SEMINÁRIO DE GEOMETRIA ALGÉBRICA II
Rodrigo Salomão
IMPA
24/11/2005

Teorema de Bézout

1 Definições e Resultados Preliminares

Primeiramente faremos as definições básicas e enunciaremos os resultados já vistos (seminário do Thiago ou Hartshorne, capítulo I parágrafo 7) que serão ultilizados.

Seja $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ um anel graduado e $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ um S-módulo graduado. Lembramos que para cada $l \in \mathbb{Z}$ definimos o S-módulo graduado $M(l)$ pondo $M(l)_d = M_{l+d}$ para cada $d \in \mathbb{Z}$. Lembramos ainda que o *anulador* de M é o ideal homogêneo de S definido por $Ann(M) := \{s \in S | s \cdot M = 0\}$.

Dizemos que $h : M \longrightarrow N$ é um homomorfismos entre S-módulos graduados M e N, quando h é um homomorfismo de S-módulos e $h(M_d) \subseteq N_d$ para todo $d \in \mathbb{Z}$. Dizemos ainda que a sequência exata

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$

é uma sequência exata de S-módulos graduados, quando M', M e M'' são S-módulos graduados e para cada $d \in \mathbb{Z}$ temos uma sequência exata induzida de grupos

$$(M')_d \longrightarrow M_d \longrightarrow (M'')_d.$$

Proposição 1.1 *Seja M um módulo finitamente gerado(graduado) sobre um anel noetheriano(graduado) S. Então existe uma filtração $0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \cdots \subseteq M^r = M$ de M por submódulos(graduados), tal que para cada i, $M^i/M^{i-1} \cong S/\underline{p}_i$ ($M^i/M^{i-1} \cong S/\underline{p}_i(l_i)$), onde $\underline{p}_i$ é ideal primo(homogêneo) de S (e $l_i \in \mathbb{Z}$). Além disso temos:*

1. *se $\underline{p}$ é um ideal primo(homogêneo) de S, então $\underline{p} \supseteq Ann(M)$ se e só se $\underline{p} \supseteq \underline{p}_i$ para algum i. Equivalentemente, os primos minimais de S contendo $Ann(M)$ são exatamente os elementos minimais do conjunto $\{\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_r\}$;*

2. *para cada primo minimal $\underline{p} \supseteq Ann(M)$, o número de vezes que $\underline{p}$ aparece em $\{\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_r\}$ é igual ao comprimento de $M_{\underline{p}}$ como $S_{\underline{p}}$-módulo.*

Sejam $\underline{p}$ um ideal primo S e M um S-módulo. Denotaremos por $\mu_{\underline{p}}(M)$, o comprimento de $M_{\underline{p}}$ como $S_{\underline{p}}$-módulo.

Observemos o seguinte Corolário, que já se fez necessário na aula do dia 21/11/2005.

Corolário 1.1 *Com as mesmas notações da Proposição 1.1, temos que $\mu_{\underline{p}}(M) = 0$ se, e somente se, $\underline{p} \not\supseteq Ann(M)$.*

PROVA: A filtração $0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \cdots \subseteq M^r = M$ de M induz uma filtração de $M_{\underline{p}}$, $0 = M^0_{\underline{p}} \subseteq M^1_{\underline{p}} \subseteq \cdots \subseteq M^r_{\underline{p}} = M_{\underline{p}}$. Como $M^i/M^{i-1} \cong S/\underline{p}_i$, temos que

$$M^i_{\underline{p}}/M^{i-1}_{\underline{p}} \cong (M^i/M^{i-1})_{\underline{p}} \cong (S/\underline{p}_i)_{\underline{p}}.$$

Agora, pelo ítem 1 da Propriedade 1.1, basta observar que

$$(S/\underline{q})_{\underline{p}} = 0 \text{ se, e somente se, } \underline{p} \not\supseteq \underline{q}.$$

De fato, como $\underline{p} \not\supseteq \underline{q}$ existe $t \in \underline{q} \setminus \underline{p}$. Portanto dado $\bar{s}/c \in (S/\underline{q})_{\underline{p}}$, $\bar{s}/c = \bar{t}s/tc = \bar{0}/c = \bar{0}$. Por outro lado, se $\bar{1}/1 = 0$, então existe $t \in S \setminus \underline{p}$ tal que $\bar{t} \cdot \bar{1} = \bar{0}$. ■

Denotaremos por k um corpo arbitrário.

