a história da professorinha de Cálculo 1A e seus alunos, para relaxar um pouco.

"Considere a função f definida abaixo", diz a professora.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3; & x \neq 2 \\ 7; & x = 2 \end{cases}.$$

"Vamos calcular a derivada de f. É fácil ver que para $x \neq 2$, $f'(x) = 2x$. Vejamos agora quem é $f'(2)$."Os alunos não se contêm e respondem imediatamente:"ZERO!"Aí o professora lhes pergunta : "Por quê?"E, cheios de convicção, eles respondem: "Ora professora, que pegadinha boba, f é constante e a derivada de constante é zero, até meu irmãozinho sabe."Depois disso, a professora abatida, olhando seus alunos de Cálculo 2B, que também foram de Cálculo 1A, se pergunta: "OH DEUS, ONDE FOI QUE EU ERREI?"Depois de beber um pouco de água e respirar fundo, ela se questiona interiormente: "Que faço?... Vou embora?... Talvez dar uma volta no Plaza..."Então tem uma idéia que transparece em um risinho malicioso para os mais sagazes. Resolve se vingar! Então pergunta: "Vocês sabem qual é a derivada da função polinomial $g(x) = x^2+3$?"Os alunos prevendo problemas, olham para baixo e esperam que um inocente se manifeste. De fato, um distraído mais afoito responde: "É $2x$, professora."Ela concorda e então a turma respira mais aliviada. Daí ela complementa: "Vocês portanto estão de acordo que a derivada desta função no ponto $x = 2$ é 4?"Todos balançam a cabeça. Ela dá um sorriso de felicidade e todos pensam que ela se acalmou. Qual nada, é aí que ela contra-ataca: "E QUAL É A DIFERENÇA ENTRE A FUNÇÃO $g(x) = x^2+3$ E A FUNÇÃO QUE EU DEFINI ACIMA $f(x) = \begin{cases} x^2+3; & x \neq 2 \\ 7; & x = 2 \end{cases}$?"Eles boquiabertos veêm seu mundo ruir. É verdade, elas são iguais, o que significa que a derivada da função f não é zero no ponto $x = 2$, e sim 4. Alguns vão para o banheiro chorar. O mundo nunca mais será o mesmo. A derivada de uma constante não é mais zero. Ela percebendo a aflição dos que ficaram, se arrepende e tenta se redimir começando a explicação docemente: "Não estamos falando de funções reais de variáveis reais?" Todos respondem em uníssono: "Sim, claro!" Então ela desabafa: "Como é que vocês queriam então que o valor da função no ponto $x = 2$ fosse outra coisa senão um número?" Eles caem em si e fazem uma carinha de que estão começando a entender, mas na realidade estão mais tranqüilos porque pensaram "Então pode ser que derivada da função constante ainda continue sendo zero..." Ela sentindo um fio de esperança, começa: "Lembrem-se que na definição de derivada, encontramos o limite TAL, onde é necessário saber, além do valor da função no ponto $x = 2$, seu valor em pontos um pouquinho à direita de $x = 2$ e um pouquinho à esquerda de $x = 2$. Sendo assim, PARA O CÁLCULO DA DERIVADA NO PONTO $x = 2$ NÃO BASTA O VALOR DA FUNÇÃO NESTE PONTO," perde novamente a cabeça e grita a professora. Os alunos com medo que ela tenha outro chilique fingem que entenderam. Mas, ela é macaco velho, identifica o fingimento, respira fundo mais uma vez, bebe mais um pouquinho de água (seus alunos desconfiam que ela é aguólotra) e dá a cartada final e aplica a definição, conforme pode ser visto abaixo,

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+3-7}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4+h^2+4h-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4.
\end{aligned}$$

Assim termina nossa história. A professora ensinou seus alunos a calcular direitinho a derivada de funções definidas por mais de uma sentença e, depois disto, eles acertaram todas as derivadas (sem regra da cadeia, aí também era demais) pelo resto da vida. The End.

