FIBRAÇÕES POR CURVAS NÃO LISAS

Rodrigo Salomão

Universidade Federal Fluminense

LEGAL 2012 – Teresópolis

Teorema (Bertini)

Quase todas as fibras de um morfismo dominante entre variedades algébricas lisas, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, são lisas.

Teorema (Bertini)

Quase todas as fibras de um morfismo dominante entre variedades algébricas lisas, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, são lisas.

Zariski (1944) descobriu que o teorema de Bertini sobre variação de pontos singulares pode falhar em característica positiva.

Contra-Exemplo em Característica Positiva

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$

$$S := \{((x, y), t) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \mid y^2 + x^p - t = 0\}$$

e

$$\eta : S \to \mathbb{A}^1(k)$$

induzido pela restrição a S da segunda projeção $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^1(k)$.

Contra-Exemplo em Característica Positiva

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$

$$S := \{((x, y), t) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \mid y^2 + x^p - t = 0\}$$

e

$$\eta : S \to \mathbb{A}^1(k)$$

induzido pela restrição a S da segunda projeção $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^1(k)$.

$$\mathrm{Sing}(\eta^{-1}(t)) = \{((t^{1/p}, 0), t)\}$$

Exemplo de Stöhr (2004)

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica 7.

$$S := \{((x,y),t) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \mid t(x^3 + xy^3) + y = 0\}$$

e

$$\eta : S \to \mathbb{A}^1(k)$$

induzido pela restrição a S da segunda projeção $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^1(k)$.

Exemplo de Stöhr (2004)

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica 7.

$$S := \{((x,y),t) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \mid t(x^3 + xy^3) + y = 0\}$$

e

$$\eta : S \to \mathbb{A}^1(k)$$

induzido pela restrição a S da segunda projeção $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^1(k)$.

$$\mathrm{Sing}(\eta^{-1}(t)) = \{((4t^{3/7}, 2t^{2/7}), t)\}$$

Fatos

1. Bombieri e Mumford (1976) utilizaram fibrações por cuspides para caracterizar as superfícies quasi-hiperelípticas na classificação de Enriques de superfícies em característica positiva;

Fatos

1. Bombieri e Mumford (1976) utilizaram fibrações por cuspides para caracterizar as superfícies quasi-hiperelípticas na classificação de Enriques de superfícies em característica positiva;
2. Isso fornece outras construções geométricas que nunca ocorrem em característica zero.

Fatos

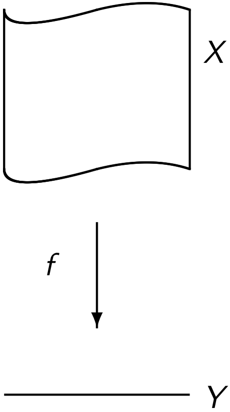
1. Bombieri e Mumford (1976) utilizaram fibrações por cuspides para caracterizar as superfícies quasi-hiperelípticas na classificação de Enriques de superfícies em característica positiva;
2. Isso fornece outras construções geométricas que nunca ocorrem em característica zero. Por exemplo, podemos ver em (S., 2011) que é possível encontrar um sistema linear por curvas não clássicas em $\mathbb{P}^2$, digamos

$$\mathbb{P}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k)$$

definido por $(x : y : z) \mapsto (z^4 : y^3 z - x^4)$, onde k é um corpo algebricamente fechado de característica 3.

Consideremos $f : X \to Y$ uma fibração por curvas, entre variedades (integrais) sobre um corpo algebricamente fechado k, isto é:

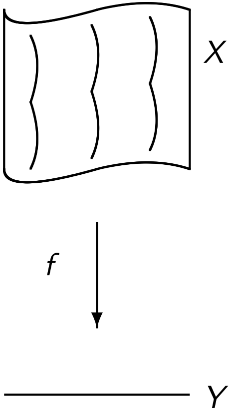
- f é um morfismo dominante e próprio;
- Quase todas as fibras de f são curvas integrais;
- X é liso, a menos de uma restrição da base Y a um aberto denso.



