Introdução aos Tensores

pág.

Prefácio

> Se Deus não existe, nada se perde por se acreditar nele; mas, se existe, perde-se tudo por não se acreditar.
>
> Blaise Pascal

Este texto didático foi preparado para o ensino do tópico sobre tensores da ementa de Métodos Matemáticos Aplicados II, disciplina que todo aluno de Física na Universidade Federal Fluminense deve cursar. Procurou-se versar sobre tantos conceitos e métodos quantos podem ser expostos e devidamente exercitados em cerca de 24 horas de aula. A profundidade com que os mesmos foram abordados foi definida por esse limite temporal bem como pelo fato de ser o texto destinado a alunos de graduação.

Pré-requisitos específicos são matrizes e coordenadas curvilíneas; pré-requisitos genéricos são as disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear constantes em qualquer grade curricular de Física. Especialmente importante no estudo de tensores é a desenvoltura na utilização da convenção de Einstein para a notação de somatórios; nesse intento provê-se um apêndice, a ser lido pelos que ainda não dominem aquela notação. Proporcionam-se também apêndices sobre coordenadas curvilíneas e, visando ao estudo das geodésicas, sobre algumas técnicas do Cálculo de Variações.

O autor é particularmente grato aos seus alunos pela depuração de vários erros tipográficos e estimaria a contribuição de qualquer leitor nesse sentido, estando o correio eletrônico abaixo à disposição para a comunicação de qualquer tipo de erro presente nesta obra.

ROBERTO TOSCANO COUTO
rtoscano@id.uff.br

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Matemática Aplicada
Niterói, julho de 2003.

1. Conceitos preliminares

A descrição matemática das leis físicas, para ser válida, deve ser independente do sistema de coordenadas empregado: as equações matemáticas que expressam as leis da natureza devem ser *covariantes*, isto é, invariantes na sua forma sob mudanças de coordenadas. É exatamente o cumprimento dessa exigência que leva os físicos ao estudo do Cálculo Tensorial, de capital importância na Teoria Geral da Relatividade e muito útil em vários outros ramos da Física.

Suponha que estejamos trabalhando com *N* variáveis reais $x^1, x^2 \cdots x^N$. A razão dessa maneira de escrevê-las, com superíndices em vez de subíndices, ficará mais clara adiante. Tais variáveis são denominadas *coordenadas*; a um conjunto de seus valores chamamos de *ponto*; já a totalidade de pontos correspondentes a todos os valores das coordenadas constitui um *espaço de N dimensões*, aqui denotado por V_N. Diz-se que tal espaço V_N é descrito no *sistema de coordenadas* x^i, onde está implícito que $i = 1, 2 \cdots N$.

A estratégia usada para desenvolver a geometria do espaço V_N consiste em tomar concepções geométricas ordinárias e estender suas definições àquele espaço, sempre com o cuidado de que suas restrições ao nosso espaço tridimensional euclidiano reproduzam as definições familiares. Por exemplo, uma *curva* é definida como a totalidade dos pontos dados pelas equações

$$x^i = f^i(t) \quad (i = 1, 2 \cdots N) \ , \tag{1-1}$$

chamadas *parametrização* da curva, sendo *t* o parâmetro e $f^i(t)$ *N* funções.

Dissemos acima que é um princípio básico do Cálculo Tensorial que não fiquemos restritos a um único sistema de coordenadas. Devemos desenvolver relações que sejam válidas, não em um sistema de coordenadas apenas, mas em todos. Nesse sentido, considere outras *N* variáveis x'^i dadas através de *N* funções das coordenadas x^i,

$$x'^i = f^i(x^1, x^2 \cdots x^N) \quad (i = 1, 2 \cdots N) \ . \tag{1-2}$$

Estas equações definem para cada ponto $x^1, x^2 \cdots x^N$ um conjunto novo de coordenadas $x'^1, x'^2 \cdots x'^N$, o novo sistema de coordenadas x'^i. Admitimos que o jacobiano

$$J' = \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^N} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x'^N}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial x'^N}{\partial x^N} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

nunca se anule para que a Eq. (1-2) possa ser invertida:

$$x^i = g^i(x'^1, x'^2 \cdots x'^N) \quad (i = 1, 2 \cdots N) \ . \tag{1-4}$$

As Eqs. (1-2) e (1-4) definem uma *transformação de coordenadas*. Note que

$$J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right| = \frac{1}{J'} \ . \tag{1-5}$$