Após este momento nostálgico, tão singelo, vamos resolver os exemplos abaixo, lembrando da moral da historinha acima: Quando houver mais de uma sentença, é necessário utilizar a DEFINIÇÃO para calcular a derivada no ponto "problema".

Exemplo 6.2.3: Determine as derivadas parciais da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3-x^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução: Para $(x,y) \neq (0,0)$, tudo se passa como antes, i.e. podemos utilizar as regras de derivação com tranqüilidade, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2x(x^2+y^2)-(y^3-x^2)2x}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{-2xy^2(1+y)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3y^2(x^2+y^2)-(y^3-x^2)2y}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{y(y^3+3x^2y+2x^2)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Para $(x,y)=(0,0)$, conforme observado antes, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{h} = \nexists\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{k}{k} = 1.\end{aligned}$$

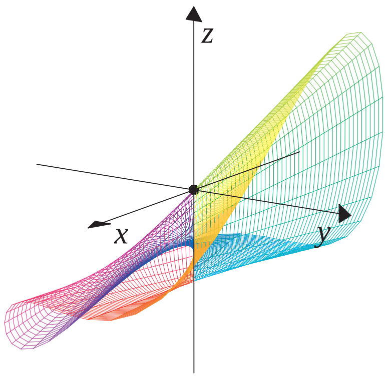
Desta forma,

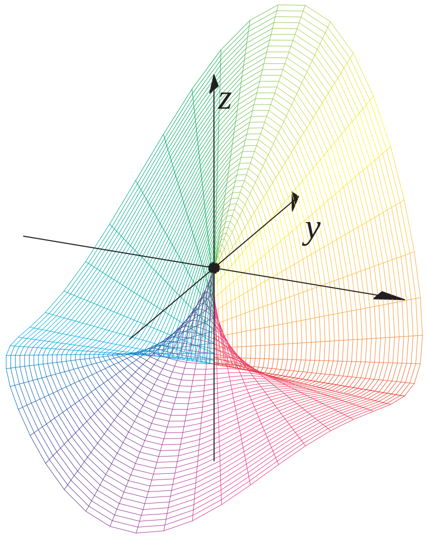
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases}\dfrac{-y^2(2x-y)}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ \nexists; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

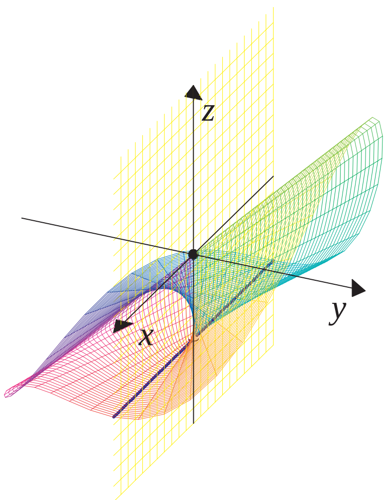
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases}\dfrac{y(y^3+3x^2y+2x^2)}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 1; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

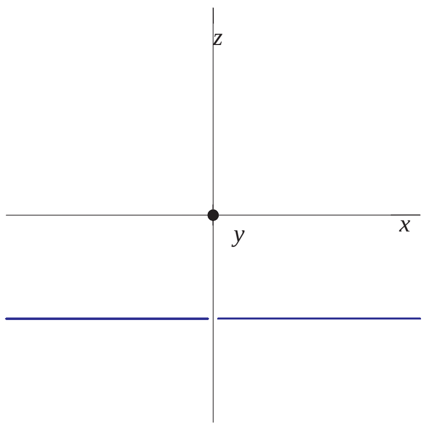
As duas figuras abaixo fornecem um esboço da gráfico da função f sob dois ângulos diferentes.