Ligações

Consideremos $f : X \to Y$ uma fibração por curvas, entre variedades (integrais) sobre um corpo algebricamente fechado k, isto é:

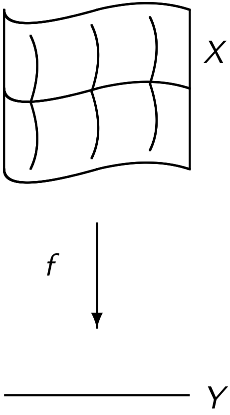
- f é um morfismo dominante e próprio;
- Quase todas as fibras de f são curvas integrais;
- X é liso, a menos de uma restrição da base Y a um aberto denso.



Ligações

Consideremos $f : X \to Y$ uma fibração por curvas, entre variedades (integrais) sobre um corpo algebricamente fechado k, isto é:

- f é um morfismo dominante e próprio;
- Quase todas as fibras de f são curvas integrais;
- X é liso, a menos de uma restrição da base Y a um aberto denso.



Ligações

Se η é a fibra genérica de Y, então nós temos a seguinte bijeção

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{divisores primos e} \\ \text{horizontais de } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{pontos fechados de} \\ X_\eta = X \times_Y \operatorname{Spec} k(Y) \end{array} \right\}$$

Ligações

Se η é a fibra genérica de Y, então nós temos a seguinte bijeção

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{divisores primos e} \\ \text{horizontais de } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{pontos fechados de} \\ X_\eta = X \times_Y \operatorname{Spec} k(Y) \end{array} \right\}$$

Questão: Qual propriedade caracteriza os pontos de X_η que correspondem aos divisores primos horizontais, contidos no lugar não liso de f?

Ligações

Seja P o ponto de $X_\eta = \operatorname{Spec} \frac{k(t)[x,y]}{(y^2+x^p-t)}$ dado pelo ideal

$$P = \frac{(x^p - t, y)}{(y^2 + x^p - t)}.$$

Ligações

Seja P o ponto de $X_\eta = \operatorname{Spec} \frac{k(t)[x,y]}{(y^2+x^p-t)}$ dado pelo ideal

$$P = \frac{(x^p - t, y)}{(y^2 + x^p - t)}.$$

Como nós temos a relação $-y^2 = x^p - t$, no anel local $\mathcal{O}_{X_\eta,P}$, temos que o quociente $\mathfrak{M}_{X_\eta,P}/\mathfrak{M}^2_{X_\eta,P}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 e gerado por y.

Ligações

Seja P o ponto de $X_\eta = \operatorname{Spec} \frac{k(t)[x,y]}{(y^2+x^p-t)}$ dado pelo ideal

$$P = \frac{(x^p - t, y)}{(y^2 + x^p - t)}.$$

Como nós temos a relação $-y^2 = x^p - t$, no anel local $\mathcal{O}_{X_\eta,P}$, temos que o quociente $\mathfrak{M}_{X_\eta,P}/\mathfrak{M}^2_{X_\eta,P}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 e gerado por y. Portanto P é um ponto regular de X_η.

Seja P o ponto de $X_\eta = \operatorname{Spec} \frac{k(t)[x,y]}{(y^2+x^p-t)}$ dado pelo ideal

$$P = \frac{(x^p - t, y)}{(y^2 + x^p - t)}.$$

Como nós temos a relação $-y^2 = x^p - t$, no anel local $\mathcal{O}_{X_\eta,P}$, temos que o quociente $\mathfrak{M}_{X_\eta,P}/\mathfrak{M}^2_{X_\eta,P}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 e gerado por y. Portanto P é um ponto regular de X_η. Por outro lado o critério do Jacobiano nos diz que o ponto fechado

$$\frac{(x - t^{1/p}, y)}{(y^2 + x^p - t)} \in X_\eta \times_{\operatorname{Spec} k(t)} \operatorname{Spec} \overline{k(t)},$$

que está sobre P, é o único ponto não regular de $X_\eta \times_{\operatorname{Spec} k(t)} \operatorname{Spec} \overline{k(t)}$.

