Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

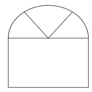
LISTA 16 - 2008-1

Problemas de otimização

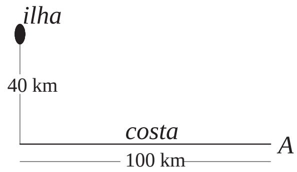
1. Quais são as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semi-círculo de raio r?

2. Uma página deve conter $60\,\text{cm}^2$ de área impressa. As margens superior e inferior devem ter 3 cm, enquanto as laterais têm 2 cm cada. Encontre as dimensões da página que consomem a menor quantidade de papel.

3. Constrói-se uma janela normanda colocando-se um semicírculo em cima de uma janela retangular (figura ao lado). Encontre as dimensões da janela de área máxima, sabendo-se que seu perímetro é de 5 m.



4. Uma ilha situada a 40 km da costa deve ter um serviço de barcos para uma cidade **A** (figura ao lado). Se os barcos têm velocidade média de 15 km/h e os carros uma velocidade média de 45 km/h, onde deverá estar situada a estação de barcos na costa, a fim de tornar a via a mais rápida possível?



5. Considere os triângulos retângulos no 1^o. quadrante, cada um com seus lados apoiados nos eixos coordenados e em uma reta que contém o ponto $(2, 3)$. Encontre o triângulo de área mínima.

6. Encontre as dimensões do cone circular de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio r. Calcule o volume desse cone.

7. Um oleoduto tem a forma da curva $y = 1 - x^2$ com $0 \leq x \leq 1$, x e y medidos em quilômetros. Será construída uma cerca tangente à curva $y = 1 - x^2$ no ponto $P \neq (0, 1)$. Determine as coordenadas do ponto P de modo que a área da região triangular formada pela cerca e pelos eixos seja mínima.

8. Se um objeto dista x unidades de um foco de intensidade luminosa constante I, a luminosidade do objeto é igual a I/x^2. Dois focos, F_1 e F_2 de intensidades I_1 e I_2, respectivamente, encontram-se separados por d unidades. Em que ponto do segmento de reta que liga F_1 a F_2, a luminosidade é mínima? Qual deve ser a razão entre I_1 e I_2 para que o ponto de luminosidade mínima entre os dois focos esteja a uma distância de $d/3$ unidades da fonte de luminosidade I_1?

9. Um quadro de altura H está pendurado em uma parede vertical de modo que sua borda inferior está a uma altura h do raio de visão horizontal de um observador. A que distância da parede deve colocar-se o observador para que a sua posição seja a mais vantajosa para contemplar o quadro, isto é, para que o ângulo de visão seja máximo?

10. Um fabricante produz por semana x toneladas de um certo produto. O preço de venda é de p unidades monetárias por tonelada do produto e está relacionado com x por $5x = 375 - 3p, p \geq 0$. O custo de produção é de $C(x) = 500 + 15x + \frac{x^2}{6}$ unidades monetárias. Determine x para que o lucro (=venda−custo) seja máximo. Determine, também, o lucro máximo.

RESPOSTAS

1. Base (no diâmetro) $= r\sqrt{2}$ e altura $= r\sqrt{2}/2$.
2. São $6 + 3\sqrt{10} \cong 15,49\,\text{cm}$ e $4 + 2\sqrt{10} \cong 10,32\,\text{cm}$.
3. Retângulo: base $= \dfrac{10}{\pi + 4} \cong 1,4\,\text{m}$, altura $= \dfrac{5}{\pi + 4} \cong 0,7\,\text{m}$.
4. À $100 - 10\sqrt{2} \cong 85,86$ km de A.
5. Vértices: $(0,0)$; $(4,0)$; $(0,6)$.
6. Raio $= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}r$, altura $= \dfrac{4}{3}r$, volume $= \dfrac{32\pi}{81}r^3$.
7. Distância do ponto a F_1 é $\dfrac{\sqrt[3]{I_1}\ d}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$, razão $= 8$.
8. $P = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.
9. Distância $= \sqrt{hH + h^2}$.
10. $x = 30$ toneladas e lucro $= 1150$ unidades monetárias.