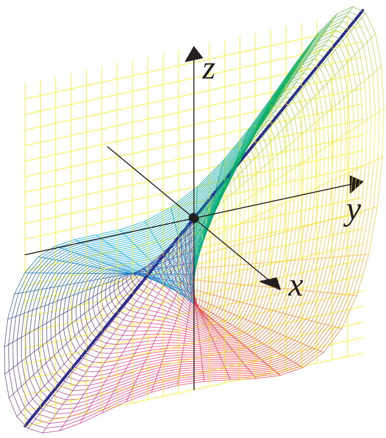


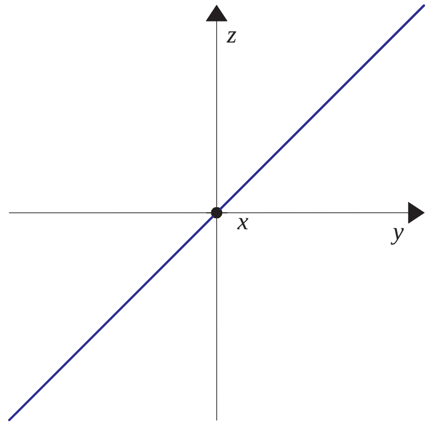
Na próxima figura, temos um esboço da gráfico da função f, juntamente com o plano $y = 0$ e a curva dada pela interseção do gráfico de f com o plano $y = 0$. A figura a seguir mostra apenas a curva dada pela interseção do gráfico de f com o plano $y = 0$, projetada no plano xz. Observe que se $y = 0$, temos que $g_0(x) := f(x, 0) = \begin{cases} -1; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, que é uma função descontínua na origem, e portanto não é diferenciável neste ponto.





Na próxima figura, temos um esboço da gráfico da função f, juntamente com o plano $x = 0$ e a curva dada pela interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$. A figura a seguir mostra apenas a curva dada pela interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$, projetada no plano yz. Observe que se $x = 0$, temos que $h_0(y) := f(0, y) = \begin{cases} y; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, que é uma função contínua e diferenciável na origem.





♡

Exemplo 6.2.4: Determine as derivadas parciais da função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Solução: Novamente, para $(x,y)\neq(0,0)$, tudo se passa como antes, i.e. podemos utilizar as regras de derivação com tranqüilidade, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2)-(xy)2x}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2)-(xy)2y}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Para $(x,y)=(0,0)$, conforme observado, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

♡

Observação 6.2.1: Observe que a função do Exemplo 6.2.4 acima, apesar de possuir derivadas parciais na origem, não é contínua na origem, conforme já foi verificado na aula de continuidade Exemplo 5.3.1. Note que não há nenhuma contradição neste fato, pois as funções que devem ser contínuas, devido à existência das derivadas parciais, são as funções $g_0(x) \triangleq f(x,0) = 0$ e $h_0(y) \triangleq f(0,y) = 0$, que são perfeitamente contínuas, conforme o esperado.

A seguir, vamos fazer uma interpretação geométrica das derivadas parciais.

6.3 Interpretação Geométrica

Considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se f possui derivada parcial em relação à variável x no ponto (x_0, y_0), sabemos que a função g_{y_0}, definida como $g_{y_0}(x) \triangleq f(x, y_0)$ é diferenciável em x_0 e

$$g'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Sendo assim, o gráfico da função g_{y_0} possui reta tangente no ponto $(x_0, g_{y_0}(x_0))$, cujo coeficiente angular m_{10} é igual a

$$m_{10} = g'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Mas, observe que o gráfico de g_{y_0} pode ser "colocado"no plano $\bar{x}y_0\bar{z}$ e que, neste caso, ele é a curva resultante da interseção do gráfico de f com o plano $y = y_0$. Temos então, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva γ_0, dada pela interseção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Note que γ_0 é uma curva contida no plano $y = y_0$, cuja equação é $\gamma_0(t) = (t, y_0, f(t, y_0))$, onde t representa a variável x.