Ligações

Portanto, a resposta para a questão anterior vem da diferenciação do conceito de um ponto simples P em uma variedade V (sobre um corpo K), devido a Zariski (1947):

1. Regular, no sentido de ter o anel local regular;
2. Liso, no sentido de satisfazer o critério do Jacobiano, isto é, os pontos de $V \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são regulares.

Ligações

Portanto, a resposta para a questão anterior vem da diferenciação do conceito de um ponto simples P em uma variedade V (sobre um corpo K), devido a Zariski (1947):

1. Regular, no sentido de ter o anel local regular;
2. Liso, no sentido de satisfazer o critério do Jacobiano, isto é, os pontos de $V \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são regulares.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{divisores primos} \\ \text{horizontais contidos} \\ \text{no lugar não liso de } f \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{pontos fechados e} \\ \text{não lisos de } X_\eta \end{array} \right\}$$

Ligações

Note que X_η é regular, pois X também é regular.

Ligações

Note que X_η é regular, pois X também é regular. Portanto:

$$\begin{gathered} f \ \text{ é uma fibração por curvas não lisas} \\ \Longleftrightarrow \\ X_\eta \ \text{ é uma curva regular mas não lisa,} \\ \text{geometricamente integral e completa} \\ \text{sobre } \ k(Y) \end{gathered}$$

Ligações

Seja C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.

Ligações

Seja C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.
Consideremos também g e $\overline{g}$ os gêneros geométricos de C e $C \otimes_K \overline{K}$, respectivamente.

Ligações

Seja C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.
Consideremos também g e $\overline{g}$ os gêneros geométricos de C e $C \otimes_K \overline{K}$, respectivamente.
Como C é regular, temos que g coincide com o gênero aritmético de C.

Ligações

Seja C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.
Consideremos também g e $\overline{g}$ os gêneros geométricos de C e $C \otimes_K \overline{K}$, respectivamente.
Como C é regular, temos que g coincide com o gênero aritmético de C.
Mas o gênero aritmético é invariante por extensão do corpo de constantes.
Desta forma, g também coincide com o gênero aritmético de $C \otimes_K \overline{K}$.

Ligações

Seja C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.
Consideremos também g e $\overline{g}$ os gêneros geométricos de C e $C \otimes_K \overline{K}$, respectivamente.
Como C é regular, temos que g coincide com o gênero aritmético de C.
Mas o gênero aritmético é invariante por extensão do corpo de constantes.
Desta forma, g também coincide com o gênero aritmético de $C \otimes_K \overline{K}$.
Portanto, C é regular mas não lisa se, e somente se,

$$g > \overline{g}.$$

Ligações

Seja C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.
Consideremos também g e $\overline{g}$ os gêneros geométricos de C e $C \otimes_K \overline{K}$, respectivamente.
Como C é regular, temos que g coincide com o gênero aritmético de C.
Mas o gênero aritmético é invariante por extensão do corpo de constantes.
Desta forma, g também coincide com o gênero aritmético de $C \otimes_K \overline{K}$.
Portanto, C é regular mas não lisa se, e somente se,

$$g > \overline{g}.$$

Neste caso, o corpo de funções em uma variável $K(C)|K$ é chamado de não conservativo.

O efeito do Frobenius relativo

Da abordagem clássica de corpos de funções não conservativos, também obtemos um interessante efeito do morfismo de frobenius relativo em fibrações por curvas não lisas.

O efeito do Frobenius relativo

Da abordagem clássica de corpos de funções não conservativos, também obtemos um interessante efeito do morfismo de frobenius relativo em fibrações por curvas não lisas.
Consideraremos agora somente esquemas sobre o corpo finito $\mathbb{F}_p$, onde $p > 0$ é um primo fixado.