Denotaremos a Eq. (1-2) mais sucintamente na forma

$$x'^i = x'^i(x) \quad , \tag{1-6}$$

pois a notação desempenha um papel importantíssimo no Cálculo Tensorial e a Eq. (1-6) é mais fácil de se escrever do que a Eq. (1-2). Nessa notação, a Eq. (1-4) seria $x^i = x^i(x')$.

Em geral, os sistemas de coordenadas x^i, x'^i, etc, que surgirão no decorrer da exposição podem ser quaisquer sistemas de coordenadas curvilíneas (e.g., as coordenadas cilíndricas ou as esféricas), a não ser que se diga explicitamente tratar-se de um sistema de coordenadas específico. Contudo, às vezes, enfatizaremos o caráter genérico das coordenadas referindo-se a elas como coordenadas *curvilíneas*.

2. Vetores e tensores contravariantes. Invariantes.

Considere um ponto $\mathcal{P}$ de coordenadas x^i e um ponto vizinho $\mathcal{Q}$ de coordenadas $x^i + dx^i$. Esses dois pontos definem um deslocamento infinitesimal, caracterizado pelo vetor $\overrightarrow{\mathcal{PQ}}$; no sistema de coordenadas x^i, esse vetor é descrito pelas N grandezas dx^i, que podem ser chamadas de seus *componentes* naquele sistema de coordenadas.

Usemos agora um sistema de coordenadas x'^i diferente. Neste, os componentes daquele vetor são dx'^i. Os componentes de $\overrightarrow{\mathcal{PQ}}$ nos dois sistemas conectam-se pela equação (note o uso da convenção de Einstein para o somatório)

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \quad , \tag{2-1}$$

que são lineares e homogêneas.

O vetor $\overrightarrow{\mathcal{PQ}}$ há de ser considerado como tendo um significado absoluto, mas os números que o descrevem, seus componentes, dependem do sistema de coordenadas empregado, embora, uma vez conhecidos num sistema, podem ser calculados em qualquer outro através da Eq. (2-1). O conjunto dos componentes dx^i do deslocamento infinitesimal é o protótipo de uma classe de entes geométricos denominados *vetores contravariantes*, assim definidos:

Qualquer conjunto de N grandezas X^i definidas num ponto $\mathcal{P} \in V_N$ que se transformem sob mudança de coordenadas de acordo com a equação

$$X'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} X^j \quad , \tag{2-2}$$

é dito formar os componentes de um vetor contravariante em $\mathcal{P}$.

Assim, o deslocamento infinitesimal é um exemplo de vetor contravariante. Um outro exemplo, agora com componentes finitos, são as derivadas $\tau^i \equiv dx^i / dt$ calculadas num ponto de uma curva como a da Eq. (1-1); é o chamado *vetor tangente*, cuja transformação segundo a Eq. (2-2) é facilmente verificada através da aplicação da regra da cadeia para derivar $x'^i(t) = x'^i[x^j(t)]$:

$$\tau'^i = \frac{dx'^i}{dt} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\tau^j \quad . \tag{2-3}$$

Prosseguimos definindo entes da classe contravariante que apresentem características mais complicadas que o vetor contravariante como segue:

Um conjunto de N^2 *grandezas* T^{ij} *que se transformem sob mudança de coordenadas de acordo com a equação*

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}T^{kl} \tag{2-4}$$

é dito formar os componentes de um tensor contravariante de 2ª ordem.