Da mesma forma, se f possui derivada parcial em relação à variável y no ponto (x_0, y_0), é porque a função h_{x_0}, definida como $h_{x_0}(y) \triangleq f(x_0, y)$ é diferenciável em y_0 e

$$h'_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Sendo assim, o gráfico da função h_{x_0} possui reta tangente no ponto $(y_0, h_{x_0}(y_0))$, cujo coeficiente angular m_{20} é igual a

$$m_{20} = g'_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Mas, observe que o gráfico de h_{x_0} pode ser "colocado" no plano $x_0\bar{y}\bar{z}$ e que, neste caso, ele é a curva resultante da interseção do gráfico de f com o plano $x = x_0$. Temos então, que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva β_0, dada pela interseção do plano $x = x_0$ com o gráfico de f, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Note que β_0 é uma curva contida no plano $x = x_0$, cuja equação é $\beta_0(t) = (x_0, t, f(x_0, t))$, onde t representa a variável y.

Vamos exercitar estas idéias no exemplo abaixo:

Exemplo 6.3.1: Dado $f(x, y) = 1 - 4x^2 - y^2$, encontre os coeficientes angulares das retas tangentes, respectivamente, às curvas dadas pela interseção do gráfico de f com o plano $y = \dfrac{1}{2}$, no ponto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e com o plano $x = \dfrac{1}{4}$, neste mesmo ponto.

Solução: Conforme observado acima, o coeficiente angular da reta tangente à curva C_1 dada pela interseção do plano $y = \dfrac{1}{2}$ com o gráfico de f, no ponto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -2.$$

Neste caso, temos que a reta tangente à curva C_1 no ponto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ é dada pelas equações

$$\begin{cases} z - \dfrac{1}{2} = -2\left(x - \dfrac{1}{4}\right) \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

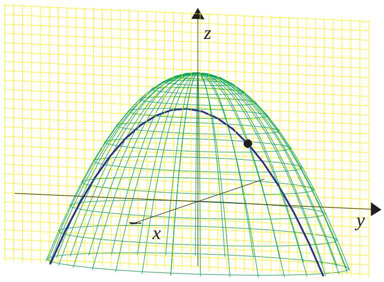
Da mesma forma, o coeficiente angular da reta tangente à curva C_2 dada pela interseção do plano $x = \dfrac{1}{4}$ com o gráfico de f, no ponto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, é dado por

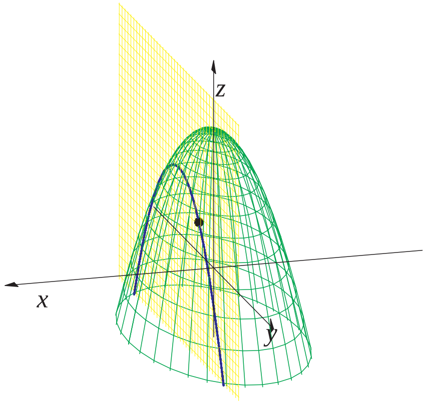
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -1.$$

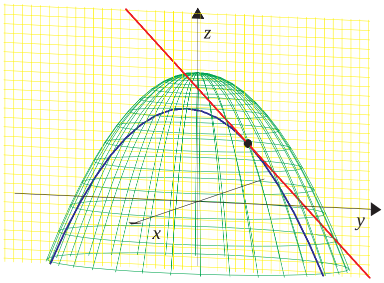
Neste caso, temos que a reta tangente à curva C_2 no ponto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ é dada pelas equações

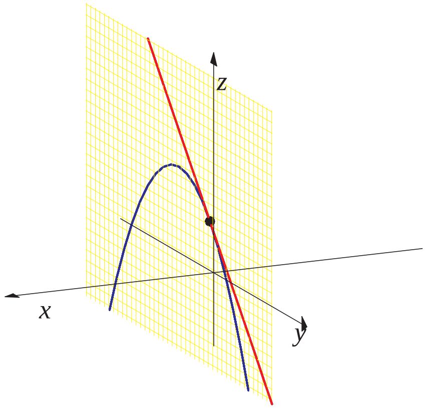
$$\begin{cases} z - \dfrac{1}{2} = -1\left(y - \dfrac{1}{2}\right) \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