Definição 1.1 Seja $S = k[T_0, \ldots, T_r]$ e M um S-módulo graduado. Definimos a *função de Hilbert* φ_M de M por

$$\varphi_M(l) = dim_k(M_l)$$

para cada $l \in \mathbb{Z}$.

Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1 (Hilbert-Serre) *Seja M um S-módulo graduado finitamente gerado, onde $S = k[T_0, \ldots, T_r]$. Então existe um único polinômio $P_M(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $P_M(l) = \varphi_M(l)$ para todo $l >> 0$. Além do mais,*

$$deg(P_M) = dimV(Ann(M)),$$

onde $V(Ann(M)) \subseteq \mathbb{P}^r(k)$ é o conjunto de zeros do ideal homogêneo $Ann(M)$ em $\mathbb{P}^r(k)$.

Definição 1.2 O polinômio P_M do Teorema 1.1 é chamado *polinômio de Hilbert* de M.

Observação 1.1 Trivialmente, se temos uma sequência curta exata de S-módulos graduados $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, então temos a aditividade do polinômio de Hilbert,

$$P_M = P_{M'} + P_{M''}.$$

Mais geral, se $0 \longleftarrow M \longleftarrow M_0 \longleftarrow M_1 \longleftarrow M_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow M_n \longleftarrow 0$ é uma sequência exata, então

$$P_M = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i P_{M_i}.$$

Agora, se $0 \longleftarrow M \longleftarrow M_0 \xleftarrow{d_1} M_1 \xleftarrow{d_2} M_2 \xleftarrow{d_3} \cdots \xleftarrow{d_n} M_n \longleftarrow 0$ é apenas um complexo(ié, $d_i \circ d_{i+1} = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n-1$) tal que $0 \longleftarrow M \longleftarrow M_0 \longleftarrow M_1$ é exata, então

$$P_M + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i P_{Nuc(d_i)/Im(d_{i+1})} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i P_{M_i}.$$

De fato, pela exatitude da sequência $0 \longleftarrow M \longleftarrow M_0 \longleftarrow M_1$, temos que $P_M = P_{M_0} - P_{Im(d_1)}$. Agora é só usar alternadamente a sequência exata

$$0 \rightarrow Nuc(d_i) \rightarrow M_i \xrightarrow{d_i} Im(d_i) \rightarrow 0$$

e a igualdade $P_{Nuc(d_i)} = P_{Im(d_{i+1})} + P_{Nuc(d_i)/Im(d_{i+1})}$.

Definição 1.3 Seja $W \subseteq \mathbb{P}^r(k)$ conjunto algébrico. Definimos o *polinômio de Hilbert* de W, P_W, por

$$P_W = P_{S/I(W)},$$

onde $S = k[T_0, \ldots, T_r]$.

Observe que, pelo Teorema 1.1

$$degP_W = dimV(Ann(S/I(W))) = dimW.$$

Definição 1.4 Definimos ainda o *grau* de W, $degW$, como

$$(dimW)! \cdot (coeficiente\ lider\ de\ P_W).$$

Uma primeira tentativa de justificar a importância desta definição é a Proposição seguinte. Entretanto, após o Teorema de Bézout, daremos uma justificativa geométrica.