A extensão dessa definição de tensores contravariantes para ordens superiores a 2 é imediata e não precisa ser escrita aqui. Mas, indo na direção oposta, notamos que um vetor contravariante é um tensor contravariante de 1ª ordem e isto sugere a existência de um tensor contravariante de ordem zero, uma única grandeza (N^0 = 1 componente) que se transforme segundo a relação de identidade

$$T'(x') = T(x) \;\; ; \tag{2-5}$$

tal grandeza é denominada *invariante* e seu valor independe do sistema de coordenadas empregado. Na realidade, trata-se de uma função do ponto $\mathcal{P}$ do espaço V_N, $f(\mathcal{P})$, cujos valores dependem do ponto $\mathcal{P}$ mas não do sistema de coordenadas usado para representar cada ponto. Assim, um invariante em V_N é uma função tal qual $f(\mathcal{P})$, que também recebe a denominação de *função escalar*, ou simplesmente *escalar*. As grandezas $T'(x')$ e $T(x)$ na equação acima, de mesmo valor, são vistas como os componentes de uma função escalar nos sistemas de coordenadas x'^i e x^i, respectivamente.

3. Vetores e tensores covariantes. Tensores mistos.

Seja ϕ uma função escalar das coordenadas (um invariante). Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \quad . \tag{3-1}$$

Esta lei de transformação das *N* grandezas $\partial\phi/\partial x^i$ parece com a descrita pela Eq. (2-2), mas, com um pouco mais de atenção, vemos que as variáveis x^j e x'^i aparecem em lugares trocados nas derivadas $\partial x^j/\partial x'^i$. Assim como os componentes do deslocamento infinitesimal são o protótipo do vetor contravariante, as derivadas parciais de um invariante, tais quais $\partial\phi/\partial x^j$ (que definem os componentes do gradiente de ϕ, como veremos na Seç. 12a), são o protótipo dos chamados *vetores covariantes*, assim definidos:

Um conjunto de N grandezas X_i *que se transformem de acordo com a equação*

$$X'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}X_j \tag{3-2}$$

é dito formar os componentes de um vetor covariante.

Convencionalmente, o índice, quando indicativo do caráter contravariante, é posto como superíndice e, quando covariante, como subíndice. Foi no sentido de cumprir esta convenção que as coordenadas foram escritas como x^i em vez de x_i, embora apenas seus diferenciais, e não elas próprias, apresentem o caráter tensorial contravariante.

Encarando o vetor covariante como um tensor covariante de 1ª ordem, não temos dificuldades em definir tensores covariantes de ordens mais altas. Por exemplo:

N^2 grandezas T_{ij} que se transformem segundo a equação

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}T_{kl} \tag{3-3}$$

é dito formar um tensor covariante de 2ª ordem.

Note que os invariantes também podem ser considerados como tensores covariantes de ordem zero.

Uma vez definidos os tensores contravariantes e os covariantes, não é difícil definir tensores com caráter tanto contravariante quanto covariante — são os chamados *tensores mistos*. Por exemplo, suponha que N^3 grandezas T^i_{jk} se transformem segundo a equação

$$T'^k_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}T^n_{lm} \quad ; \tag{3-4}$$

dizemos serem elas os componentes de um tensor misto de 3ª ordem, com um índice contravariante e dois índices covariantes; também dizemos que esse tensor é do tipo $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$ [ou $(1,2)$]. Note que os tensores covariantes e os contravariantes podem ser vistos como casos especiais de tensores mistos; um tensor contravariante de 2ª ordem é do tipo $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{0}$ e um tensor covariante de 3ª ordem é do tipo $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{3}$.

O delta de Kronecker é melhor denotado como δ_i^j pois é um tensor de 2ª ordem do tipo $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}$; de fato, observe que

$$\delta'^{\,i}_{\,j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\delta^k_l \quad . \tag{3-5}$$

Um tensor pode ser dado em um único ponto $\mathcal{P}$ do espaço V_N, ao longo de uma curva, por todo um subespaço de V_N ou todo o V_N em si. Nos três últimos casos dizemos estar diante de um *campo tensorial*, assim enfatizando que tensores se encontram definidos num *continuum*. Por exemplo, três funções das coordenadas $V_i(x^1, x^2, x^3)$ $(i = 1,2,3)$ são os componentes de um campo vetorial covariante num volume $\mathcal{V}$ se em cada ponto de $\mathcal{V}$ elas se transformarem como os componentes de um vetor covariante.

