# PARTE 8

# DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

## 8.1 Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Dada a função real de duas variáveis,

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ X = (x,y) & \mapsto & f(X) = f(x,y), \end{array}$$

aprendemos anteriormente como construir suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y$. Estas derivadas parciais que estudamos são chamadas de *derivadas parciais de primeira ordem de* $f$. Nosso objetivo agora é definir as *derivadas parciais de ordem maior do que um.* Em primeiro lugar, observe que, dependendo da função $f$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y$ também são funções de duas variáveis definidas em abertos, de modo que também podemos calcular suas derivadas parciais, que são as funções $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x$ e $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_y$. Estas derivadas parciais das derivadas parciais da função $f$ são chamadas de *derivadas parciais de segunda ordem* de $f$ e suas notações são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx} = f_{11} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy} = f_{12} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx} = f_{21} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_y = f_{yy} = f_{22} \end{aligned}$$

**Observação 8.1.1:** Se definirmos $z = f(x,y)$, também utilizamos as notações $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**Observação 8.1.2:** As derivadas parciais de ordem maior do que dois são definidas de forma análoga. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right). \end{aligned}$$

**Exemplo 8.1.1:** Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x,y) = x^3y^2 + xy^4$.

**Solução:** Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função $f$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2y^2 + y^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^3y + 4xy^3. \end{aligned}$$

Agora, podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 6x^2y + 4y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 6x^2y + 4y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^3 + 12xy^2. \end{aligned}$$

♡

**Exemplo 8.1.2:** Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x,y) = xye^{y^2}$.

**Solução:** Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função $f$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= ye^{y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}. \end{aligned}$$

Agora, podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2xye^{y^2} + 4xye^{y^2} + 4xy^3 e^{y^2}
\end{aligned}$$

.

♡

**Exemplo 8.1.3:** Considere a função $f$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

**Solução:** Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função $f$. Para $(x,y) \neq (0,0)$, podemos utilizar as regras de derivação, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^3(x^2+y^2) - (xy^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3xy^2(x^2+y^2) - (xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Para $(x,y) = (0,0)$, conforme observado, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Vamos agora determinar as derivadas parciais mistas de segunda ordem da função $f$. Para $(x,y)\neq(0,0)$, podemos utilizar as regras de derivação, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{(5y^4-3x^2y^2)(x^2+y^2)^2-(y^5-x^2y^3)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}\\ &= \frac{(x^2+y^2)(2x^4+5y^6-3x^4y^2-(4y^6-4x^2y^4))}{(x^2+y^2)^4}\\ &= \frac{2x^2y^4+5y^6-3x^4y^2-4y^6+4x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}\\ &= \frac{y^6-3x^4y^2+6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{(9x^2y^2+y^4)(x^2+y^2)^2-(3x^3y^2+xy^4)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}\\ &= \frac{(x^2+y^2)(9x^4y^2+10x^2y^4+y^6-(12x^4y^2+4x^2y^4))}{(x^2+y^2)^4}\\ &= \frac{9x^4y^2+10x^2y^4+y^6-12x^4y^2-4x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}\\ &= \frac{y^6-3x^4y^2+6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}.\end{aligned}$$

Para $(x,y)=(0,0)$, conforme observado, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0+k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{k^5}{k^5}=1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^6-3x^4y^2+6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 1; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^6 - 3x^4y^2 + 6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

♡

Observe que nos Exemplo 8.1.1 e 8.1.2 temos a igualdade entre as derivadas parciais mistas de segunda ordem para todos os pontos no plano. Porém, isto nem sempre é verdade. De fato, no Exemplo 8.1.3 vimos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. O teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente para a igualdade das derivadas parciais mistas. Contudo, antes de enunciá-lo, vamos definir funções de *classe* $C^k$.

**DEFINIÇÃO 8.1.1:** Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que todas as derivadas parciais até ordem $k$ de $f$ existem e são contínuas em $A(aberto) \subseteq Dom(f)$, dizemos que $f$ é de *classe* $C^k$ em $A$. Em particular, se as derivadas parciais de segunda ordem de $f$ existem e são contínuas em $A(aberto) \subseteq Dom(f)$, dizemos que $f$ é de *classe* $C^2$ em $A$.

**TEOREMA 8.1.1:** (Teorema de Schwarz) Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^2$ no aberto $A \subseteq Dom(f)$, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in A.$$

**Observação 8.4.3:** Se

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

é uma função real de $n$ variáveis reais, as derivadas parciais de ordem maior ou igual a dois são definidas de forma análoga. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right). \end{aligned}$$

**Exemplo 8.1.3:** Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x,y,z) = x^2 \text{ sen } (yz)$.

**Solução:** Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função $f$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x \text{ sen } (yz)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x^2 z \cos(yz)\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= x^2 y \cos(yz)
\end{aligned}
$$

Agora podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= 2 \text{ sen } (yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) &= 2xz \cos(yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) &= 2xy \cos(yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= 2xz \cos(yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= -x^2 z^2 \text{ sen } (yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) &= x^2 \cos(yz) - x^2 yz \text{ sen } (yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= 2xy \cos(yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) &= x^2 \cos(yz) - x^2 yz \text{ sen } (yz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= -x^2 y^2 \text{ sen } (yz)
\end{aligned}
$$

♡

A definição de função de classe $C^k$ também se aplica se $f$ for uma função de mais do que duas variáveis, da mesma forma que o Teorema de Schwarz também permanece válido.

**DEFINIÇÃO 8.1.2:** Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que todas as derivadas parciais de $f$ até ordem $k$ existem e são contínuas em $A(aberto) \subseteq Dom(f)$, dizemos que $f$ é de *classe* $C^k$ em $A$. Em particular, se as derivadas parciais de $f$ até segunda ordem existem e são contínuas em $A(aberto) \subseteq Dom(f)$, dizemos que $f$ é de *classe* $C^2$ em $A$.

**TEOREMA 8.1.2:** (Teorema de Schwarz) Se

$$
\begin{aligned}
f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\
X = (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

é de classe $C^2$ no aberto $A \subseteq Dom(f)$, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in A,$$

para todo $i, j = 1, ..., n$.