EXISTE VIDA GEOMÉTRICA NO MUNDO DA ÁLGEBRA ABSTRATA?

Rodrigo Salomão

Fatos Históricos

Problemas levantados pelos Gregos (400 a.c.):

Fatos Históricos

Problemas levantados pelos Gregos (400 a.c.):

1. Dado um retângulo de lados a e b, existe um quadrado de lado x cuja área é a mesma deste retângulo?

Fatos Históricos

Problemas levantados pelos Gregos (400 a.c.):

1. Dado um retângulo de lados a e b, existe um quadrado de lado x cuja área é a mesma deste retângulo?
Solução: Encontrar raízes da equação

$$X^2 = a \cdot b.$$

Problemas levantados pelos Gregos (400 a.c.):

1. Dado um retângulo de lados a e b, existe um quadrado de lado x cuja área é a mesma deste retângulo?
Solução: Encontrar raízes da equação

$$X^2 = a \cdot b.$$

Reformulação da equação acima:

$$\frac{X}{b} = \frac{a}{X}.$$

2.(*Problema de Delic*) Dado um paralelepípedo de volume $a^2 \cdot b$, existe um cubo com este volume?

2.(*Problema de Delic*) Dado um paralelepípedo de volume $a^2 \cdot b$, existe um cubo com este volume?
Solução: Encontrar raízes da equação

$$X^3 = a^2 \cdot b.$$

Fatos Históricos

2.(*Problema de Delic*) Dado um paralelepípedo de volume $a^2 \cdot b$, existe um cubo com este volume?
Solução: Encontrar raízes da equação

$$X^3 = a^2 \cdot b.$$

Reformulação da equação acima (Hippocrates 420 a.c):

$$\frac{a}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{b}.$$

Fatos Históricos

2.(*Problema de Delic*) Dado um paralelepípedo de volume $a^2 \cdot b$, existe um cubo com este volume?
Solução: Encontrar raízes da equação

$$X^3 = a^2 \cdot b.$$

Reformulação da equação acima (Hippocrates 420 a.c):

$$\frac{a}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{b}.$$

Solução de Menaechmus (350 a.c.): Considerar o lugar dos zeros em comum das equações quadráticas

$$a \cdot Y = X^2 \text{ e } X \cdot Y = a \cdot b.$$

Fatos Históricos

Esta última solução começou a empregar o conceito de coordenadas (Geometria Analítica), que foi formalizado por Fermat e Descartes.

Figura: Pierre de Fermat

Figura: René Descartes

Isto possibilitou o estudo da classificação, a menos de mudanças de coordenadas, dos conjuntos de soluções de equações algébricas. Por exemplo, no período entre 1630 e 1795:

1. Fermat classificou curvas de grau dois;
2. Newton classificou curvas de grau três;
3. Euler classificou curvas de grau quatro.

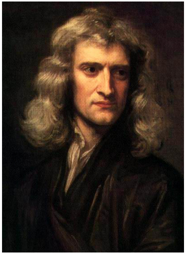


Figura: Isaac Newton

Figura: Leonhard Euler

Até 1882 muitas técnicas analíticas foram empregadas no estudo destes objetos.

O surgimento da Álgebra Abstrata

Até 1882 muitas técnicas analíticas foram empregadas no estudo destes objetos. Neste meio termo Riemann introduziu o conceito de *funções racionais* em curvas, sugerindo futuramente uma ligação entre Geometria e Álgebra Abstrata.

Figura: Bernhard Riemann

Já em 1882 Kronecker, Dedekind e Weber começaram a introduzir relações entre geometria e teoria dos números.