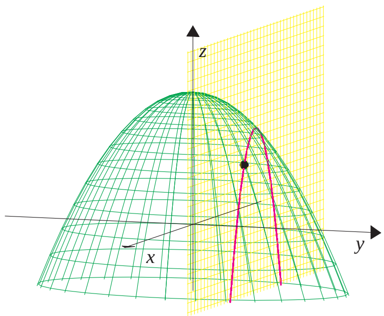
Abaixo temos o esboço do gráfico com os planos e as retas tangentes.

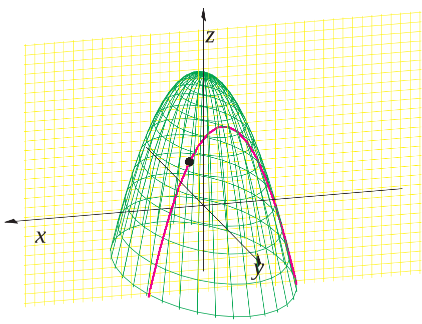

z
x
y

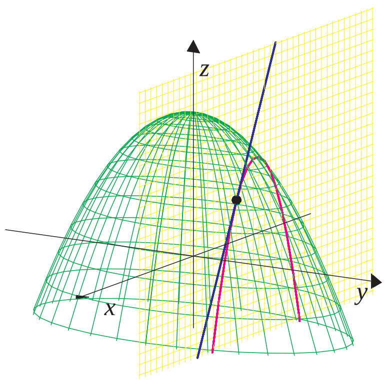

z
x
y

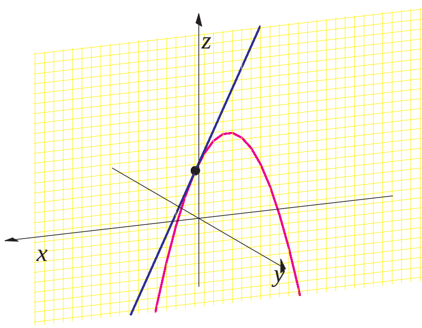

z
x
y


z
x
y


z
x
y


z
x
y


z
x
y


z
x
y

♡

6.4 Interpretação Como Taxa de Variação

Observe que as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*. Isto é, utilizando como exemplo uma função em $\mathbb{R}^2$, dada a função

$$\begin{array}{rcl} f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$$

temos que $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ representa a taxa de variação de z com relação à variação da variável x quando y é mantido fixo. Da mesma forma, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ representa a taxa de variação de z com relação à variação da variável y quando x é mantido fixo. Em termos mais práticos, podemos citar a função $I = f(T,H)$, onde I é o índice de calor (temperatura que corresponde à sensação de calor), T é a temperatura real e H é a umidade relativa do ar. Neste caso, estamos dizendo que o índice de calor é função da temperatura real e da umidade relativa do ar. Desta forma, temos que $\dfrac{\partial I}{\partial T}(T_0, H_0)$ fornece a taxa de variação do índice de calor com relação à variação da temperatura, na temperatura T_0, quando a umidade relativa do ar é mantida fixa em H_0. Da mesma forma, temos que $\dfrac{\partial I}{\partial H}(T_0, H_0)$ fornece a taxa de variação do índice de calor com relação à variação da umidade relativa do ar, para a umidade relativa do ar igual a H_0, quando a temperatura é mantida fixa em T_0. Sendo assim, raciocinando como feito com derivadas de funções da reta na reta, podemos fornecer aproximações como as apresentadas a seguir.

$$I(T_0 + \Delta T, H_0) \approx I(T_0, H_0) + \frac{\partial I}{\partial T}(T_0, H_0)\Delta T$$

e

$$I(T_0, H_0 + \Delta H) \approx I(T_0, H_0) + \frac{\partial I}{\partial H}(T_0, H_0)\Delta H.$$

De um modo geral, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

para h pequeno, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \approx \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

de modo que

$$f(x_0 + h, y_0) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h.$$

Neste caso, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ fornece a taxa de variação de f com relação à variação da variável x quando a variável y permanece fixa.

