PARTE 7

DERIVADA DE FUNÇÃO REAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS

7.1 Introdução

Seja

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

e seja $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in Dom(f)$. Vamos agora tentar generalizar o conceito de derivada de funções reais de uma variável que foi visto em Cálculo 1A.

Uma primeira idéia de definição de derivada de funções reais de várias variáveis, que é bem natural que venha em nossa mente, até pela aula passada, é utilizar as derivadas parciais. Isto é, diríamos que uma função é derivável em um ponto se ela possuisse todas as derivadas parciais neste ponto. Entretanto, também é natural, nesta generalização do conceito de derivada, que queiramos preservar as propriedades importantes que conhecemos de derivada de função da reta na reta. Sendo assim, observamos que infelizmente o conceito de derivada parcial não serve para ser esta generalização, por um motivo muito simples: uma das propriedades mais importantes da derivada, que é o fato de diferenciabilidade implicar em continuidade, não é verdade em se tratando de derivadas parciais. De fato, lembre-se da aula anterior, que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possui todas as derivadas parciais na origem (Exemplo 6.2.4), embora saibamos da aula de continuidade, que esta função não é contínua na origem (Exemplo 5.3.1). De fato, considerando a curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \geq 0$, e a curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \geq 0$, e calculando, separadamente, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como os limites ao longo de dois diferentes caminhos são distintos, temos que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, de modo que f não é contínua na origem. Seria realmente horrível, um verdadeiro trauma, ter uma generalização do conceito de derivada, onde diferenciabilidade não implicasse em continuidade.

Abortando a idéia das derivadas parciais, também é natural pensarmos, como uma segunda possilibilidade, no limite

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(X_0+H)-f(X_0)}{H}.$$

Neste caso, nos deparamos de imediato com um problema: H é da forma $H = (h_1, ..., h_n)$, ou seja, tem dimensão n e portanto a divisão acima não faz sentido. Pensamos então em contornar o problema, dividindo não por H mas, por $||H||$. Pelo menos assim, o quociente passaria a fazer sentido. Então, vamos tentar generalizar o conceito de derivada utilizando o limite

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(X_0+H)-f(X_0)}{||H||}.$$

Vamos aplicá-lo à função $f(x,y) = x+y$, que é uma função polinomial e linear. Nossa intuição construída em Cálculo 1A, diz que uma função polinomial e, mais ainda, linear, com certeza será diferenciável se a generalização do conceito de derivada for uma generalização "decente". Então, mãos à obra, vamos calcular este limite:

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{x_0+h+y_0+k-x_0+y_0}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}.\end{aligned}$$

Opa! Problema! O limite acima não existe para nenhum $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. De fato, considerando as curvas C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$, e a curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (t,0)$, $t \leq 0$, e calculando, separadamente, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{-t} = \lim_{t\to 0^-} -1 = -1.$$

Isto é inadmissivel, abalaria as estruturas da terra se uma função linear pudesse ter a ousadia de não ser derivável. Vamos então abortar imediatamente esta idéia.

Partiremos então para explorar algum outro aspecto da definição de derivada, fora o limite, que por algum infortúnio, tenha passado despercebido no curso de Cálculo 1A.

7.2 Retorno ao Conceito de Derivada de Função da Reta na Reta

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Então, temos que sua derivada $f'(x_0)$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Sabemos portanto, da teoria de limite, que para h suficientemente pequeno,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Temos assim, que nas proximidades de x_0, i. e. para $x_0 + h$, onde h é suficientemente pequeno,

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Vamos definir uma função chamada *erro*, dependente do quanto nos afastamos de x_0, i.e. dependente de h (e, intrinsicamente, de x_0) que irá transformar o sinal de aproximadamente igual em um sinal de igual. Isto é, vamos fazer

$$erro(h) \triangleq f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h,$$

de modo que,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + erro(h).$$

Observe que, assim definido,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\
&= \lim_{h\to 0} f'(x_0) - f'(x_0) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, concluimos que se f é diferenciável em x_0, então, numa vizinhança de x_0, f pode ser escrita como

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + erro(h),$$

onde

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$

Vamos interpretar este resultado: Se $\lim_{h\to 0} \dfrac{erro(h)}{h} = 0$, isto significa que $erro(h)$ vai para zero muito mais rápido do que h e, portanto, para h muito pequenininho, $erro(h)$ é insignificante com relação a h, ou melhor, desprezível com relação a h. Logo, em qualquer ponto $x = x_0 + h$, numa vizinhança pequena de x_0, o valor da função em x pode ser bem aproximado por um polinômio do primeiro grau, i.e. uma função afim (linear + constante):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vamos agora tentar fazer o caminho inverso, i.e. vamos admitir que uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja bem aproximada numa vizinhaça pequena de x_0 ($x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$) por um polinômio do primeiro grau, i.e. uma função afim (linear + constante) e, a partir disto, vamos ver o que é necessário e razoável que aconteça. Desta forma, traduzindo matematicamente esta informação, temos que para valores de x numa vizinhança de x_0,

$$f(x) \approx ax + b$$

ou melhor, para ficar bem claro que estamos em um ponto próximo a x_0, vamos escrever $x = x_0 + h$, com h representando esta pequena variação em torno de x_0, i.e.

$$f(x_0 + h) \approx a(x_0 + h) + b.$$

Em primeiro lugar, é natural que se aproximação for boa numa vizinhança de x_0, então ela deve ser ótima, ou melhor, exata, no próprio ponto x_0. Sendo assim, fazendo $h = 0$ na equação anterior, temos que

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0.$$

Substituindo então, o valor de b encontrado acima, em nossa equação, temos que,

$$f(x_0 + h) \approx a(x_0 + h) + f(x_0) - ax_0 \Rightarrow f(x_0 + h) \approx f(x_0) + ah.$$