A importância dos tensores na Física Matemática e Geometria reside no fato de que uma equação tensorial, se verdadeira num sistema de coordenadas, sê-lo-á em todos (cf. Prob. 1).

4. Operações fundamentais com tensores

a) Adição e subtração

Dois tensores de mesma ordem e tipo podem ser somados ou subtraídos, resultando noutro de mesma ordem e tipo. Assim, se A^k_{ij} e B^k_{ij} forem tensores e as grandezas S^k_{ij} e D^k_{ij} forem definidas por

$$S^k_{ij} = A^k_{ij} + B^k_{ij} \qquad \text{e} \qquad D^k_{ij} = A^k_{ij} - B^k_{ij} \quad ,$$

então é fácil provar que S^k_{ij} e D^k_{ij} serão tensores (cf. Prob. 3).

b) Multiplicação externa

Através da multiplicação de cada componente de um tensor de ordem m por cada componente de um tensor de ordem n obtemos os componentes de um tensor de ordem $m + n$ chamado *produto externo* (ou *produto direto*) daqueles tensores. Por exemplo, o produto externo dos tensores U_i^{kl} e W_j^m é o tensor $T_{ij}^{klm} = U_i^{kl} W_j^m$; outros exemplos:

$$T_{ijk} = U_{ij} W_k \ , \qquad T^{ijkl} = U^{ij} W^{kl} \qquad \text{e} \qquad T_{ij}^{kl} = U_{ij} W^{kl} \ .$$

A prova do caráter tensorial desses produtos externos é obtida usando as leis de transformação dos tensores que entram como fatores (cf. Prob. 4).

c) Contração de um tensor misto

Fazemos a *contração* de um tensor misto qualquer igualando um índice covariante a um índice contravariante e somando com respeito a esse índice (a repetição do índice já indica somatório segundo a convenção do somatório), assim formando um tensor cuja ordem é duas unidades a menos que a do tensor original. Por exemplo, do tensor misto de 4ª ordem T_{ij}^{kl}, igualando os índices i e k, obtemos o tensor misto de 2ª ordem

$$T_j^l = T_{ij}^{il}$$

e deste, com uma segunda contração (igualando j e l), obtemos o tensor de ordem zero

$$T = T_j^j = T_{ij}^{ij} \ .$$

Acima, após as contrações, os tensores resultantes, mesmo sendo, em geral, diferentes do tensor original, continuam denotados pela letra T; no caso, a distinção é feita através dos índices (claramente, o tipo do tensor T_j^l é distinto do tipo de T_{ij}^{kl}).

Para ilustrar uma maneira de provar que o resultado da contração realmente possui caráter tensorial, façamos a contração dos índices j e k na Eq. (3-4); vemos que o resultado $T_i \equiv T_{ij}^j$ é de fato um tensor:

$$T_i' = T_{ij}'^{\,j} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n} T_{lm}^n = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\underbrace{\frac{\partial x^m}{\partial x^n}}_{\delta_n^m} T_{lm}^n = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} T_{ln}^n = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} T_l \ .$$

d) Multiplicação interna

Consiste numa combinação da multiplicação externa com a contração. Por exemplo, dados os tensores U_i^{jk} e W_{lm}^n, podemos formar o produto externo $U_i^{jk} W_{lm}^n$ e depois contrair os índices i e n para obter o produto interno $U_i^{jk} W_{lm}^i$ daqueles tensores. Fazendo agora $k = m$ obtemos um outro produto interno: $U_i^{jk} W_{lk}^i$.

e) Tensores simétricos e anti-simétricos

Dizemos que um tensor é *simétrico em relação a dois índices contravariantes ou covariantes* se forem iguais os dois componentes que se obtêm pela troca dos dois índices considerados; neste caso, o próprio tensor é dito *simétrico*. Assim, se

$$T^{ijk}_{lm} = T^{kji}_{lm} \tag{4-1}$$

para todas as combinações dos índices i e k então o tensor é simétrico pois apresenta simetria nesses índices.