Da mesma forma, como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

para k pequeno, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \approx \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

de modo que

$$f(x_0, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

Neste caso, temos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ fornece a taxa de variação de f com relação à variação da variável y quando a variável x permanece fixa.

Exemplo 6.4.1: O volume V de um cilindro circular reto é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio do cilindro e h é sua altura.
a) Determine a taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura permanece constante;
b) Determine a taxa de variação do volume em relação à altura se o raio permanece constante;
c) Com a altura fixada em 6cm, determine a taxa de variação do volume em relação ao raio, quando o raio é igual a 4cm;
d) Use o item anterior para estimar o volume do cilindro quando sua altura é 6cm e seu raio é 4,001cm;
e) Com o raio fixado em 4cm, determine a taxa de variação do volume em relação à altura, quando a altura é igual a 6cm;
f) Use o item anterior para estimar o volume do cilindro quando seu raio é 4cm e sua altura é 5,998cm;

Solução:
a) A taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura permanece constante, trata-se da derivada parcial do volume com relação ao raio, i.e. $\frac{\partial V}{\partial r}(r, h)$. Desta forma, temos que

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r, h) = 2\pi r h.$$

b) A taxa de variação do volume em relação à altura se o raio permanece constante, trata-se da derivada parcial do volume com relação à altura, i.e. $\frac{\partial V}{\partial h}(r, h)$. Desta forma, temos que

$$\frac{\partial V}{\partial h}(r, h) = \pi r^2.$$

c) A taxa de variação do volume em relação ao raio, para o raio igual a 4cm, quando a altura é fixada em 6cm é $\frac{\partial V}{\partial r}(4, 6)$. Desta forma, temos que

$$\frac{\partial V}{\partial r}(4, 6) = 2\pi 4.6 = 48\pi.$$

d) Uma aproximação para o volume do cilindro quando $r = 4,001 = 4 + 0,001$ e $h = 6$, conforme visto acima, é dada por

$$\begin{aligned} V(4 + 0,001\,,\,6) &\approx V(4,6) + \frac{\partial V}{\partial r}(4,6)0,001 \\ &\approx \pi.16.6 + 48\pi.0,001 = 96,048\pi. \end{aligned}$$

e) A taxa de variação do volume em relação à altura, na altura é 6cm, quando o raio é fixado em 4cm é $\dfrac{\partial V}{\partial h}(4,6)$. Desta forma, temos que

$$\frac{\partial V}{\partial r}(4,6) = \pi.4^2 = 16\pi.$$

f) Uma aproximação para o volume do cilindro quando $r = 4$ e $h = 5,998 = 6 - 0.002$, conforme visto acima, é dada por

$$\begin{aligned} V(4\,,\,6 - 0,02) &\approx V(4,6) + \frac{\partial V}{\partial h}(4,6). - 0,002 \\ &\approx \pi.16.6 + 16\pi. - 0,002 = 95,968\pi. \end{aligned}$$

♡

Exemplo 6.4.2: No estudo da penetração do congelamento determinou-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em metros) pode ser modelada pela função

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \text{ sen}\,(\omega t - \lambda x),$$

onde $\omega = \dfrac{2\pi}{365}$ e λ é uma constante positiva.
a) Determine $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ e interprete fisicamente;
b) Determine $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ e interprete fisicamente;
c) Se $\lambda = 0.2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, determine e interprete as derivadas parciais de $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ quando $x = 20$ e $t = 15$.