Proposição 1.2 *Seja $H \subseteq \mathbb{P}^r(k)$ uma hipersuperfície e seja $F \in k[T_0, \ldots, T_r]$ homogêneo tal que $I(H) = (F)$. Então $degH = degF$.*

PROVA: Denotemos por d o grau do polinômio F. Como $I(H) = (F)$, segue da sequência exata de $S = k[T_0, \ldots, T_r]$-módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(-d) \stackrel{mult.por F}{\longrightarrow} S \longrightarrow S/I(H) \longrightarrow 0$$

e do Teorema 1.1 que

$$P_H(t) = P_S(t) - P_S(t-d) = \binom{t+r}{r} - \binom{t+r-d}{r}.$$

Fazendo as contas concluímos que o coeficiente líder de $P_H(t)$ é $\frac{d}{(r-1)!}$. ■

Observação 1.2 Trataremos agora um outro exemplo interessante que é usado na demonstração do Teorema de Bézout no livro do Fulton.

Seja $X \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ tal que $I(X) = (F, G)$, onde F e G são polinômios homogêneos sem divisores em comum. Então

$$deg(X) = degF \cdot degG.$$

De fato, por hipótese temos que a sequência de S-módulos graduados

$$0 \to S(-degF - degG) \to S(-degF) \oplus S(-degG) \to S \to S/I(X) \to 0$$

é exata, onde a primeira função é dada por $C \mapsto (-CG, CF)$ e a segunda por $(A, B) \mapsto AF + BG$. Agora basta observar que $dimS_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ para todo $d \geq 0$ e verificar que $dim((S/I(X))_d) = degF \cdot degG$ para todo $d \geq degF + degG$.

Observação 1.3 Lembraremos agora, um fato que foi mencionado no curso de Geometria Algébrica 1 e que, na ocasião, não tínhamos esta teoria que se fazia necessário para completar o entendimento. Mais especificamente, na aula do dia 20/06/2005 após o Lema, foi observado:

Seja X conjunto algébrico, $x \in X$ e $r = dim_x(X)$, isto é, o supremo dos comprimentos n, das cadeias de fechados irredutíveis em X que contém x, $\{x\} = X_0 \underset{\neq}{\subsetneq} X_1 \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots \underset{\neq}{\subsetneq} X_n$.

Da Álgebra Comutativa, sabe-se que a função de Hilbert-Samuel

$$j \longmapsto dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\underline{m}_x^j)$$

é polinomial de grau r quando $j >> 0$, já que, $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local de dimensão r.(cf. Atiyah-Macdonald, Teorema 11.14)

Pelo Lema provado nesta aula, tem-se que o coeficiente de maior grau deste polinômio é $\frac{m}{r!}$, para algum $m =$: *multiplicidade* de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Desta forma conclui-se que a função

$$j \longmapsto dim_k(\underline{m}_x^j/\underline{m}_x^{j+1}) = dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\underline{m}_x^j) - dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\underline{m}_x^{j+1})$$

é polinomial de grau $r-1$ quando $j >> 0$, e o coeficiente de maior grau é $\frac{m}{(r-1)!}$.

Como visto na aula anterior a esta,

$$dim_k(\underline{m}_x^j/\underline{m}_x^{j+1}) = dim_k(k[T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n]/I_{X,x})_j,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $I_{X,x}$ é o ideal homogêneo gerado pelas formas de menor grau dos polinômios $F(T_1 + x_1, \ldots, T_n + x_n)$ tais que $F \in I(X)$.

Concluímos pelo Teorema 1.1 que

$$r - 1 = dimV(Ann(k[T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n]/I_{X,x})) = dimV(I_{X,x}),$$

o que implica que a dimensão do cone tangente de X em x, $C_{X,x}$, é

$$dimC_{X,x} = r,$$

já que, $dimV(I_{X,x}) = dim\mathbb{P}(C_{X,x}) = dimC_{X,x} - 1$ onde $V(\sqrt{I_{X,x}}) =: \mathbb{P}(C_{X,x})$. Além disso, pela definição de grau de um conjunto algébrico

$$m = deg\mathbb{P}(C_{X,x}),$$

o que nos diz que a multiplicidade, que é definida de forma local intrinsecamente, pode ser obtida por meio global extrinsecamente.

Destacaremos agora alguns fatos importantes para o nosso objetivo principal, que é o Teorema de Bézout.