A simetria assim definida é uma propriedade que independe do sistema de referência. De fato, para um tensor T^{ij}, segue da Eq. (2-4) que

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}T^{kl} \underset{(1)}{=} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}T^{lk} \underset{(2)}{=} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}T^{kl} \underset{(3)}{=} T'^{ji} \quad , \tag{4-2}$$

onde na passagem (1) são trocados os papéis das letras k e l (*), na passagem (2) é usada a simetria de T^{ij} e na passagem (3) é usada a Eq. (2-4).

Dizemos que um tensor é *anti-simétrico em relação a dois índices contravariantes ou covariantes* se os dois componentes que se obtêm pela troca dos dois índices considerados forem nulos ou diferirem apenas no sinal; neste caso, o próprio tensor é dito *anti-simétrico*. Assim, se

$$T^{ijk}_{lm} = -T^{kji}_{lm} \tag{4-3}$$

para todas as combinações dos índices i e k então o tensor é anti-simétrico pois apresenta anti-simetria nesses índices.

Em quatro dimensões, observe que, dos 16 componentes do tensor anti-simétrico T^{ij}, os quatro componentes T^{ii} (sem somatório) são nulos; os 12 restantes, quando não nulos, serão iguais em módulo e de sinais contrários aos pares, de modo que, genericamente, apenas seis componentes são independentes (um *hexavetor*). Similarmente vemos que, genericamente, os tensores anti-simétricos de terceira ordem T^{ijk} têm somente quatro componentes independentes, enquanto o tensor anti-simétrico T^{ijkl} tem só um. Não há tensores anti-simétricos de ordem superior a quatro em quatro dimensões (cf. Prob. 13).

Note que a simetria ou anti-simetria refere-se a dois índices contravariantes ou a dois índices covariantes. Assim, não dizemos haver simetria quando $T_i^{\ j} = T_j^{\ i}$; tal relação, em geral, não se transmite de um sistema de coordenadas para outro.

f) Lei do quociente

Suponhamos que não saibamos se um ente U seja um tensor. Se um produto interno de U com um tensor *arbitrário* for um tensor então U será também um tensor. Esta é a *lei do quociente*. Por exemplo, se o produto interno $A(i,a)\,\tau_{aj}$ entre o conjunto de N^2 funções $A(i,a)$ e um tensor *arbitrário* τ_{aj} for um tensor covariante de 2ª ordem então $A(i,a) = A_i^{\ a}$, um tensor misto de 2ª ordem. A demonstração da lei do quociente é casuísta; nas seções de exercícios (Seçs. 14 e 15) fornecemo-la em alguns casos (cf. Probs. 14 a 18).

(*) Uma tal troca recíproca das letras que designam dois índices, por ser muito freqüente no desenvolvimento de equações tensoriais, será abreviadamente indicada assim: $k \rightleftarrows l$. Muito comum também são as trocas simples de uma letra (digamos i) por outra (j), ou de duas letras (i e j) por outras duas (m e n), etc, as quais assim indicaremos: $i \to j$; $i, j \to m, n$; etc.

5. Tensores relativos

As grandezas $\mathcal{T}^{\,i\cdots}_{\;j\cdots}$ são ditas componentes de um *tensor relativo de peso* $W \in \mathbb{Z}$, *contravariante nos superíndices e covariante nos subíndices*, se elas se transformarem de acordo com a equação

$$\mathcal{T}'^{\,i\cdots}_{\;j\cdots} = J^W \, \mathcal{T}^{\,k\cdots}_{\;l\cdots} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \cdots \quad , \tag{5-1}$$

onde J é o jacobiano dado pelas Eqs. (1-5) e (1-3), admitido positivo. É comum se denotarem os tensores relativos por meio das letras góticas (e.g., $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{G}$ são as letras T e G); mas, por causa da dificuldade de manuscrevê-las, usaremos letras de mão (e.g., $\mathcal{A}$, a, $\mathcal{B}$, b, $\mathcal{F}$, f, $\mathcal{T}$, t).