Figura: Leopold Kronecker

Figura: Richard Dedekind

Figura: Heinrich Martin Weber

O surgimento da Álgebra Abstrata

Exemplo: Para estudar soluções inteiras das equações:

1. (Fermat) $x^n + y^n = z^n$, com n inteiro positivo
2. (Pell) $x^2 - d \cdot y^2 = 1$, com d inteiro livre de quadrados

Exemplo: Para estudar soluções inteiras das equações:

1. (Fermat) $x^n + y^n = z^n$, com n inteiro positivo
2. (Pell) $x^2 - d \cdot y^2 = 1$, com d inteiro livre de quadrados

convém reescrever:

1. $z^n = (x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y)$, onde ζ é uma raíz n-ésima e primitiva da unidade
2. $1 = (x - \sqrt{d} \cdot y)(x + \sqrt{d} \cdot y)$

Exemplo: Para estudar soluções inteiras das equações:

1. (Fermat) $x^n + y^n = z^n$, com n inteiro positivo
2. (Pell) $x^2 - d \cdot y^2 = 1$, com d inteiro livre de quadrados

convém reescrever:

1. $z^n = (x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y)$, onde ζ é uma raíz n-ésima e primitiva da unidade
2. $1 = (x - \sqrt{d} \cdot y)(x + \sqrt{d} \cdot y)$

Isto motiva o estudo de propriedades aritméticas nos anéis $\mathbb{Z}[\zeta]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

O surgimento da Álgebra Abstrata

Kronecker e Dedekind: Para estudar propriedades aritméticas destes anéis basta estudar propriedades do conjunto cujos elementos são ideais, no sentido que neste conjunto sempre há fatoração única.

O surgimento da Álgebra Abstrata

Kronecker e Dedekind: Para estudar propriedades aritméticas destes anéis basta estudar propriedades do conjunto cujos elementos são ideais, no sentido que neste conjunto sempre há fatoração única. De fato, neste conjunto sempre temos fatoração única em produto de ideais primos.

Seja k um corpo (ex: $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$).

Seja k um corpo (ex: $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$).
Um *conjunto algébrico afim* é um subconjunto X de k^n obtido pelos zeros em comum de uma quantidade finita de polinômios $f_1, \ldots, f_r$ em $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Consideremos

$$J := \langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \{f_1 \cdot g_1 + \cdots + f_r \cdot g_r \mid g_1, \ldots, g_r \in k[T_1, \ldots, T_n]\}$$

o ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ gerado por $f_1, \ldots, f_r$.

Consideremos

$$J := \langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \{f_1 \cdot g_1 + \cdots + f_r \cdot g_r \mid g_1, \ldots, g_r \in k[T_1, \ldots, T_n]\}$$

o ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ gerado por $f_1, \ldots, f_r$.
Temos que

$$\begin{aligned} X &= \{x \in k^n \mid f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\} \\ &= \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in J\} \end{aligned}$$

Isto nos fornece uma aplicação sobrejetiva

Isto nos fornece uma aplicação sobrejetiva:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{ideais de}\\ k[T_1,\ldots,T_n]\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{conjuntos}\\ \text{algébricos afins}\\ \text{em } k^n\end{array}\right\}$$

$$J \longmapsto V(J) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in J\}$$

Observações:

1. Pelo Teorema da Base de Hilbert, todo ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ é finitamente gerado;
2. $V(\langle 1 \rangle) = \emptyset$ e $V(\langle 0 \rangle) = k^n$;
3. $J_1 \subset J_2 \Longrightarrow V(J_2) \subset V(J_1)$;
4. A aplicação acima não é injetiva.

Para entender a última observação definimos o *radical* de um ideal J de $k[T_1, \ldots, T_n]$ por

$$\sqrt{J} := \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f^m \in J \text{ para algum } m \text{ inteiro positivo } \}$$

Para entender a última observação definimos o *radical* de um ideal J de $k[T_1, \ldots, T_n]$ por

$$\sqrt{J} := \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f^m \in J \text{ para algum } m \text{ inteiro positivo } \}$$

Dizemos que J é *radical* quando $J = \sqrt{J}$. É claro que sempre vale $J \subseteq \sqrt{J}$.