O efeito do Frobenius relativo

Da abordagem clássica de corpos de funções não conservativos, também obtemos um interessante efeito do morfismo de frobenius relativo em fibrações por curvas não lisas.
Consideraremos agora somente esquemas sobre o corpo finito $\mathbb{F}_p$, onde $p > 0$ é um primo fixado. Dado um esquema S temos o morfismo de Frobenius absoluto de S

$$F_S : S \to S$$

induzido pelo seguinte homomorfismo de anéis

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S & \to & \mathcal{O}_S \\ a & \mapsto & a^p \end{array}$$

O efeito do Frobenius relativo

Além disso, se considerarmos um esquema X sobre S, teremos um outro S-esquema $X^{(p)} = X \times_S S$ obtido pelo pullback de π via F_S.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"'] \\ S \arrow[r, "F_S"] & S \end{tikzcd}$$

O efeito do Frobenius relativo

Além disso, se considerarmos um esquema X sobre S, teremos um outro S-esquema $X^{(p)} = X \times_S S$ obtido pelo pullback de π via F_S.

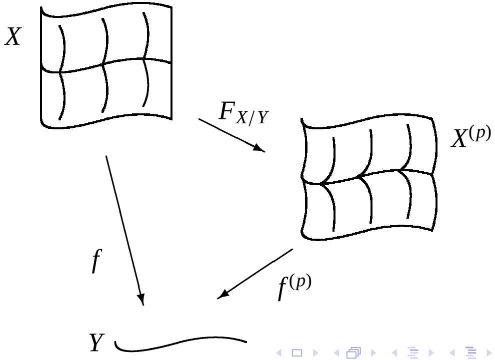
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"'] \\ S \arrow[r, "F_S"] & S \end{tikzcd}$$

O morfismo de Frobenius relativo é o único morfismo $F_{X/S}$ que comuta o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dr, "\pi"] & \\ X \arrow[urr, "F_X"] \arrow[r, "F_{X/S}"'] \arrow[drr, "\pi"'] & & X^{(p)} \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[r] & S \\ & & S \arrow[ur, "F_S"'] & \end{tikzcd}$$

Proposição (S., 2011)

Seja $f : X \to Y$ um morfismo dominante e próprio entre variedades algébricas com fibra genérica geometricamente integral. Então, as imagens dos divisores primos horizontais, contidos no lugar não liso de f, por $F_{X/Y}$, são exatamente os divisores primos horizontais contidos no lugar não liso de $X^{(p)}$, como variedade sobre k.



Curvas regulares mas não lisas

Antes de apresentar as idéias da classificação de curvas regulares mas não lisas iremos apresentar duas propriedades interessantes das singularidades aparecendo na curva estendida.

Curvas regulares mas não lisas

Antes de apresentar as idéias da classificação de curvas regulares mas não lisas iremos apresentar duas propriedades interessantes das singularidades aparecendo na curva estendida.

Proposição (K.-i. Watanabe, T. Ishikawa, S. Tachibana and K. Otsuka, 1969)

Seja P um ponto regular mas não liso de uma curva C sobre um corpo K. Então as singularidades de $C \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são Gorenstein.

Curvas regulares mas não lisas

Antes de apresentar as idéias da classificação de curvas regulares mas não lisas iremos apresentar duas propriedades interessantes das singularidades aparecendo na curva estendida.

Proposição (K.-i. Watanabe, T. Ishikawa, S. Tachibana and K. Otsuka, 1969)

Seja P um ponto regular mas não liso de uma curva C sobre um corpo K. Então as singularidades de $C \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são Gorenstein.

Proposição (S.)

Seja P um ponto regular mas não liso de uma curva C sobre um corpo K. Então as singularidades de $C \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são unibranch.

Curvas regulares mas não lisas

Antes de apresentar as idéias da classificação de curvas regulares mas não lisas iremos apresentar duas propriedades interessantes das singularidades aparecendo na curva estendida.

Proposição (K.-i. Watanabe, T. Ishikawa, S. Tachibana and K. Otsuka, 1969)

Seja P um ponto regular mas não liso de uma curva C sobre um corpo K. Então as singularidades de $C \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são Gorenstein.