Seguindo a prática adotada antes, referimo-nos aos tensores relativos de ordem 0 e 1 como *escalares relativos e vetores relativos*, respectivamente. Há certas nomenclaturas adotadas para tensores relativos de certos pesos: (a) quando $W = 0$, dizemos que as grandezas formam um tensor *absoluto*, que é o tensor até então estudado; (b) quando $W = -1$, o tensor relativo também é conhecido como *capacidade tensorial*; e (c) quando $W = 1$, o tensor relativo recebe também o nome de *densidade tensorial* (se de ordens 0 e 1 dizemos *densidade escalar* e *densidade vetorial*, respectivamente). Neste último caso, o nome vem do fato de a grandeza física ρ (densidade) ser dessa categoria, à qual empresta o seu nome. Realmente, considere a expressão da massa total num volume $\mathcal{V}$ onde se encontra matéria distribuída com densidade $\rho(x)$. Mudando de coordenadas segundo a lei de transformação $x^i = x^i(x')$, vemos através da integral que fornece a massa total M,

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho(x)\, d^3x = \int_{\mathcal{V}} \rho[x(x')] \left| \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right| d^3x' = \int_{\mathcal{V}} \rho'(x')\, d^3x' \quad ,$$

que a densidade de matéria nas novas coordenadas é dada por $\rho'(x') = |\partial x^i / \partial x'^j|\,\rho(x)$, ou seja, a grandeza física $\rho(x)$ é um escalar relativo de peso 1 (uma densidade escalar).

As operações de adição, subtração, multiplicação, etc, de tensores relativos são semelhantes às de tensores absolutos. É fácil mostrar que (cf. Prob. 19):

– dois tensores relativos de mesma ordem, tipo e peso podem ser somados, sendo o resultado um tensor relativo de mesma ordem, tipo e peso

– tensores relativos podem ser multiplicados interna ou externamente, sendo o produto um tensor relativo cujo peso é a soma dos pesos dos fatores

– um tensor relativo pode ser contraído, sendo de mesmo peso o tensor relativo resultante

– a simetria e a anti-simetria de tensores relativos independem do sistema de coordenadas

São escalares relativos de pesos 2, –2 e 0 os determinantes de tensores absolutos de 2ª ordem $|T_{ij}|$, $|U^{ij}|$ e $|W_i^{\;j}|$, respectivamente. Para provar isso (cf. Prob. 20), basta escrever as leis de transformação dos tensores, tomar o determinante em cada membro da equação e usar a regra do produto de determinantes, lembrando que $J = |\partial x^i / \partial x'^j|$ e $J^{-1} = |\partial x'^j / \partial x^i|$:

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl} \quad \Rightarrow \quad |T'_{ij}| = J^2\,|T_{kl}| \qquad \text{(peso 2)} \quad , \tag{5-2}$$

$$U'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} U^{kl} \quad \Rightarrow \quad |U'^{ij}| = J^{-2}\,|U^{kl}| \qquad \text{(peso } -2\text{)} \quad , \tag{5-3}$$

$$W_i'^{\,j} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}W_k^l \quad \Rightarrow \quad |W_i'^{\,j}| = |W_k^l| \qquad \text{(peso 0)} \ . \tag{5-4}$$

Consideremos agora, no espaço de três dimensões, o símbolo de Levi-Civita $\mathcal{E}_{ijk}$. Para investigar seu caráter tensorial, notamos que, usando a expressão do determinante em termos desse símbolo, podemos dizer que o jacobiano é dado por

$$J = \mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial x'^1}\frac{\partial x^j}{\partial x'^2}\frac{\partial x^k}{\partial x'^3} \ . \tag{5-5}$$

Portanto, pela Eq. (B-35), temos que

$$\mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = J\,\mathcal{E}_{lmn} \ ,$$

ou, multiplicando por J^{-1} e tendo em conta que $\mathcal{E}_{lmn} = \mathcal{E}'_{lmn}$ (a definição do símbolo de Levi-Civita é a mesma em qualquer sistema de coordenadas)

$$\mathcal{E}_{lmn} = J^{-1}\mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = \mathcal{E}'_{lmn} \ , \tag{5-6}$$

revelando que $\mathcal{E}_{ijk}$ é um tensor relativo covariante de 3ª ordem de peso –1.