Vamos então definir uma função *erro*, dependente de h (e, intrinsicamente, de x_0) para transformar o sinal de aproximadamente igual em um sinal de igual. Escrevemos portanto,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + erro(h),$$

onde $erro(h)$ é definido como

$$erro(h) \triangleq f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Mas, esta função *erro* não pode ficar "solta", ela tem que satisfazer certas propriedades para que a expressão "boa aproximação na vizinhança do ponto x_0" não se perca. Em primeiro lugar, quanto menor h, menor deveria ser $erro(h)$. Matematicamente, esta nossa condição pode ser expressa pedindo que

$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0.$$

Observe que, pelo limite acima, temos que *erro* é uma função contínua em zero. De fato, conforme estabelecido antes, a aproximação deve ser exata em x_0, de modo que, fazendo $h = 0$ na equação de definição da função *erro*, segue que

$$f(x_0) = f(x_0) + erro(0) \Rightarrow erro(0) = 0,$$

o que leva a
$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 = erro(0).$$
Mas, nossas exigências "razoáveis" sobre a função *erro* não terminam aqui. Observe ainda para h pequeno, exigir $erro(h)$ também pequeno, não é o suficiente, afinal de contas, queremos que o papel de aproximar o valor da função em x_0 seja desempenhado por $f(x_0)+ah$ e não por $erro(h)$ ou, melhor ainda, para separar quantidades diferentes, queremos que a alteração que o valor da função sofre passando de x_0 para x_0+h (i.e. $f(x_0+h)-f(x_0)$) não seja aproximado por $erro(h)$, mas sim, por ah. Em outras palavras, queremos que para h muito pequenininho, $erro(h)$ seja insignificante ou desprezível em relação a h, ou melhor, que quando h tender a zero, que $erro(h)$ vá mais rápido para zero do que h. Matematicamente, podemos traduzir este nosso desejo exigindo que
$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$
Portanto, chegamos a
$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + erro(h)$$
onde,
$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$
Observe então, que, nestas condições, a derivada de f em x_0 existe e é igual a a. De fato,
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah+erro(h)}{h} = a.$$

Concluimos assim, que se uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é bem aproximada numa vizinhaça de x_0 por um polinômio do primeiro grau, então ela é derivável em x_0 e a constante a, que tem um papel super importante neste processo, é justamente $f'(x_0)$.

Observe que, chegamos à conclusão que
$$L(h) = f(x_0) + ah = f(x_0) + f'(x_0)h$$
é a melhor função afim que aproxima $f(x_0+h)$ numa vizinhança de x_0, no sentido de que é a única função afim que aproxima $f(x_0+h)$ nesta vizinhança, com erro tendendo a zero mais rápido que h, quando $h \to 0$.

Resumindo então tudo o que vimos até agora, podemos concluir que possuir derivada em um ponto e possuir uma boa aproximação polinomial de primeiro grau numa vizinhança do ponto são de fato condições equivalentes.

TEOREMA 7.2.1: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se e somente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + erro(h),$$

onde
$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{h}=0.$$

Devido à condição de equivalência, que expressa necessidade e suficiência, esta propriedade pode ser utilizada como definição. Acrescentando-se ainda o fato de que
$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{h}=0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=0,$$
temos a seguinte definição equivalente para função diferenciável.

DEFINIÇÃO 7.2.1: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+erro(h),$$
onde,
$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=0.$$
A *derivada* de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$ é igual à a.

Temos então, na Definição 7.2.1, uma outra forma de definir derivada de função da reta na reta. Observe que esta forma é, obviamente, equivalente àquela vista em Cálculo 1A, que estava apenas focada na existência do limite $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Inclusive, é justamente nesta nova forma de ver a derivada, que temos o ponto crucial onde se fundamenta o conceito de derivada, que tornará possível uma verdadeira generalização deste conceito para funções $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Vamos deixar mais claro qual é o ponto crucial. Ele está no fato de que se f é diferenciável em x_0, então numa vizinhança de x_0, a diferença
$$f(x_0+h)-f(x_0)$$
é igual a
$$ah+erro(h),$$
onde
$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=0.$$
Ou seja, a diferença
$$f(x_0+h)-f(x_0)$$
é aproximadamente
$$ah$$

que é uma função **linear** de h (agora é linear mesmo), onde a expressão "aproximadamente" é tornada precisa na exigência de

$$\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Observe ainda, que se f fosse ele próprio um polinômio do primeiro grau, dado por $f(x) = ax + b$, então a diferença $f(x_0 + h) - f(x_0)$ seria exatamente ah, com $erro(h) = 0$.

Com tudo o que foi visto acima, e utilizando o fato de que, como função de h, a expressão ah pode ser representada pela função linear T, dada por $T(h) = ah$, podemos reescrever novamente o conceito de derivada de uma função real de variável real.

DEFINIÇÃO 7.2.2: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se existe uma função linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + erro(h),$$

onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{|h|} = 0.$$

Representando a transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T(h) = ah$, $\forall h \in \mathbb{R}$, temos que a *derivada* de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$ é igual à a.

Vamos agora utilizar as idéias acima no processo de generalização do conceito de derivada.

7.3 Derivada de Funções Reais de Várias Variáveis

Antes de mais nada, lembre-se que, em Álgebra Linear, foi definido que uma função ou transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y),$$

onde a e b são escalares e x e y pertencem a $\mathbb{R}^n$. Sabemos que uma transformação linear da reta na reta é bem representada por uma constante a, i.e.

$$T(h) = ah.$$

Agora, se formos pensar em funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, temos que atentar para o fato de que H é um ponto em $\mathbb{R}^n$ e que a transformação linear T que atuar nele, deverá levá-lo em $\mathbb{R}$, i.e. $T(H) \in \mathbb{R}$. Já sabemos de Álgebra Linear também que, fixadas as bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é representada de forma única por uma matriz $n \times m$. Sendo assim, em particular, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pode ser representada de forma única por uma matriz $M \in \mathcal{M}_{1 \times n}$. Observe que, mais em particular ainda, uma matriz 1×1 é um escalar $a \in \mathbb{R}$, o que corrobora nossa afirmação de que uma transformação linear da reta na reta é bem representada por uma constante a.