Proposição 1.3 Com as notações do Teorema 1.1, temos para cada S-módulo graduado finitamente gerado M, que o *coeficiente combinatório de grau* n de P_M, isto é, $n! \cdot$ (coeficiente de P_M de grau n) é

$$\sum_{\underline{p}} \mu_{\underline{p}}(M) degV(\underline{p})$$

onde $\underline{p}$ percorre os ideais primos homogêneos contendo $Ann(M)$ tais que $dimV(\underline{p}) = n = dimV(Ann(M))$.

PROVA: Admitimos a mesma notação do enunciado da Proposição 1.1. Como $M/M^{r-1} \cong S/\underline{p}_r(l_r)$ temos que

$$P_M(t) - P_{M^r}(t) = P_{S/\underline{p}_r(l_r)}(t) = P_{S/\underline{p}_r}(t + l_r).$$

Procedendo de maneira indutiva no índice i do M^i obtemos que

$$P_M(t) = P_{S/\underline{p}_r}(t + l_r) + \cdots + P_{S/\underline{p}_1}(t + l_1).$$

Agora observe que como $\underline{p}_i \supseteq Ann(M)$, temos pelo Teorema 1.1, que $deg(P_{S/\underline{p}_i}) \leq \deg(P_M)$. Portanto os polinômios do lado direito que irão contribuir para determinar o coeficiente líder de $P_M(t)$ serão justamente aqueles que possuírem o mesmo grau que $P_M(t)$, isto é, aqueles que tiverem a propriedade

$$dimV(\underline{p}_i) = degP_{S/\underline{p}_i} = degP_M = dimV(Ann(M)).$$

Entretanto, dentre os primos $\underline{p}_i$ com $i = 1, \ldots, r$, a igualdade acima é atingida exatamente pelos minimais contendo $Ann(M)$.

De fato, se $\underline{p}_i \supseteq Ann(M)$ não for minimal, então existe um primo $\underline{q} \supseteq Ann(M)$ minimal tal que $\underline{p}_i \supsetneqq \underline{q} \supseteq Ann(M)$. Logo

$$V(\underline{p}_i) \subsetneqq V(\underline{q}) \subseteq V(Ann(M)),$$

e portanto $dimV(\underline{p}_i) < dimV(Ann(M))$.(cf. Teorema 1 seminário Jhon ou Shafarevich pg.68)

Assim pelos dois itens da Proposição 1.1 temos que o n-ésimo coeficiente combinatório de P_M é

$$\sum_{\underline{p}} \mu_{\underline{p}}(M) degV(\underline{p})$$

onde $\underline{p}$ percorre os ideais primos homogêneos contendo $Ann(M)$ tais que $dimV(\underline{p}) = dimV(Ann(M))$. ■

Observação 1.4 Usanado o Corolário 1.1, ainda podemos retirar o condição dos primos conterem o $Ann(M)$ da Proposção acima e generalizá-la para $n \geq dimV(Ann(M))$. Entretanto, devido a simplicidade do argumento envolvido neste caso, deixamos isto para ser feito quando necessário, dentro da demonstração do Teorema de Bézout.

Para finalizar iremos mencionar um último fato geral que se pode destacar da demonstração do Teorema de Bézout.

Fato 1.1 Pelo Teorema das Sizigias temos que para cada ($S = k[T_0, \ldots, T_r]$)-módulo graduado M existe uma sequência exata de S-módulos graduados da seguinte forma:

$$0 \leftarrow M \leftarrow \bigoplus_v S(l_{0,v}) \leftarrow \cdots \leftarrow \bigoplus_v S(l_{r+1,v}) \leftarrow 0.$$

2 A Multiplicidade de Interseção

Iremos lembrar rapidamente a definição, bem como algumas propriedades do functor Tor.

Sejam M e N R-módulos, onde R é um anel comutativo com unidade. Considere a sequência exata proveniente de uma resolução projetiva de M

$$0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow P_2 \leftarrow \cdots,$$

onde P_0, P_1, $P_2, \ldots$ são R-módulos projetivos. Denotemos $P_{-1} := 0$.