Proposição (S.)

Seja P um ponto regular mas não liso de uma curva C sobre um corpo K. Então as singularidades de $C \otimes_K \overline{K}$, sobre P, são unibranch.

Corolário (S.)

As singularidades aparecendo sobre a fibra geral de uma fibração por curvas não lisas são sempre unibranch.

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.Tate (1952) obteve a seguinte cota superior para a característica p do corpo de base K de C, em termos de seu gênero geométrico g.

$$p \leq 2g + 1$$

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.Tate (1952) obteve a seguinte cota superior para a característica p do corpo de base K de C, em termos de seu gênero geométrico g.

$$p \leq 2g + 1$$

Curvas regulares mas não lisas foram classificadas, a menos de isomorfismos, nos seguintes casos:

1. Queen (1971) para $g = 1$;

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.Tate (1952) obteve a seguinte cota superior para a característica p do corpo de base K de C, em termos de seu gênero geométrico g.

$$p \leq 2g + 1$$

Curvas regulares mas não lisas foram classificadas, a menos de isomorfismos, nos seguintes casos:

1. Queen (1971) para $g = 1$;
2. Borges Neto (1979) para $g = 2$;

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.Tate (1952) obteve a seguinte cota superior para a característica p do corpo de base K de C, em termos de seu gênero geométrico g.

$$p \leq 2g + 1$$

Curvas regulares mas não lisas foram classificadas, a menos de isomorfismos, nos seguintes casos:

1. Queen (1971) para $g = 1$;
2. Borges Neto (1979) para $g = 2$;
3. Stichtenoth (1978) para $g = 3$ e $p = 7$ dentro do caso geral $g = (p-1)/2$ e $p > 2$;

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.Tate (1952) obteve a seguinte cota superior para a característica p do corpo de base K de C, em termos de seu gênero geométrico g.

$$p \leq 2g + 1$$

Curvas regulares mas não lisas foram classificadas, a menos de isomorfismos, nos seguintes casos:

1. Queen (1971) para $g = 1$;
2. Borges Neto (1979) para $g = 2$;
3. Stichtenoth (1978) para $g = 3$ e $p = 7$ dentro do caso geral $g = (p-1)/2$ e $p > 2$;
4. Villela (1984) para $g = 3$ e $p = 5$ dentro do caso geral $g = (p+1)/2$ e $p \geq 5$;

Curvas regulares mas não lisas

Consideremos de novo C uma curva completa, geometricamente integral, regular e não lisa sobre um corpo K.Tate (1952) obteve a seguinte cota superior para a característica p do corpo de base K de C, em termos de seu gênero geométrico g.

$$p \leq 2g + 1$$

Curvas regulares mas não lisas foram classificadas, a menos de isomorfismos, nos seguintes casos:

1. Queen (1971) para $g = 1$;
2. Borges Neto (1979) para $g = 2$;
3. Stichtenoth (1978) para $g = 3$ e $p = 7$ dentro do caso geral $g = (p-1)/2$ e $p > 2$;
4. Villela (1984) para $g = 3$ e $p = 5$ dentro do caso geral $g = (p+1)/2$ e $p \geq 5$;
5. Em 2011 comecei a classificar o caso $g = 3$ e $p = 3$.

O grau de singularidade geométrico de $P \in C$ é definido por

$$\dim_{\overline{K}} \frac{\widetilde{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}}}{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}},$$

onde $\widetilde{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}}$ é o fecho inteiro de $\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}$ no corpo $K(C)\overline{K} \simeq \overline{K}(C \otimes_K \overline{K})$.

O grau de singularidade geométrico de $P \in C$ é definido por

$$\dim_{\overline{K}} \frac{\widetilde{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}}}{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}},$$

onde $\widetilde{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}}$ é o fecho inteiro de $\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}$ no corpo $K(C)\overline{K} \simeq \overline{K}(C \otimes_K \overline{K})$. Pode ser provado que o grau de singularidade é um múltiplo de $(p-1)/2$ e

$$g - \overline{g} = \sum_{P \in C} \dim_{\overline{K}} \frac{\widetilde{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}}}{\overline{K}\mathcal{O}_{P,C}},$$

onde $\overline{g}$ é o gênero geométrico de $C \otimes_K \overline{K}$.