Finalmente observe que $|h|$ representa a distância entre o ponto x_0 e o ponto $x_0 + h$ na vizinhança de x_0.

Vamos então adaptar a Definição 7.2.1, de derivada de funções da reta na reta, às funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, tendo em mente que o ponto crucial é que a diferença entre o valor da função na vizinhança $X_0 + H$ do ponto X_0 e o valor da função no ponto X_0, pode ser bem aproximada por uma transformação linear aplicada na diferença H entre os pontos, num sentido bem preciso, que consiste no erro tender a zero mais rápido do que a distância entre os pontos $X_0 + H$ e X_0, quando $X_0 + H$ se aproxima de X_0.

DEFINIÇÃO 7.3.1: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + T(H) + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

A transformação linear T é denominada *diferencial* de f em X_0.

Conforme mencionado anteriormente, fixadas as bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é representada de forma única por uma matriz $n \times 1$. Desta forma, se a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$, a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a qual a definição de derivada se refere, pode ser representada de forma única por uma matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$. Esta matriz que representa T é chamada de *derivada de f em X_0* e é denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$. Abaixo daremos uma definição equivalente à Definição 7.3.1, utilizando a matriz no lugar da transformação linear.

DEFINIÇÃO 7.3.2: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe uma matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + M.H + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0,$$

onde (.) é o produto matricial.

A matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$ é chamada de *derivada de f em X_0* e é denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$.

Abaixo vamos definir diferenciabilidade em um conjunto aberto.

DEFINIÇÃO 7.3.3: Se f é diferenciável em todos os pontos do aberto $A \subseteq Dom(f)$, dizemos que f é *diferenciável em A*.

Conforme veremos, nossa primeira dificuldade encontrada na hora de definir derivada, foi então superada, pois correspondendo as nossas expectativas, diferenciabilidade continua implicando em continuidade. O mundo permanece em ordem.

TEOREMA 7.3.1: Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X_0 \in A$(aberto) $\subseteq Dom(f)$, então f é contínua em X_0.

Demonstração: Se f é derivável em X_0, então temos que existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + T(H) + erro(H), \tag{1}$$

com

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

Lembre-se que mostrar que f é contínua em X_0 corresponde a demonstrar que $\lim_{||H|| \to 0} f(X_0 + H) = f(X_0)$ ou, de forma equivalente, que $\lim_{||H|| \to 0} f(X_0 + H) - f(X_0) = 0$. Sendo assim, como f é diferenciável em X_0, pela igualdade (1), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{||H|| \to 0} f(X_0 + H) - f(X_0) &= \lim_{||H|| \to 0} T(H) + erro(H) \\
&= \lim_{||H|| \to 0} T(H) + \frac{erro(H)}{||H||}||H|| \\
&\overset{*}{=} \lim_{||H|| \to 0} T(H) + \lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} \lim_{||H|| \to 0} ||H|| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ se deve a existência dos limites de todas as funções envolvidas e a igualdade $\lim_{||H|| \to 0} T(H) = 0$ se deve ao fato de T ser uma transformação linear. Concluimos portanto que f é contínua em X_0.

$\square$

De acordo com o teorema acima, temos que, se f não é contínua em X_0, então f também não é diferenciável em X_0.

Mais tarde, com mais informações, se quisermos, poderemos comprovar, utilizando a definição de derivada, que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, de fato, não é diferenciável na origem. Entretanto, como sabemos que ela não é contínua na origem, de acordo com o teorema acima, já podemos concluir que ela não é diferenciável.

Vamos agora utilizar este teorema para resolver o exemplo abaixo.

Exemplo 7.3.1: Verifique se a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem.

Solução: Lembre-se que foi verificado na aula de continuidade que f não é contínua em $(0,0)$ (Exemplo 5.2.6). De fato, considerando a curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$, e a curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (0,t)$, $t \geq 0$, e calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = \lim_{t\to 0^+} -1 = -1.$$

Como os limites ao longo de dois diferentes caminhos são distintos, temos que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, de modo que f não é contínua em $(0,0)$. Sendo assim, pelo Teorema 7.2.1 acima, temos que f não é diferenciável em $(0,0)$.

♡

Vamos agora confirmar a superação da nossa segunda dificuldade. Vamos "testemunhar" que a função $f(x,y) = x + y$ é diferenciável, conforme era de se esperar, já que se trata de uma função linear. Aliás, mais tarde falaremos especificamente de funções lineares. Para resolver o próximo exemplo, observe que, especificamente para funções reais de duas variáveis reais, temos que $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f((x_0, y_0) + (h,k)) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + T(h,k) + erro(h,k),$$

onde

$$\lim_{||(h,k)||\to 0} \frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Exemplo 7.3.2: Dado $f(x,y) = x + y$, mostre que a derivada de f é dada por $f'(x,y) = (1 \quad 1)$.

Solução: Para isto, devemos mostrar que

$$\lim_{||(h,k)||\to 0} \frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Temos então, que

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - (1 \ \ 1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{x+h+y+k-x-y-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Observe que, de fato, $erro(h,k)$ é identicamente nulo. Além disso, observe que f é uma na verdade ela própria uma transformação linear, a qual é representada, na base canônica $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$, pela matriz $(1 \ \ 1)$, i.e.

$$f(x,y) = (1 \ \ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, é natural que sua derivada seja ela própria, pois a transformação linear que melhor aproxima uma transformação linear é ela mesma.