Tensorizando a sequência exata com N, obtemos o complexo

$$0 \leftarrow P_0 \otimes_R N \leftarrow P_1 \otimes_R N \leftarrow P_2 \otimes_R N \leftarrow \cdots.$$

Definimos, então

$$Tor_n^R(M,N) = \frac{Nuc(P_n \otimes_R N \to P_{n-1} \otimes_R N)}{Im(P_{n+1} \otimes_R N \to P_n \otimes_R N)}.$$

Da mesma forma que fizemos para o Ext verifica-se que esta definição independe da escolha da resolução projetiva. Quando não houver perigo de confusão escreveremos simplesmente $Tor_n(M,N)$.

Segue da exatitude da sequência $0 \leftarrow M \otimes_R N \leftarrow P_0 \otimes_R N \leftarrow P_1 \otimes_R N$ que $Tor_0^R(M,N) = M \otimes_R N$. Prova-se ainda que $Tor_n^R(M,N) = Tor_n^R(N,M)$.

Outra propriedade, é que quando R é graduado e M e N são R-módulos graduados, então os módulos $Tor_n^R(M,N)$ são graduados.

Denotaremos por $S = k[T_0, \ldots, T_n]$, onde k é um corpo.

Definição 2.1 Sejam X e Y fechados em $\mathbb{P}^r(k)$ e seja $Z_1, \ldots, Z_s$ as componentes irredutíveis de $X \cap Y$. Definimos a *multiplicidade de interseção* de X e Y em Z_j por

$$I(X,Y,Z_j) = \sum_{i=0}^{r} \mu_{\underline{p}_j}(Tor_i(A(X), A(Y))),$$

onde $\underline{p}_j = I(Z_j)$, $A(Y) := S/I(Y)$ *e* $A(X) := S/I(X)$.

Observação 2.1 Verificaremos agora que na situação descrita no livro do Hartshorne temos a igualdade das definições.

Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{P}^r(k)$ conjuntos algébricos, sendo X irredutível e Y hipersuperfície com $X \nsubseteq Y$ e $I(Y) = (F)$, onde $F \in S$ é homogêneo.

Observe que a sequência de S-módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(-d) \stackrel{mult.por F}{\longrightarrow} S \longrightarrow S/I(Y) \longrightarrow 0$$

é exata e logo determina uma resolução projetiva para $A(Y)$. Tensorizando com $A(X)$ obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow A(X)(-d) \stackrel{mult.por F}{\longrightarrow} A(X) \longrightarrow S/(I(X) + I(Y)) \longrightarrow 0$$

que é exato. De fato, dado $\bar{G} \in A(X)(-d)$ tal que $\bar{G}\bar{F} = \bar{0}$ temos que $FG \in I(X)$ que é primo. Mas sendo que $X \nsubseteq Y$ temos que $F \notin I(X)$, e logo, $G \in I(X)$.

Desta forma concluímos que $Tor_i(A(Y), A(X))) = 0$ para todo $i \geq 1$ e consequentemente

$$I(X, Y, Z_j) = \mu_{\underline{p}_j}(Tor_0(A(X), A(Y))) = \mu_{\underline{p}_j}(A(X) \otimes_S A(Y)) = \mu_{\underline{p}_j}(S/(I(X)+I(Y))).$$

3 O Teorema de Bézout

Nesta seção k denotará um corpo algebricamente fechado.

Teorema 3.1 *Sejam X e Y fechados em $\mathbb{P}^r(k)$ e seja $Z_1, \ldots, Z_s$ as componentes irredutíveis de $X \cap Y$. Suponha que X e Y se intersectam propriamente, isto é, $codim(Z_j) = codim(X) + codim(Y)$, para cada j. Então,*

$$\sum_{j=1}^{s} I(X, Y, Z_j) \cdot deg(Z_j) = deg(X) \cdot deg(Y)$$

Prova: Pelo Fato 1.1 obtemos uma sequência exata de S-módulos graduados

$$0 \leftarrow A(X) \leftarrow \bigoplus_v S(l_{0,v}) \leftarrow \cdots \leftarrow \bigoplus_v S(l_{r+1,v}) \leftarrow 0,$$

que é uma resolução projetiva de $A(X)$, pois, módulos livres são projetivos.