Curvas regulares mas não lisas

Para o caso $p = 3$ e $g = 3$, temos as seguintes possibilidades para o gênero geométrico $\overline{g}$ de $C \otimes_K \overline{K}$, o número de pontos não lisos de C e seus respectivos graus de singularidade geométrico.

$\overline{g}$	Número de pontos não lisos	Possíveis graus de singularidade geométrico
0	1	3
	2	1 e 2
	3	1
1	1	2
	2	1
2	1	1

Curvas regulares mas não lisas

Teorema (S., 2011)

Seja C uma curva regular e completa sobre um corpo K de característica três. Então C é geometricamente integral de gênero três e admite um ponto não liso e não decomposto com grau de singularidade geométrico três, com imagem racional via $\widetilde{F_{C/K}}$ se, e somente se, C é isomorfo a uma quártica plana projetiva sobre K definida pelo polinômio homogêneo

$$ZY^3 - aZ^4 - bZX^3 - X^4$$

onde $a \in K \setminus K^3$ e $b \in K$.

Curvas regulares mas não lisas

Teorema (S., 2011)

Seja C uma curva regular e completa sobre um corpo K de característica três. Então C é geometricamente integral de gênero três e admite um ponto não liso e não decomposto com grau de singularidade geométrico três, com imagem racional via $\widetilde{F_{C/K}}$ se, e somente se, C é isomorfo a uma quártica plana projetiva sobre K definida pelo polinômio homogêneo

$$ZY^3 - aZ^4 - bZX^3 - X^4$$

onde $a \in K \setminus K^3$ e $b \in K$. Além disso, o ponto não liso desta curva corresponde ao ponto $(0 : a^{1/3} : 1)$ do plano projetivo $\mathbb{P}^2(\overline{K})$.

Curvas regulares mas não lisas

Teorema (S., 2011)

Seja C uma curva regular e completa sobre um corpo K de característica três. Então C é geometricamente integral de gênero três e admite um ponto não liso e não decomposto com grau de singularidade geométrico três, com imagem racional via $\widetilde{F_{C/K}}$ se, e somente se, C é isomorfo a uma quártica plana projetiva sobre K definida pelo polinômio homogêneo

$$ZY^3 - aZ^4 - bZX^3 - X^4$$

onde $a \in K \setminus K^3$ e $b \in K$. Além disso, o ponto não liso desta curva corresponde ao ponto $(0 : a^{1/3} : 1)$ do plano projetivo $\mathbb{P}^2(\overline{K})$.

Corolário

A curva estendida $C \otimes_K \overline{K}$ é não clássica (isto é, todos os seus pontos são pontos de inflexão) e admite um único ponto de Weierstrass.

Curvas regulares mas não lisas

Teorema (S.)

Seja C uma curva regular e completa sobre um corpo K de característica três. Então C é geometricamente integral, com gênero três e admite três pontos não lisos se, e somente se, C é isomorfa a uma quártica plana projetiva sobre K definida pelo polinômio homogêneo

$$ZY^3 - (a+b+c)X^4 - (a-b)X^3Z - (a+b+c)X^2Z^2 + cZ^4$$

onde $a, b, c \in K \setminus K^3$ *e* $a+b+c \neq 0$.

Curvas regulares mas não lisas

Teorema (S.)

Seja C uma curva regular e completa sobre um corpo K de característica três. Então C é geometricamente integral, com gênero três e admite três pontos não lisos se, e somente se, C é isomorfa a uma quártica plana projetiva sobre K definida pelo polinômio homogêneo

$$ZY^3 - (a+b+c)X^4 - (a-b)X^3Z - (a+b+c)X^2Z^2 + cZ^4$$

onde $a, b, c \in K \setminus K^3$ e $a+b+c \neq 0$. Além disso, os pontos não lisos desta curva correspondem aos pontos $(0 : c^{1/3} : 1)$, $(1 : b^{1/3} : 1)$ e $(-1 : a^{1/3} : 1)$ do plano projetivo $\mathbb{P}^2(\overline{K})$.