$\heartsuit$

Exemplo 7.3.3: Dado $f(x,y) = x^2 y$, mostre que a derivada de f é dada por $f'(x,y) = (2xy \quad x^2)$.

Solução: Novamente, devemos mostrar que

$$\lim_{||(h,k)||\to 0} \frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Temos então, que

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - (2xy \ \ x^2)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2y + h^2k + 2xhk}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} yh\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + h^2\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + 2xh\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,
\end{aligned}$$

pois os três limites são do tipo produto de função limitada $\left(-1 \leq \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1 \text{ e } -1 \leq \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1\right)$ por função que tende a zero quando $(h,k) \to (0,0)$ (yh, h^2 e

$2xh)$.

♡

Observe que, nos exemplos anteriores, nos foi pedido apenas para comprovar que uma transformação linear dada era de fato a derivada da função. Isto é, apenas tivemos que confirmar que

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

E se nos for pedido para achar a derivada, caso ela exista? O que vamos fazer? Existe algum candidato? Note que no Exemplo 7.2.3, a derivada $f'(x,y)$ é dada por

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Isto não foi coincidência, conforme veremos a seguir, a matriz de qualquer transformação T que satisfaz a condição dada na definição de diferenciabilidade, associada às bases canônicas, pode ser calculada em termos das derivadas parciais de f. Com isto, temos que T é *univocamente* determinada por f em cada ponto X_0 pertencente ao interior de seu domínio. Portanto podemos falar de *a* diferencial de f em X_0.

Considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f é diferenciável em X_0, então existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - T(H)}{||H||} = 0. \tag{2}$$

Como X_0 é um ponto no interior do domínio de f, temos que, para todo $Y \in \mathbb{R}^n$, se t é suficientemente pequeno, então $X = X_0 + tY \in Dom(f)$. Desta forma, vamos fazer $H = tY$ no limite (2). Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tY) - f(X_0) - T(tY)}{||tY||} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tY) - f(X_0) - tT(Y)}{||tY||} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \left|\left| \frac{f(X_0 + tY) - f(X_0) - tT(Y)}{tY} \right|\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{||Y||} \lim_{t \to 0} \left|\left| \frac{f(X_0 + tY) - f(X_0) - tT(Y)}{t} \right|\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tY) - f(X_0) - tT(Y)}{t} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tY) - f(X_0)}{t} = T(Y). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Fazendo então $Y = e_j$, $j = 1, 2$, em (3),onde e_j são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$T(e_j) = \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + te_j) - f(X_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0). \tag{4}$$

Concluimos portanto, que

$$f'(X_0) = d_{X_0}f = M = (m_{1j}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \end{pmatrix}.$$

Observe que, no que foi feito acima, o fato de n ser igual a dois não foi usado. Desta forma, tudo o que foi feito, é válido para um n qualquer. De um modo geral, a derivada de uma função real de várias variáveis é representada, nas bases canônicas, por uma matriz formada pelas suas derivadas parciais. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 7.3.2: Seja

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Se f é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$, então f admite todas as derivadas parciais em X_0 e a derivada da f em X_0, denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$, é dada por

$$f'(X_0) = d_{X_0}f = M = (m_{1j}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}.$$

Observação 7.3.1: A derivada de f em X_0 também é chamada de *Matriz Jacobiana de f em X_0*.

Como consequência do teorema acima, temos portanto o corolário abaixo, que utilizaremos para determinar se uma função é ou não diferenciável em um ponto.

COROLÁRIO 7.3.1: $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se e somente se

(a) f admite todas as derivadas parciais em X_0, i.e. f admite a matriz M das derivadas parciais em X_0, $(m_{1j}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right)$;

(b)
$$\begin{aligned} \lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} &= \lim_{||H|| \to 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right).H}{||H||} \\ &= \lim_{||H|| \to 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)h_1 - ... - \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)h_n}{||H||} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ e o produto (.) é um produto entre matrizes.

Vamos agora voltar aos exemplos antigos e, de posse das informações previamente obtidas, verificar o que se pode dizer a respeito da diferenciabilidade destas funções.

7.4 Exemplos

Exemplo 7.4.1: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua na origem.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais na origem.
(c) Verifique se f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Note que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ e $0 < \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Desta forma, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Sendo assim, concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &= 0 \\ &= f(0,0), \end{aligned}$$

de modo que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais na origem devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1.$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{array}\right) = (0 \;\; 1)$.

c) Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0} \dfrac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - (0 \;\; 1)\left(\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{k^3}{h^2+k^2} - k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

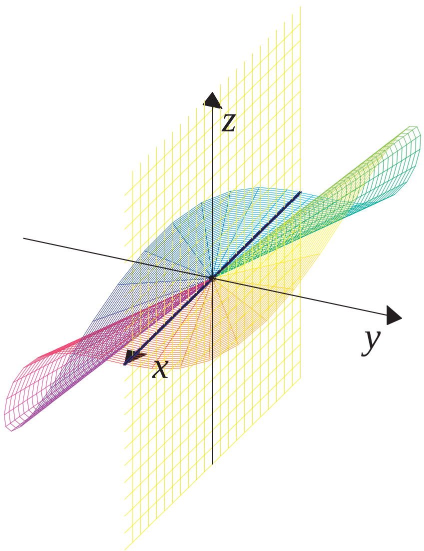
Observe que o limite acima não existe, pois ao longo da curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,t)$, $t \geq 0$, temos que

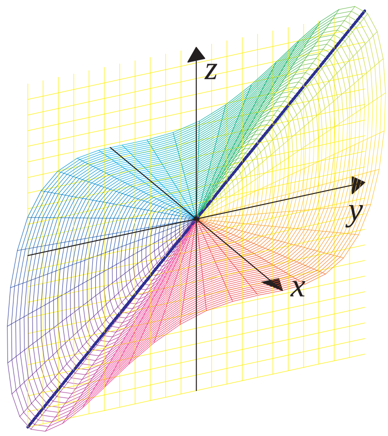
$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ ao\ longo\ de\ C_1}} \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^3}{2^{3/2}|t|^3} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^3}{2^{3/2}t^3} \\
&= -\frac{1}{2^{3/2}},
\end{aligned}$$

enquanto que, ao longo da curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ ao\ longo\ de\ C_2}} \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{-t^3}{2^{3/2}|t|^3} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{-t^3}{-2^{3/2}t^3} \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, a função f não é diferenciável na origem.