Para entender a última observação definimos o *radical* de um ideal J de $k[T_1, \ldots, T_n]$ por

$$\sqrt{J} := \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f^m \in J \text{ para algum } m \text{ inteiro positivo } \}$$

Dizemos que J é *radical* quando $J = \sqrt{J}$. É claro que sempre vale $J \subseteq \sqrt{J}$.
Exemplos:

1. $\sqrt{\langle f^n \rangle} = \langle f \rangle$, onde $f \in k[T]$ é irredutível;
2. Todo ideal primo é radical.

Para entender a última observação definimos o *radical* de um ideal J de $k[T_1, \ldots, T_n]$ por

$$\sqrt{J} := \{ f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f^m \in J \text{ para algum } m \text{ inteiro positivo } \}$$

Dizemos que J é *radical* quando $J = \sqrt{J}$. É claro que sempre vale $J \subseteq \sqrt{J}$.

Exemplos:

1. $\sqrt{\langle f^n \rangle} = \langle f \rangle$, onde $f \in k[T]$ é irredutível;
2. Todo ideal primo é radical.

Observações:

1. $V(J) = V(\sqrt{J})$ para todo ideal J de $k[T_1, \ldots, T_n]$;
2. Se $f \in k[T]$ é irredutível, então $\langle f^2 \rangle \subsetneqq \langle f \rangle$ mas $V(\langle f^2 \rangle) = V(\langle f \rangle)$.

Temos ainda uma outra aplicação:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{conjuntos}\\ \text{algébricos}\\ \text{afins em}\\ k^n\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{ideais de}\\ k[T_1, \ldots, T_n]\end{array}\right\}$$

$$X \longmapsto I(X) := \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f(X) = 0\}$$

Observações:

1. I(X) é um ideal radical;
2. $I(\emptyset) = k[T_1, \ldots, T_n]$ e $I(k^n) = \langle 0 \rangle$;
3. $X_1 \subset X_2 \Longrightarrow I(X_2) \subset I(X_1)$;

Questão: Como são as composições $V \circ I$ e $I \circ V$?

Questão: Como são as composições $V \circ I$ e $I \circ V$?

Lema

$V(I(X)) = X$ para cada conjunto algébrico afim X em k^n.

PROVA: É claro que $X \subseteq V(I(X))$.

Questão: Como são as composições $V \circ I$ e $I \circ V$?

Lema

$V(I(X)) = X$ *para cada conjunto algébrico afim* X *em* k^n.

PROVA: É claro que $X \subseteq V(I(X))$. Por outro lado, se $X = V(J)$ com J ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$, então $J \subseteq I(V(J))$,

Questão: Como são as composições $V \circ I$ e $I \circ V$?

Lema

$V(I(X)) = X$ para cada conjunto algébrico afim X em k^n.

PROVA: É claro que $X \subseteq V(I(X))$. Por outro lado, se $X = V(J)$ com J ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$, então $J \subseteq I(V(J))$, o que implica que $V(I(X)) \subseteq V(J) = X$. □

Já a outra composição $I \circ V$ não pode ser a identidade, pois V não é injetiva.

Já a outra composição $I \circ V$ não pode ser a identidade, pois V não é injetiva. O que temos em geral é o:

Uma conexão entre Geometria e Álgebra Abstrata

Já a outra composição $I \circ V$ não pode ser a identidade, pois V não é injetiva. O que temos em geral é o:

Teorema (Teorema dos Zeros de Hilbert)

Se k é um corpo algebricamente fechado, então

$$I(V(J)) = \sqrt{J}$$

para todo ideal J de $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Figura: David Hilbert

Observações:

1. Para $k = \mathbb{R}$ não vale o Teorema dos Zeros de Hilbert: para $J = \langle X^2 + 1 \rangle$ ideal de $\mathbb{R}[X]$ temos que

Observações:

1. Para $k = \mathbb{R}$ não vale o Teorema dos Zeros de Hilbert: para $J = \langle X^2 + 1 \rangle$ ideal de $\mathbb{R}[X]$ temos que

$$I(V(J)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X] \supsetneq J = \sqrt{J};$$

Observações:

1. Para $k = \mathbb{R}$ não vale o Teorema dos Zeros de Hilbert: para $J = \langle X^2 + 1 \rangle$ ideal de $\mathbb{R}[X]$ temos que

$$I(V(J)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X] \underset{\neq}{\supseteq} J = \sqrt{J};$$

2. O Teorema dos zeros estabelece um dicionário

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{conjuntos} \\ \text{algébricos} \\ \text{afins em} \\ k^n \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ideais radicais} \\ \text{de} \\ k[T_1, \ldots, T_n] \end{array} \right\}$$

Observações:

1. Para $k = \mathbb{R}$ não vale o Teorema dos Zeros de Hilbert: para $J = \langle X^2 + 1 \rangle$ ideal de $\mathbb{R}[X]$ temos que

$$I(V(J)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X] \underset{\neq}{\supset} J = \sqrt{J};$$

2. O Teorema dos zeros estabelece um dicionário

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{conjuntos} \\ \text{algébricos} \\ \text{afins em} \\ k^n \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ideais radicais} \\ \text{de} \\ k[T_1, \ldots, T_n] \end{array} \right\}$$

3. Não são apenas os ideais radicais que possuem interpretação geométrica;

Se X_1 e X_2 são conjuntos algébricos afins, então vale em geral que

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)} \supseteq I(X_1) + I(X_2).$$

Uma conexão entre Geometria e Álgebra Abstrata

Se X_1 e X_2 são conjuntos algébricos afins, então vale em geral que

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)} \supseteq I(X_1) + I(X_2).$$

A igualdade acima reflete que os conjuntos algébricos se intersectam transversalmente.

Se X_1 e X_2 são conjuntos algébricos afins, então vale em geral que

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)} \supseteq I(X_1) + I(X_2).$$

A igualdade acima reflete que os conjuntos algébricos se intersectam transversalmente.

Exemplo: Consideremos $X = V(Y - X^2)$ e $L_b = V(Y - b)$ em $\mathbb{C}^2$.

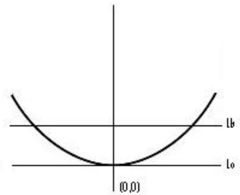
Se X_1 e X_2 são conjuntos algébricos afins, então vale em geral que

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)} \supseteq I(X_1) + I(X_2).$$

A igualdade acima reflete que os conjuntos algébricos se intersectam transversalmente.

Exemplo: Consideremos $X = V(Y - X^2)$ e $L_b = V(Y - b)$ em $\mathbb{C}^2$.

$$X \cap L_0 = \{(0,0)\} \text{ e } X \cap L_b = \{(a,b), (-a,b)\} \text{ com } a^2 = b \neq 0.$$



Uma conexão entre Geometria e Álgebra Abstrata

$$I(X \cap L_0) = \langle X, Y \rangle \supsetneq \langle X^2, Y \rangle = \langle Y - X^2 \rangle + \langle Y \rangle = I(X) + I(L_0)$$

$$I(X \cap L_0) = \langle X, Y \rangle \supsetneq \langle X^2, Y \rangle = \langle Y - X^2 \rangle + \langle Y \rangle = I(X) + I(L_0)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(X \cap L_b) &= I(\{(a,b),(-a,b)\}) \\ &= I(\{(a,b)\}) \cap I(\{(-a,b)\}) \\ &= \langle X - a, Y - b \rangle \cap \langle X + a, Y - b \rangle \\ &= \langle (X-a)(X+a), Y - b \rangle \\ &= \langle X^2 - b, Y - b \rangle \\ &= \langle X^2 - Y, Y - b \rangle \\ &= I(X) + I(L_b) \end{aligned}$$

OBRIGADO

Bibliografia

Dieudonné, Jean: "The historical development of algebraic geometry", Amer. Math. Monthly 79 (1972), 827–866.

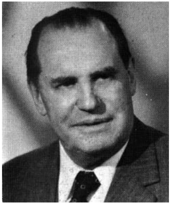


Figura: Jean Dieudonné