PARTE 9

LIMITE, CONTINUIDADE E DERIVADA DE FUNÇÃO VETORIAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS

9.1 Introdução

Estudamos anteriormente limite, continuidade, derivadas parciais e derivada de funções reais de várias variáveis. Apresentaremos agora os mesmos conceitos e seus resultados importantes para funções vetoriais de várias variáveis reais. Porém, antes de mais nada, vamos começar definindo as operações usuais com estas funções, da mesma forma que fizemos com as funções vetoriais de uma variável real na Definição 2.1.1.

DEFINIÇÃO 9.1.1: Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e a constante $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, definimos as seguintes funções:

a) a função $F + G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *soma de F e G*, dada por

$$(F + G)(X) = F(X) + G(X), \forall\, X \in D;$$

b) a função $F - G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *diferença entre F e G*, dada por

$$(F - G)(X) = F(X) - G(X), \forall\, X \in D;$$

c) a função $kF : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela constante k*, dada por

$$(kF)(X) = kF(X), \forall\, X \in D;$$

d) a função $fF : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela função escalar f*, dada por

$$(fF)(X) = f(X)F(X), \forall\, X \in D;$$

e) se $f(X) \neq 0$, $\forall X \in D$, a função $\dfrac{F}{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *quociente de F pela função escalar f*, dada por

$$\left(\frac{F}{f}\right)(X) = \frac{F(X)}{f(X)}, \forall\, X \in D;$$

f) a função $F.G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto escalar de F e G*, dada por

$$(F.G)(X) = F(X).G(X), \forall\, X \in D;$$

g) se $m = 3$, a função $F \times G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$, chamada de *produto vetorial de F e G*, dada por

$$(F \times G)(X) = F(X) \times G(X), \forall\, X \in D.$$

9.2 Limites de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

Veremos agora os conceito de limite de funções vetoriais de várias variáveis, que conserva a idéia de limite vista até agora, apenas com um novo ajuste das distâncias envolvidas. Lembre-se que se $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ são dois vetores em $\mathbb{R}^n$, a distância entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é dada por

$$||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_n - u_n)^2},$$

onde a função $||\,.\,|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*. Lembre-se ainda que um ponto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto de acumulação do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se toda bola aberta com centro em X_0 contém pelo menos um ponto $X \in A$, $X \neq X_0$ (Definição 5.1.4).

DEFINIÇÃO 9.2.1: (Limite) Seja F a função vetorial $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja X_0 um ponto de acumulação de $Dom(F)$. Dizemos que $F(X)$ *tende a $L \in \mathbb{R}^m$ quando $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tende a $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$*, cuja notação é $\lim\limits_{X \to X_0} F(X) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < ||X - X_0|| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \delta \Rightarrow ||F(X) - L|| < \varepsilon.$$

Observe que para $F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X))$ e $L = (l_1, ..., l_m)$, temos que

$$||F(X) - L|| = \sqrt{(f_1(X) - l_1)^2 + (f_2(X) - l_2)^2 + ... + (f_m(X) - l_m)^2}.$$

Sendo assim, é fácil verificar que $\lim\limits_{t \to t_0} F(X) = L$ se e somente se $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(X) = l_i$, para todo $i = 1, ..., m$. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 9.2.1: Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rccc} F : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)). \end{array}$$

e seja $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$. Então, se X_0 é um ponto de acumulação de $Dom(F)$, temos que

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L \iff \lim_{X \to X_0} f_i(X) = l_i, \quad i = 1, ...m.$$

Observe que o teorema acima reduz a análise de limite de funções vetoriais de várias variáveis, a análise de limite de m funções reais de várias variáveis. Como consequência deste teorema, temos que continuam válidas as propriedades de limites vistas anteriormente (as que fazem sentido, é claro). Isto é, valem os teoremas abaixo.

TEOREMA 9.2.2: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(F)$, então

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L \Leftrightarrow \lim_{X \to X_0} F(X) - L = 0.$$

TEOREMA 9.2.3: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(F)$, então

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L \Leftrightarrow \lim_{Y \to 0} F(Y + X_0) = L.$$

TEOREMA 9.2.4: (Propriedades de Limite) Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{X \to X_0} F(X) = L$, $\lim_{X \to X_0} G(X) = M$, e $\lim_{t \to t_0} f(t) = k$. Neste caso, temos que

a) $\lim_{X \to X_0} (F \pm G)(X) = L \pm M$;
b) $\lim_{X \to X_0} (fF)(X) = kL$;
c) $\lim_{X \to X_0} \left(\dfrac{F}{f}\right)(X) = \dfrac{L}{k}$, se $k \neq 0$;
d) $\lim_{X \to X_0} ||F(X)|| = ||L||$;
e) $\lim_{X \to X_0} (F.G)(t) = L.M$;
f) caso $m = 3$, $\lim_{X \to X_0} (F \times G)(t) = L \times M$.