♡

Exemplo 7.4.2: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua na origem.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais na origem.
(c) Verifique se f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Note que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \frac{y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$ e $0 < \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Desta forma, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Sendo assim, concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &= 0 \\ &= f(0,0), \end{aligned}$$

de modo que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais na origem devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

e

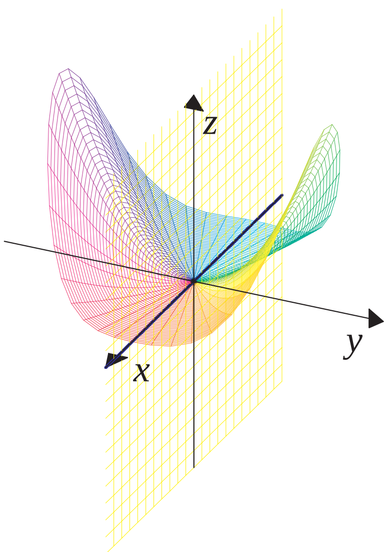
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2}{k} = \lim_{k\to 0} k = 0.$$

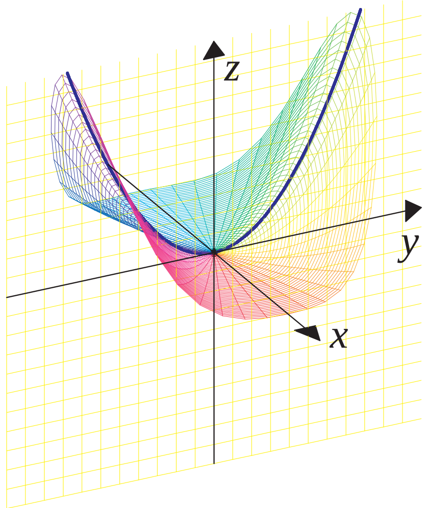
Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{array}\right) = (0 \;\; 0)$.

c) Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0}\frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Temos então que

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-(0\;\;0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{k^4}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}|k|\frac{|k|^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}|k|\left(\frac{k^2}{h^2+k^2}\right)^{3/2} = 0,\end{aligned}$$

pois o limite acima é o limite do produto de uma função limitada $\left(0 < \frac{k^2}{h^2+k^2} < 1\right)$ por outra que tende a zero quando $(h,k)\to(0,0)$ (a função $|k|$). Sendo assim, concluimos que f é diferenciável na origem.





♡

Exemplo 7.4.3: Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua na origem.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais na origem.
(c) Verifique se f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Note que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad = \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0=f(0,0),$$

pois o limite acima é o limite do produto de uma função limitada $\left(-1\leq\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\leq 1\right)$ por outra que tende a zero (a função x^2+y^2) quando $(x,y)\to(0,0)$. Sendo assim, concluimos que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais na origem devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} h\ \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)=0,\end{aligned}$$

pois o limite acima é o limite do produto de uma função limitada $\left(-1\leq\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\leq 1\right)$ por outra que tende a zero (a função h) quando $(h,k)\to(0,0)$. Analogamente

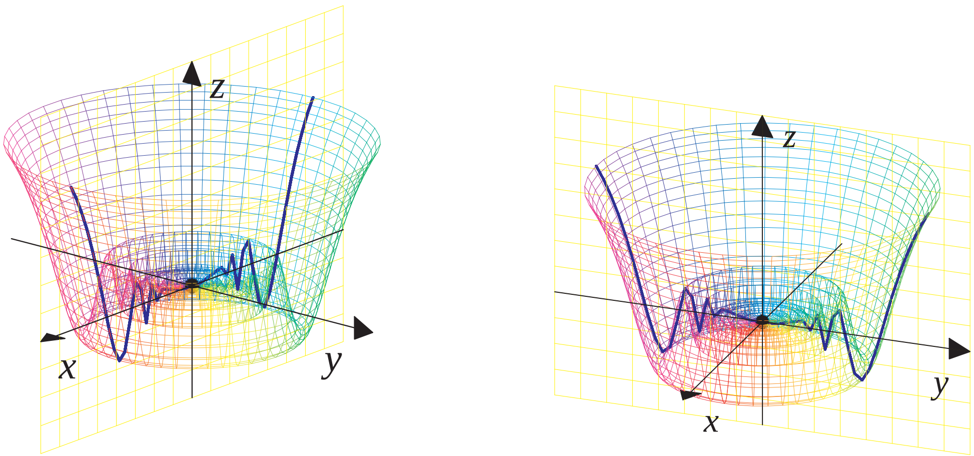
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0} k\ \text{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)=0.\end{aligned}$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right)=$ $\left(\begin{array}{cc}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{array}\right)=(0\ \ 0).$

c) Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0}\dfrac{erro(h,k)}{||h,k||}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Temos então que

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-(0\ \ 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\ \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) = 0,\end{aligned}$$

pois o limite acima é o limite do produto de uma função limitada $\left(-1 \leq \ \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \leq 1\right)$ por outra que tende a zero (a função $\sqrt{h^2+k^2}$) quando $(h,k) \to (0,0)$. Sendo assim, concluimos que f é diferenciável na origem.