Tensorizando com o S -módulo $A(Y)$, obtemos o complexo

$$0 \leftarrow A(X) \otimes_S A(Y) \leftarrow \bigoplus_v A(Y)(l_{0,v}) \xleftarrow{d_1} \cdots \xleftarrow{d_{r+1}} \bigoplus_v A(Y)(l_{r+1,v}) \leftarrow 0.$$

Pela Observação 1.1 concluímos a igualdade polinomial

$$P_{A(X)\otimes_S A(Y)}(t) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i P_{Tor_i(A(X),A(Y))}(t) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \sum_v P_{A(Y)}(t + l_{i,v}). \quad (1)$$

Definimos $D(t) := \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \sum_v P_{A(Y)}(t + l_{i,v})$.

Observe que, por hipótese, $dim(Z_j) = dim(X) + dim(Y) - r$ para cada j, e logo $dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y) - r$.

Fato 3.1 O polinômio $D(t)$ tem grau igual a $dim(X \cap Y)$ e coeficiente combinatório inicial igual a $deg(X) \cdot deg(Y)$.

PROVA: Primeiramente escrevemos, $P_{A(Y)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \binom{t}{j}$, onde $m := dim(Y)$ e $b_m := deg(Y)$. Desta forma,

$$D(t) = \sum_i (-1)^i \sum_v \sum_j b_j \binom{t + l_{i,v}}{j} = \sum_j b_j \sum_i (-1)^i \sum_v \binom{t + l_{i,v}}{j}.$$

Consequentemente, para cada inteiro $l \geq 0$,

$$\Delta^l D(t) = \sum_j b_j \sum_i (-1)^i \sum_v \binom{t + l_{i,v}}{j - l} = \sum_j b_j \Delta^{r+l-j} P_{A(X)}(t - r),$$

já que, usando a resolução projetiva de $A(X)$ e a aditividade do polinômio de Hilbert concluímos que

$$P_{A(X)}(t) = \sum_i (-1)^i \sum_v \binom{t + l_{i,v} + r}{r}.$$

Denotemos por $n = dimX$ e $a_n = degX$.

Se $l \geq dim(X \cap Y) = n + m - r$, então $r + l - j \geq r + l - m > n = dim(X)$ e portanto $\Delta^l D(t) = 0$. Logo $degD(t) \leq n + m - r$.

Agora, se $l = n + m - r$, então $r + l - j \geq n$ e é igual se e só se $j = m$. Logo

$$\Delta^{n+m-r} D(t) = b_m \Delta^n P_{A(X)}(t - r) = b_m \cdot a_n = deg(X) \cdot deg(Y),$$

o que prova o fato. ∎

Temos que estudar agora, o lado esquerdo da igualdade (1).

Observe primeiramente que, pela propriedade universal do produto tensorial

$$A(X) \otimes_S A(Y) = S/I(X) \otimes_S S/I(Y) \cong S/(I(X) + I(Y))$$

segue do Teorema 1.1 que

$$deg(P_{A(X) \otimes_S A(Y)}(t)) = dim(X \cap Y).$$

Agora, pela Proposição 1.3 e por hipótese, o coeficiente combinatório inicial de $P_{A(X)\otimes_S A(Y)}(t)$ é

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_{\underline{p}_j}(S/(I(X)+I(Y)))degZ_j,$$

onde $\underline{p}_j := I(Z_j)$.

Falta analisarmos os coeficientes combinatórios de grau $dim(X \cap Y)$ de $P_{Tor_i(A(X),A(Y))}(t)$ para $i > 0$.