9.3 Continuidade de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

DEFINIÇÃO 9.3.1: (Continuidade) Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $X_0 \in Dom(F)$ um ponto de acumulação de $Dom(F)$. Dizemos que F é *contínua* em X_0, se

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = F(X_0).$$

Observe que de acordo com o Teorema 9.2.1, se $F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X))$, $X \in Dom(F)$, temos que

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = F(X_0) \Longleftrightarrow \lim_{X \to X_0} f_i(X) = f_i(X_0), \quad i = 1, ..., m.$$

Sendo assim, temos o seguinte teorema.

TEOREMA 9.3.1: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $X_0 \in Dom(F)$ um ponto de acumulação de $Dom(F)$. Então, F é contínua em X_0 se e somente se todas as suas funções coordenadas são contínuas em X_0.

9.4 Derivadas Parciais de Primeira Ordem de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

DEFINIÇÃO 9.4.1: (Derivadas Parciais de Primeira Ordem) Seja

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}.$$

Definimos a derivada parcial de F com respeito a variável x_i, no ponto $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, denotada por $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(X_0)$, da mesma forma que fizemos para funções reais de várias variáveis, i.e. através do limite

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_0) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{F(x_{10}, ..., x_{i0} + h, ..., x_{n0}) - F(x_{10}, ..., x_{i0}, ..., x_{n0})}{h}.$$

Desta forma, como o limite de uma função vetorial é calculado tomando-se os limites de cada uma de suas funções coordenadas, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_0) \;=\; \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0) \right).$$

Observação 9.4.1: As derivadas parciais de ordem maior ou igual a dois são definidas de forma análoga. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) \;=\; \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_i}(X_0), ..., \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) \right).$$

Também temos no contexto das funções vetoriais de várias variáveis, o conceito de funções de classe C^k. Confira a seguir.

DEFINIÇÃO 9.4.2: Se $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é tal que todas as suas derivadas parciais até ordem k existem e são contínuas no aberto $A \subseteq Dom(F)$, dizemos que F é de classe C^k em A. Em particular, se as derivadas parciais de primeira ordem existem e são contínuas aberto $A \subseteq Dom(F)$, dizemos que F é de classe C^1 em A.

Observação 9.4.2: Observe que, de acordo com definição de derivada parcial de funções vetoriais, dada uma função vetorial F, temos que todas as suas derivadas parciais até ordem k existem e são contínuas no aberto $A \subseteq Dom(F)$ se e só se todas as derivadas parciais até ordem k de todas as suas funções coordenadas existem e são contínuas em A. Desta forma, temos que F é de classe C^k em A se e só se todas as suas funções coordenadas são de classe C^k em A.

9.5 Derivada e Diferencial de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

DEFINIÇÃO 9.5.1: A função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + T(H) + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = \vec{0}.$$

A transformação linear T é denominada *diferencial* de F em X_0.

Conforme mencionado anteriormente, fixadas as bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é representada de forma única por uma matriz $n \times m$. Desta forma, se a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a qual a definição de derivada se refere, pode ser representada de forma única por uma matriz $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Esta matriz que representa T é chamada de *derivada de f em X_0* e é denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$. Abaixo daremos uma definição equivalente à Definição 9.5.1, utilizando a matriz no lugar da transformação linear.

DEFINIÇÃO 9.5.2: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\gtrdot}$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe uma matriz $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + M.H + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0,$$

onde (.) é o produto matricial.

A matriz $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ é chamada de *derivada de f em X_0* e é denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$.

Exemplo 9.5.1: Dado $F(x,y,z) = (x+y, 2z, 2x+2)$, mostre que a derivada de F em um ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é dada por

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução: Devemos mostrar que

$$\lim_{||(h,k,r)||\to 0} \frac{erro(h,k,r)}{||(h,k,r)||} = \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{erro(h,k,r)}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}} = \vec{0}.$$

Temos então que

$$\lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{erro(h,k,r)}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{F(x+h,y+k,z+r) - F(x,y,z) - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ r \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}}$$

$$= \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{\begin{pmatrix} x+h+y+k \\ 2z+2r \\ 2x+2h+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+y \\ 2z \\ 2x+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h+k \\ 2r \\ 2h \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}}$$

$$= \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

♡

Observe que, conforme esperado, no exemplo anterior, obtivemos que o $erro(h,k,r)$ é identicamente nulo, uma vez que F é uma transformação afim, representada na base canônica de $\mathbb{R}^3$ ($e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$), por

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Abaixo vamos definir diferenciabilidade em um conjunto aberto.