♡

7.5 Condição Suficiente para Diferenciabilidade

Temos a seguir um teorema que pode ajudar a determinar se uma função é derivável em um ponto, sem ter que passar pela análise da função *erro*. Além disso, ele será verdadeiramente útil quando quisermos determinar se uma função é derivável em um conjunto aberto. Pois, com o que temos até agora, para verificar se f é derivável em um ponto (x,y) arbitrário, deveríamos calcular as derivadas parciais em (x,y) arbitrário e então calcular

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = \lim_{||H||\to 0} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

o que pode ser bastante complexo. Apesar de estarmos nos restringindo nos exemplos a funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, o teorema será enunciado para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

TEOREMA 7.5.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f possui todas as derivadas parciais em A e elas são contínuas em X_0, então f diferenciável em X_0.

Exemplo 7.5.1: Mostre que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

Solução: Já mostramos no Exemplo 7.4.2 que f é diferenciável na origem. Vamos agora mostrar que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto, as derivadas parciais de f em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ são funções racionais, cujos denominadores não se anulam neste conjunto. Conseqüentemente elas são contínuas, pois toda função racional é contínua em seu domínio. Agora, basta aplicar o Teorema 7.5.1 para concluir que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Desta forma, mostramos que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

$\heartsuit$

Observe bem que o teorema não diz nada se f falhar em ter todas as derivadas parciais contínuas em X_0. Ele **não** diz que a derivada então não irá existir. Ele se abstém de comentários e, neste caso, você não vai escapar de ter que calcular o limite que tentou evitar. Confira o exemplo a segir.

Exemplo 7.5.1: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
(b) Mostre que as derivadas parciais de f não são contínuas na origem e compare com a conclusão obtida na resolução do Exemplo 7.4.3, de que f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Já mostramos no Exemplo 7.4.3 que f é diferenciável na origem. Vamos agora mostrar que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$. Esta função é formada pelo produto, soma e composição de funções contínuas em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Por simetria, tudo se passa da mesma forma para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Sendo assim, a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ é conseqüência do Teorema 7.5.1. Concluimos portanto que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

b) Para mostrar que as derivadas parciais de f não são contínuas na origem, observe que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. De fato, enquanto que por um lado temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \text{ sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0,$$

por ser o limite do produto de uma função limitada $\left(-1 \leq \text{ sen} \left(\dfrac{1}{x^2 + y^2} \right) \leq 1 \right)$ por outra que tende a zero (a função $2x$) quando $(x, y) \to (0, 0)$, por outro lado temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \nexists.$$

Para ver que este último limite não existe, observe que como cosseno é uma função periódica, se escolhermos uma curva C, parametrizada por $\gamma(t) = (t, 0)$, $t \geq 0$, ficamos com

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C}} \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \quad = \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t} \cos \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Note agora, que toda vez que t assumir valores iguais a $\sqrt{\dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}}$, para algum n inteiro, teremos que

$$\frac{2}{t} \cos \left(\frac{1}{t^2} \right) = 0.$$

Por outro lado, toda vez que t assumir valores da iguais a $\sqrt{\dfrac{1}{2n\pi}}$, para algum n inteiro, teremos que

$$\frac{2}{t} \cos \left(\frac{1}{t^2} \right) = \sqrt{2n\pi} \to \infty,$$

quando $n \to \infty$. Desta forma enquanto, $t \to 0^+$, o quociente acima alterna valores muito grandes com nulos. Sendo assim, não existe $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{2}{t} \cos \left(\dfrac{1}{t^2} \right)$, o que significa que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\dfrac{1}{x^2 + y^2} \right)$. O mesmo acontece com $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Portanto, as derivadas parciais de f não são contínuas na origem. Entretanto, conforme visto no Exemplo 7.4.3, f é diferenciável na origem. Este exemplo mostra que continuidade das derivadas parciais é uma condição realmente só SUFICIENTE para diferenciabilidade e, não é de forma alguma necessária.

$\heartsuit$

Diante da importância que acabamos de ver de uma função possuir todas as derivadas parciais contínuas, vamos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 7.5.1: Considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se, para todo $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, exitem e são contínuas, dizemos que f é de classe C^1 em A.

Aplicando a Definição 7.5.1 ao Teorema 7.5.1, temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 7.5.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f é de classe C^1 em A, então f é diferenciável em A.

7.6 Plano Tangente

De acordo com a definição equivalente de diferenciabilidade para funções da reta na reta que apresentamos, temos que $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in I(\text{aberto}) \in Dom(f)$ e sua derivada é $f'(x_0)$ se e só se, numa vizinhança de x_0, tivermos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + erro(h),$$

onde,

$$\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{|h|} = 0.$$

Desta forma, ao fazermos $x = x_0 + h$, ficamos com

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + erro(x - x_0),$$

onde,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{erro(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Portanto, se f é diferenciável em x_0, então, numa vizinhança de x_0, temos que $f(x)$ pode ser bem aproximado por

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Desta forma, se definirmos

$$L(x) \stackrel{\triangle}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que L é a função afim que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0, no sentido de que é a única função afim que aproxima f nesta vizinhança, com erro dado por $erro(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, onde este erro tende a zero mais rápido que $|x - x_0|$, quando $x \to x_0$. Agora, lembre-se que foi visto, em Cálculo 1A, que se

$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0, então o gráfico de f possui reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ e a equação desta reta é dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Em outras palavras, foi exatamente o gráfico da melhor aproximação afim da função numa vizinhança do ponto x_0, que chamamos de reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$, quando f é diferenciável em x_0.