Solução:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) &= -\lambda T_1 e^{-\lambda x} \text{ sen}\,(\omega t - \lambda x) - \lambda T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x) \\ &= -\lambda T_1 e^{-\lambda x}(\text{ sen}\,(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)). \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial T}{\partial x}$ fornece a taxa de variação da temperatura em relação à variação da profundidade quando o dia é mantido constante.

b)

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \;=\; \omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x).$$

$\dfrac{\partial T}{\partial t}$ fornece a taxa de variação da temperatura em relação à variação dos dias quando a profundidade é mantida constante.

c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x}(20,15) &= -2e^{-0,2.20}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}.15-0,2.20\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{365}.15-0,2.20\right)\right)\\ &= -2e^{-4}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{73}-4\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{73}-4\right)\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial T}{\partial x}(20,15)$ representa a taxa de variação da temperatura em relação à variação da profundidade, no nível de profundidade de 20 metros, depois de decorridos 15 dias.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}(20,15) &= \frac{2\pi}{365}.10e^{-0,02.20}\cos\left(\frac{2\pi}{365}.15-0,02.20\right)\\ &= \frac{4\pi}{73}e^{-4}\cos\left(\frac{4\pi}{73}-4\right).\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial T}{\partial t}(20,15)$ representa a taxa de variação da temperatura em relação à variação dos dias, no décimo quinto dia, no nível de profundidade de 20 metros.

♡

Observação 6.4.1: O que foi feito acima para uma função real de duas variáveis reais pode ser estendido de forma natural para uma função real de várias variáveis reais. Isto é, considere a função

$$\begin{aligned} f : Dom(f)\subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\ X=(x_1,x_2,...,x_n) &\longmapsto f(x_1,x_2,...,x_n)\end{aligned}$$

e seja $X_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})\in Dom(f)$. Se f possui todas as derivadas parciais de primeira ordem em X_0, também temos que

$$f(x_{10},...,x_{i0}+\triangle x_i,...,x_{n0}) \approx f(X_0)+\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\triangle x_i.$$

Além disso, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ fornece a taxa de variação de f com relação à variação da variável x_i quando todas as outras variáveis x_j, $j\neq i$ permanecem fixas.

6.5 VETOR GRADIENTE

Agora vamos definir o vetor gradiente de uma função de n variáveis reais. Em alguns livros, este vetor só é definido para funções diferenciáveis. Optaremos aqui por definir para funções que possuem todas as derivadas parciais, conforme pode ser visto abaixo.

DEFINIÇÃO 6.5.1: Seja

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

e seja $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in Dom(f)$. Se f possui todas as derivadas parciais de primeira ordem em X_0, o vetor gradiente de f em X_0, denotado por $\nabla f(X_0)$, é definido como

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \quad \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right).$$

Observe que o conceito de vetor gradiente é específico para funções REAIS de várias variáveis. Vamos resolver o exemplo abaixo.

Exemplo 6.4.1: Determine $\nabla f(x, y)$, onde $f(x, y) = x^2 y + 2x$.

Solução: Conforme visto no Exemplo 6.1.1,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & 2xy + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & x^2 \end{array}$$

Portanto,

$$\nabla f(x, y) = (2xy + 2, x^2).$$

Exemplo 6.4.2: Determine $\nabla f(0, 0)$, onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Solução: Conforme visto no Exemplo 6.2.4,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) & = & 0 \end{array}$$

Portanto,

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

$\heartsuit$

6.6 Exercícios

Exercício 6.6.1: Determine as derivadas parciais da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução: Para $(x,y) \neq (0,0)$, tudo se passa como antes, i.e. podemos utilizar as regras de derivação com tranqüilidade, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - x^2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} \\ &= \frac{2x(x^2+y^2) - x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x^2\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Já, para $(x,y) = (0,0)$, conforme observado antes, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} = \nexists. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observe que apesar de f não possuir derivadas parciais na origem, f é contínua na origem (Exercício 5.4.1). $\heartsuit$