Vamos dar um exemplo de uma curva regular com um ponto não liso que se ramifica em três pontos não lisos após uma extensão do corpo de constantes.

Curvas regulares mas não lisas

Vamos dar um exemplo de uma curva regular com um ponto não liso que se ramifica em três pontos não lisos após uma extensão do corpo de constantes.

Sejam k algebricamente fechado de característica 3, t transcendente sobre k e $K = k(t)$.

Curvas regulares mas não lisas

Vamos dar um exemplo de uma curva regular com um ponto não liso que se ramifica em três pontos não lisos após uma extensão do corpo de constantes.
Sejam k algebricamente fechado de característica 3, t transcendente sobre k e $K = k(t)$. Consideremos a curva C, sobre K, definida por

$$F = Y^3 - X - tX^2 - tX^4.$$

Curvas regulares mas não lisas

Vamos dar um exemplo de uma curva regular com um ponto não liso que se ramifica em três pontos não lisos após uma extensão do corpo de constantes.
Sejam k algebricamente fechado de característica 3, t transcendente sobre k e $K = k(t)$. Consideremos a curva C, sobre K, definida por

$$F = Y^3 - X - tX^2 - tX^4.$$

As singularidades da curva $C \otimes_K \overline{K}$ são as três soluções do sistema:

$$\begin{cases} Y^3 = X + tX^2 + tX^4 \\ 0 = \partial F/\partial X = -(1 + 2tX + tX^3) \end{cases}$$

Curvas regulares mas não lisas

Vamos dar um exemplo de uma curva regular com um ponto não liso que se ramifica em três pontos não lisos após uma extensão do corpo de constantes.
Sejam k algebricamente fechado de característica 3, t transcendente sobre k e $K = k(t)$. Consideremos a curva C, sobre K, definida por

$$F = Y^3 - X - tX^2 - tX^4.$$

As singularidades da curva $C \otimes_K \overline{K}$ são as três soluções do sistema:

$$\begin{cases} Y^3 = X + tX^2 + tX^4 \\ 0 = \partial F/\partial X = -(1 + 2tX + tX^3) \end{cases}$$

Por outro lado, é possível provar que o polinômio $\partial F/\partial X$ é irredutível em $K[X]$, o que implica que só existe um ponto $P \in C$ abaixo das três singularidades de $C \otimes_K \overline{K}$.

Uma fibração universal por curvas não lisas

Para voltar ao problema de fibrações por curvas não lisas construímos uma fibração universal, no sentido em que esta contém todas as fibrações por curvas não lisas, com fibra genérica previamente fixada.

Uma fibração universal por curvas não lisas

Por exemplo, se estamos no caso do último teorema, então a fibração universal pode ser construída da seguinte forma.

Uma fibração universal por curvas não lisas

Por exemplo, se estamos no caso do último teorema, então a fibração universal pode ser construída da seguinte forma.
Consideremos a variedade T de dimensão 4 em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^3$ dada pelo polinômio $ZY^3 - (a+b+c)X^4 - (a-b)X^3Z - (a+b+c)X^2Z^2 + cZ^4$ e $\pi : T \to \mathbb{A}^3$ induzido pela segunda projeção.

Uma fibração universal por curvas não lisas

Por exemplo, se estamos no caso do último teorema, então a fibração universal pode ser construída da seguinte forma.
Consideremos a variedade T de dimensão 4 em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^3$ dada pelo polinômio $ZY^3 - (a+b+c)X^4 - (a-b)X^3Z - (a+b+c)X^2Z^2 + cZ^4$ e $\pi : T \to \mathbb{A}^3$ induzido pela segunda projeção.