Da mesma forma, uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em (x_0, y_0), se e só se, numa vizinhança de (x_0, y_0), tivermos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + erro(h, k)$$

onde,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h, k)}{||(h, k)||} = 0.$$

Sendo assim, ao fazermos $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, ficamos com

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + erro(x - x_0, y - y_0),$$

onde,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{erro(x - x_0, y - y_0)}{||(x - x_0, y - y_0)||} = 0.$$

Portanto, se f é diferenciável em (x_0, y_0), então numa vizinhança de (x_0, y_0), temos que $f(x, y)$ pode ser bem aproximado por

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Novamente, vemos que se definirmos

$$L(x, y) \triangleq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

temos que L é a função afim que melhor aproxima f numa vizinhança de (x_0, y_0), no sentido de que é a única função afim que aproxima f nesta vizinhança, com erro dado por $erro(x - x_0, y - y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, onde este erro tende a zero mais rápido que $||(x - x_0, y - y_0)||$, quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Portanto, é exatamente o gráfico da melhor aproximação afim da função, que vamos chamar de *plano tangente* ao seu gráfico no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, se f for diferenciável em (x_0, y_0). Confira a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 7.6.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A$(aberto) $\subseteq Dom(f)$. O plano

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

denomina-se *plano tangente* ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Podemos reescrever a equação do plano tangente definido acima, na forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Sendo assim, fica evidente que o vetor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

é perpendicular ao plano tangente, de modo que cabe a definição de *reta normal* ao gráfico. Confira a definição abaixo.

DEFINIÇÃO 7.6.2: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. A reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta normal* ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Vamos fazer um exemplo.

Exemplo 7.6.1: Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2y + 2x}{4}$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função f no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{32}\right)$.

Solução: Em primeiro lugar, observe que f é uma função polinomial. Portanto, f possui todas as derivadas parciais e elas são todas contínuas em $\mathbb{R}^2$. Desta forma, pelo Teorema 7.5.1, f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$. Deste modo, o gráfico de f possui plano tangente e reta normal em todos os pontos de seu gráfico e, em particular, no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{32}\right)$. Neste ponto, o plano tangente e reta normal ao gráfico de f, são dados, respectivamente, pelas equações

$$z = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

e

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), -1\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2xy + 2}{4} = \frac{xy + 1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^2}{4}, \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{8}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

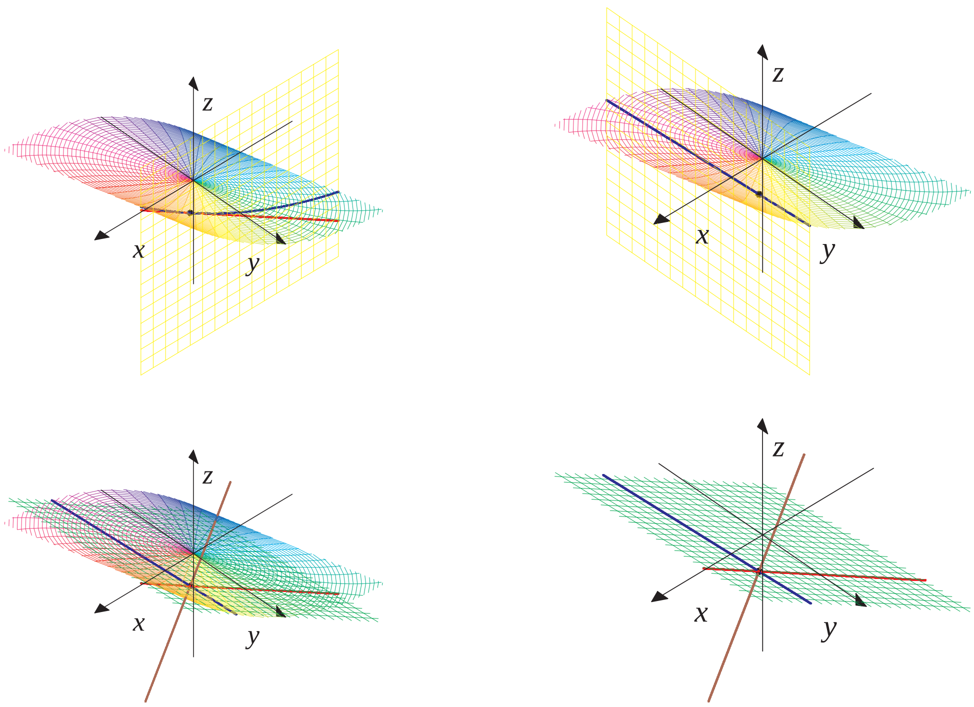
Sendo assim, as equações do plano tangente e da reta normal são dadas, respectivamente, por

$$z = \frac{9}{32} + \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

e

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{32}\right) + \lambda\left(\frac{5}{8},\frac{1}{16},-1\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Abaixo temos os desenhos relativos a este exemplo.



♡

Observe que o plano tangente, bem como a reta normal, ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_,y_0))$, só foram definidos no caso de f ser diferenciável em (x_0, y_0). Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas mesmo assim possuir todas as derivadas parciais neste ponto, ainda é possível escrever a equação

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Entretanto, este plano **não** será plano tangente ao gráfico da função. Observe que o conceito de plano tangente envolve uma noção de aproximação que só está presente em funções diferenciáveis.

Exemplo 7.6.2: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0,0,f(0,0))$.

Solução: No Exemplo 7.4.1 verificamos que f não é diferenciável em (0,0), de modo que f não possui plano tangente em $(0,0,f(0,0))$.

$\heartsuit$

É natural se pensar que o plano tangente ao gráfico de uma função f contenha as retas tangentes às curvas diferenciáveis contidas no gráfico de f. De fato, mais tarde, após termos aprendido regra da cadeia, provaremos este resultado, que está enunciado no final desta seção. Por ora, vamos usar este fato, que é bastante intuitivo, para reafirmar que realmente, para uma função que não é diferenciável, não faz sentido falar em plano tangente. Confira a observação abaixo.