Para isto, observe que $Ann(Tor_i(A(X), A(Y))) \supseteq I(Y)$, já que $Tor_i(A(X), A(Y)) = \frac{Nuc(d_i)}{Im(d_{i+1})}$, $Nuc(d_i) \subset \bigoplus_v A(Y)(l_{i,v})$ e $I(Y) \subset Ann(A(Y))$. Pelo mesmo motivo $Ann(Tor_i(A(X), A(Y))) = Ann(Tor_i(A(Y), A(X))) \supseteq I(X)$. Logo

$$Ann(Tor_i(A(X), A(Y))) \supseteq I(X) + I(Y).$$

Portanto, pelo Teorema 1.1,

$$degP_{Tor_i(A(X),A(Y))} \leq dim(X \cap Y).$$

Se $degP_{Tor_i(A(X),A(Y))} < dim(X \cap Y)$, então pelo Corolário 1.1, o coeficiente combinatório de grau $dim(X \cap Y)$ de $P_{Tor_i(A(X),A(Y))}$ é

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_{\underline{p}_j}(Tor_i(A(X), A(Y)))degZ_j,$$

já que neste caso $dimZ_j = dim(X \cap Y)$ implica que $\underline{p}_j$ não contém $Ann(Tor_i(A(X), A(Y)))$.

Agora se $degP_{Tor_i(A(X),A(Y))} = dim(X \cap Y)$, então pela Proposição 1.3, o coeficiente combinatório de grau $dim(X \cap Y)$ de $P_{Tor_i(A(X),A(Y))}$ é

$$\sum_{\underline{p}} \mu_{\underline{p}}(Tor_i(A(X), A(Y)))degV(\underline{p}),$$

onde $\underline{p}$ percorre os ideais primos homogêneos contendo $Ann(Tor_i(A(X), A(Y)))$ tais que $dimV(\underline{p}) = dim(X \cap Y)$. Mas estas duas condições sobre $\underline{p}$ implicam que $\underline{p} = \underline{p}_j$ para algum j.

De fato $\underline{p} \supseteq Ann(Tor_i(A(X), A(Y))) \supseteq I(X) + I(Y)$ implica que $\underline{p} \supseteq I(X \cap Y)$. Logo pela irredutibilidade de $V(\underline{p})$, $V(\underline{p}) = V(\underline{p}) \cap Z_j \subseteq Z_j$ para algum j. Portanto a afirmação segue da igualdade das dimensões.

Desta forma, o Corolário 1.1 nos assegura que o coeficiente combinatório de grau $dim(X \cap Y)$ de $P_{Tor_i(A(X),A(Y))}$ é igual a

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_{\underline{p}_j}(Tor_i(A(X), A(Y)))degZ_j.$$

Finalmente o Teorema segue comparando os coeficientes combinatórios de grau $dim(X \cap Y)$ em ambos os lados da igualdade polinomial (1). ■

Observação 3.1 Note que no caso de curvas planas projetivas, isto é, $r = 2$ e $dim(X) = dim(Y) = 1$ a hipótese do Teorema é equivalente ao fato de $X \cap Y$ ser uma quantidade finita de pontos. Assim, se $X = V(F)$ e $Y = V(G)$, onde F e G são polinômios homogêneos em $k[T_0, T_1]$, então esta definição equivale ao fato de F e G não possuírem componentes em comum em $k[T_0, T_1]$.

Observação 3.2 Uma justificativa para ver que a definição do grau é boa, é o seguinte fato. Se tomarmos Y um plano em $\mathbb{P}^r$ de dimensão igual a codimensão de X que intersepta X transversalmente, então pelo Teorema de Bézout, $degX = \sharp(X \cap Y)$.

Observação 3.3 Um caso particular onde o complexo obtido na demonstração é exato é quando temos $X = V(F)$ e $Y = V(G)$ curvas planas projetivas, onde F e G são polinômios reduzidos e não possuem fator em comum. Neste caso, o complexo é

$$0 \longrightarrow S/(F)(-d) \stackrel{mult.porG}{\longrightarrow} S/(F) \longrightarrow S/(F,G) \longrightarrow 0.$$

Um outro caso é o da Observação 2.1. Mais geralmente isto está ligado com o complexo de Koszul ver aula do dia 14/11/2005.