Teorema (S.)

Cada fibração por quárticas planas projetivas com três pontos singulares é obtida a menos de equivalência birracional por uma extensão da base da fibração $\pi : T \to \mathbb{A}^3$ ou por uma fibração obtida pela restrição da base de π a uma curva irredutível em $\mathbb{A}^3$ ou a uma superfície irredutível em $\mathbb{A}^3$.

Uma fibração universal por curvas não lisas

Por exemplo, se estamos no caso do último teorema, então a fibração universal pode ser construída da seguinte forma.
Consideremos a variedade T de dimensão 4 em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^3$ dada pelo polinômio $ZY^3 - (a+b+c)X^4 - (a-b)X^3Z - (a+b+c)X^2Z^2 + cZ^4$ e $\pi : T \to \mathbb{A}^3$ induzido pela segunda projeção.

Teorema (S.)

Cada fibração por quárticas planas projetivas com três pontos singulares é obtida a menos de equivalência birracional por uma extensão da base da fibração $\pi : T \to \mathbb{A}^3$ ou por uma fibração obtida pela restrição da base de π a uma curva irredutível em $\mathbb{A}^3$ ou a uma superfície irredutível em $\mathbb{A}^3$.

Corolário

Quase toda fibra de uma fibração por quárticas planas projetivas com três pontos não lisos, sobre um corpo algebricamente fechado de característica três, são não clássicas e admitem um único ponto de Weierstrass.

Problemas Interessantes

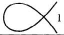
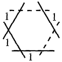
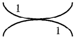
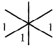
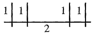
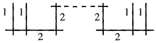
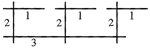
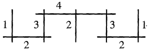
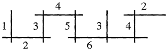
Descrever o modelo minimal de fibrações por curvas não lisas sobre a reta projetiva e determinar a estrutura de suas fibras, em analogia a classificação de Kodaira–Néron das fibras especiais de uma fibração minimal por curvas elípticas.

Descrever o modelo minimal de fibrações por curvas não lisas sobre a reta projetiva e determinar a estrutura de suas fibras, em analogia a classificação de Kodaira–Néron das fibras especiais de uma fibração minimal por curvas elípticas.

Teorema (Kodaira, Néron)

Seja R um anel de valorização discreta com corpo de frações K e corpo residual k algebricamente fechado. Seja S/R uma superfície elíptica sobre R, isto é, uma superfície sobre R cuja fibra genérica é uma curva elíptica sobre K. Além disso, seja Q/R o modelo minimal da fibração elíptica S/R. Então a fibra especial de S/R, isto é, a fibra sobre o ponto fechado de R tem uma das seguintes formas.

Problemas Interessantes

Reduction Type	Number of Components	Configuration (with multiplicity)
I_0	1	
I_1	1	
I_n	n	
II	1	
III	2	
IV	3	
I_0^*	5	
I_n^*	n + 5	
IV^*	7	
III^*	8	
II^*	9	

Problemas Interessantes

W. Lang (1979) verificou que só aparecem os casos II, IV, II^* e IV^* para as fibras especiais de uma fibração por curvas não lisas de gênero um.

Problemas Interessantes

W. Lang (1979) verificou que só aparecem os casos II, IV, II^* e IV^* para as fibras especiais de uma fibração por curvas não lisas de gênero um. Para fibrações por curvas de gênero dois, Namikawa e Ueno (1973) listaram 120 caso possíveis.

Problemas Interessantes

W. Lang (1979) verificou que só aparecem os casos II, IV, II^* e IV^* para as fibras especiais de uma fibração por curvas não lisas de gênero um.
Para fibrações por curvas de gênero dois, Namikawa e Ueno (1973) listaram 120 caso possíveis.
Para gênero três o problema se torna muito mais difícil com mais de 3000 configurações de fibras especiais.
Questão: O que se pode dizer sobre fibrações por curvas não lisas?

Problemas Interessantes

Quais superfícies minimais podem ser fibradas por curva não lisas?