Observação 7.6.1: Para reafirmar que se f não é diferenciável em (x_0,y_0), muito embora exista o plano

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

ele não carrega em si nenhuma propriedade de tangência, vamos considerar Exemplo 7.6.1, visto anteriormente. Vimos, neste caso, que f não é diferenciável em (0,0), de modo que o gráfico de f não possui plano tangente no ponto $(0,0,f(0,0))$. Entretanto, as derivadas parciais de f na origem são

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 1, \end{aligned}$$

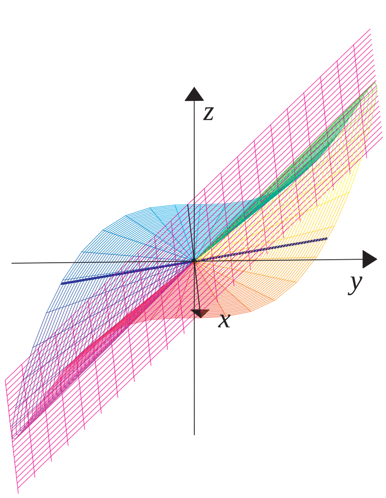
de modo que, podemos escrever a equação do plano

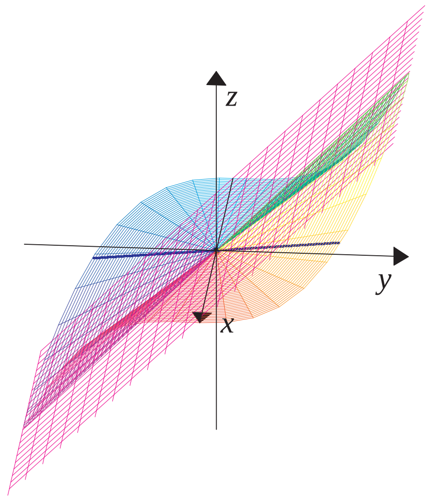
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

no caso em que $(x_0,y_0) = (0,0)$, resultando na equação $z = y$. Agora, considere a curva parametrizada pela função γ dada por $\gamma(t) = (t,t,\frac{t}{2})$, $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que esta curva está contida no gráfico de f, uma vez que $f(t,t) = \frac{t}{2}$. Além disso, a função γ é diferenciável e $\gamma(0) = (0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$. Entretanto, observe que a reta

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,1,\frac{1}{2}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que é a reta tangente a γ, no ponto $(0,0,0)$, não está contida no plano $z = y$. Portanto, realmente não faria o menor sentido, chamar o plano $z = y$ de plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0, f(0, 0))$.





$\heartsuit$

TEOREMA 7.6.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Considere uma curva C inteiramente contida no gráfico de f, onde C é parametrizada pela função γ, e γ é tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, γ é diferenciável em t_0 e $\gamma'(t_0) \neq 0$. Então, a reta tangente a C, no ponto $\gamma(t_0)$, está contida no plano tangente ao gráfico de f no ponto $\gamma(t_0)$.

7.7 Aproximação Linear

Conforme vimos na seção anterior, se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$, temos que

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

é a melhor aproximação afim de f, numa vizinhança do ponto (x_0, y_0). Desta forma, se f é diferenciável em (x_0, y_0), podemos dizer que para (x, y) numa vizinhança suficientemente próxima de (x_0, y_0), temos que $f(x, y)$ é bem aproximado por $L(x, y)$, ou seja para (x, y) suficientemente próximo de (x_0, y_0), segue que

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ou, de forma equivalente, definindo $h \triangleq x - x_0$ e $k \triangleq y - y_0$, temos que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx L(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k.$$

Desta forma, se f é uma função diferenciável em um ponto (x_0, y_0), podemos agora obter uma boa aproximação linear do valor de $f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$. Observe que diferentemente da aproximação que obtivemos quando vimos derivadas parciais (Seção 6.4), agora podemos alterar ligeiramente os valores das duas variáveis, sem necessidade de mexer só em uma e manter a outra fixa.

Exemplo 7.7.1: O volume V de um cilindro circular reto é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio do cilindro e h é sua altura. Determine uma boa aproximação linear para o volume do cilindro quando o raio é 4,001 e a altura é 5,998.

Solução: Como V é uma função polinomial, temos que V é diferenciável para todo $(r, h) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, a derivada de V é dada por

$$V(r,h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r}(r,h) & \frac{\partial V}{\partial h}(r,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi r h & \pi r^2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$V(4,6) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r}(4,6) & \frac{\partial V}{\partial h}(4,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48\pi & 16\pi \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$V(4+0,001\,,\,6-0,002) \approx L(4+0,001\,,\,6-0,002) = V(4,6) + f'(4,6)\cdot \begin{pmatrix} 0,001 \\ -0,002 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(4+0,001\,,\,6-0,002) &\approx 96\pi + \begin{pmatrix} 48\pi & 16\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,001 \\ -0,002 \end{pmatrix} \\ &\approx 96\pi + 0,048\pi - 0,032\pi \\ &\approx 96,016\pi. \end{aligned}$$

♡

Observação 7.7.1: O que foi feito acima para uma função real de duas variáveis reais pode ser estendido de forma natural para uma função real de várias variáveis reais. Isto é, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

e seja $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f é diferenciável em X_0, temos que temos que

$$L(X) \triangleq f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

é a melhor aproximação afim de f numa vizinhança do ponto X_0. Desta forma, se f é diferenciável em X_0, podemos dizer que, para X numa vizinhança suficientemente próxima de X_0, temos que $f(X)$ é bem aproximado por $L(X)$, ou seja para X suficientemente próximo de X_0, segue que

$$f(X) \approx L(X) = f(X_0) + f'(X_0) \cdot (X - X_0),$$

onde $\cdot$ é o produto matricial, ou, de forma equivalente, definindo $H \triangleq X - X_0$, temos que

$$f(X_0 + H) \approx L(X_0 + H) = f(X_0) + f'(X_0) \cdot H.$$