DEFINIÇÃO 9.5.3: Se F é diferenciável em todos os pontos do aberto $A \subseteq Dom(F)$, dizemos que F é diferenciável em A.

A seguir, temos o resultado importantíssimo de que diferenciabilidade implica em continuidade. Note que a demonstração apresentada quando vimos este resultado para funções reais de várias variáveis reais não levou em conta em nenhum momento a particularidade da função ser real. A demonstração no caso das funções vetoriais é portanto a mesma.

TEOREMA 9.5.1: Se $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, então F é contínua em X_0.

Observe que no exemplo anterior nos foi pedido apenas para comprovar que uma transformação linear era de fato a derivada da função. Tal como acontecia com funções reais de várias variáveis, temos uma candidata natural à derivada, que é a matriz das derivadas parciais de f. Confira o resultado a seguir.

TEOREMA 9.5.2: Seja

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

Se F é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, então F admite todas as derivadas parciais em X_0 e, utilizando as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a derivada da F em X_0, $F'(X_0)$, é dada por

$$F'(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}.$$

Quando vimos este resultado para funções reais de várias variáveis reais, observe que sua demonstração não levou em conta em nenhum momento a particularidade da função ser real. A demonstração no caso das funções vetoriais é portanto essencialmente a mesma.

Observação 9.5.1: A matriz acima é chamada de *Matriz Jacobiana* de F em X_0.

Exemplo 9.5.1: Determine a matriz das derivada parciais da função

$$F(x, y) = (f_1(x, y)\,,\; f_2(x, y)) = (x^2 + y^2 - 2, x^2 - y^2 - 1).$$

Solução: A matriz das derivadas parciais de F é dada por

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 9.5.2: Determine a matriz das derivadas parciais da função da função

$$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z)\,,\, f_2(x,y,z)) = (xyz, x^2+y^2+z^2).$$

Solução: A matriz das derivadas parciais de F é dada por

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 9.5.3: Determine a matriz das derivadas parciais da função

$$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z)\,,\, f_2(x,y,z)\,,\, f_3(x,y,z)) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3).$$

Solução: A matriz das derivadas parciais de F é dada por

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

♡

COROLÁRIO 9.5.1: A função

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$ se e somente se

(a) F admite todas as derivadas parciais em X_0, ou seja, existe a matriz das derivadas parciais de F em X_0, $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right)$;

(b) $\lim_{||H||\to 0} \dfrac{erro(H)}{||H||} = \lim_{||H||\to 0} \dfrac{F(X_0+H) - F(X_0) - \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right).H}{||H||} = 0$

(onde o produto (.) é um produto entre matrizes.)

Naturalmente, tal como acontecia com funções reais de várias variáveis, ser de classe C^1 é uma condição suficiente para garantir sua diferenciabilidade de funções vetoriais de várias variáveis. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 9.5.3: Se $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 no aberto $A \subseteq Dom(F)$, então F é diferenciável em A.

Exemplo 9.5.4: Verifique se a função $F(x,y) = (x^2+y^2-2, x^2-y^2-1)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Caso seja, determine $F'(x,y)$.

Solução: Como todas as funções coordenadas de F são polinomios, elas são naturalmente de classe C^1. Sendo assim, F classe C^1. Portanto, pelo Teorema 9.5.3, temos que F é diferenciável e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de F em (x,y). Isto é

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 9.5.5: Verifique se a função $F(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Caso seja, determine $F'(x,y,z)$.

Solução: Como todas as funções coordenadas de F são polinomios, elas são naturalmente de classe C^1. Sendo assim, F classe C^1. Portanto, pelo Teorema 9.5.3, temos que F é diferenciável e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de F em (x,y). Isto é

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 9.5.6: Verifique se a função $F(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Caso seja, determine $F'(x,y,z)$.

Solução: Como todas as funções coordenadas de F são polinomios, elas são naturalmente de classe C^1. Sendo assim, F classe C^1. Portanto, pelo Teorema 9.5.3, temos que F é diferenciável e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de F em (x,y). Isto é

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

♡