Por um raciocínio análogo também mostramos que

$$\mathcal{E}'_{lmn} = J\,\mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^j}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \ , \tag{5-7}$$

revelando que $\mathcal{E}_{ijk}$ também é um tensor relativo contravariante de peso 1, o que justifica a notação alternativa $\mathcal{E}^{ijk}$ para o símbolo de Levi-Civita. Em resumo, o símbolo de Levi-Civita é um tensor relativo de 3ª ordem que é denotado por $\mathcal{E}_{ijk}$ se for considerado covariante e de peso –1 e por $\mathcal{E}^{ijk}$, se contravariante e de peso 1.

6. O elemento de comprimento de arco e o tensor métrico

a) O tensor fundamental covariante

Em coordenadas cartesianas (x, y, z), o quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ . \tag{6-1}$$

No espaço de N dimensões, dizemos que as coordenadas x'^i são *cartesianas* se o quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos $\mathcal{P}(x')$ e $\mathcal{P}(x' + dx')$ for dado pela fórmula *Pitagórica*

$$ds^2 = dx'^k dx'^k \quad (k = 1, 2 \cdots N) \qquad [\,x'^k: \text{ coordenadas cartesianas}] \ , \tag{6-2}$$

que é a extensão natural da Eq. (6-1) para espaços com mais de três dimensões. Escrevendo esta equação em coordenadas x^i genéricas, o que se faz substituindo $dx'^k = (\partial x'^k / \partial x^i)\,dx^i$, obtemos uma forma quadrática dos diferenciais das coordenadas em sua expressão mais geral, denominada *forma fundamental* ou *forma métrica* (ou simplesmente *métrica*):

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \quad , \tag{6-3}$$

onde

$$g_{ij}(x) \equiv \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \qquad [\, x'^k : \text{ coordenadas cartesianas}] \tag{6-4}$$

é o chamado *tensor métrico* ou *tensor fundamental* do espaço, claramente simétrico. É fácil mostrar que g_{ij}, de fato, se transforma como um tensor covariante de 2ª ordem, pois, sob a mudança de coordenadas x^i para x''^i (x'^i são cartesianas), temos que

$$g_{ij}(x) \equiv \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^k}{\partial x''^m}\frac{\partial x''^m}{\partial x^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x''^n}\frac{\partial x''^n}{\partial x^j} = \frac{\partial x''^m}{\partial x^i}\frac{\partial x''^n}{\partial x^j}\underbrace{\frac{\partial x'^k}{\partial x''^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x''^n}}_{g''_{mn}(x'')} = \frac{\partial x''^m}{\partial x^i}\frac{\partial x''^n}{\partial x^j}\, g''_{mn}(x'') \ . \tag{6-5}$$

Logo, ds^2, sendo o produto dos tensores no 2º membro da Eq. (6-3), é também um tensor: um invariante, no caso, como é de se esperar, uma vez que a distância entre dois pontos não deve depender das coordenadas utilizadas no seu cálculo.

Entretanto, existem "espaços" onde não é possível introduzir um sistema de coordenadas cartesianas. Como exemplo, temos o "espaço" bidimensional formado pelos pontos na superfície de uma esfera de raio *R*, onde a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é dado em termos das coordenadas esféricas θ e φ (co-latidude e longitude, respectivamente) por

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \quad .$$

Não existem coordenadas (digamos ξ e η) em termos da qual essa forma quadrática tome a forma $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$, como a da Eq. (6-2) com $N = 2$. Uma maneira de introduzir tais espaços nos nossos estudos consiste em definir espaços dotados do conceito de distância como segue:

Temos um espaço métrico ou riemanniano sempre que a distância quadrática infinitesimal puder ser escrita como uma forma quadrática dos diferenciais das coordenadas que seja invariante; i.e.

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = \text{invariante} \quad . \tag{6-6}$$

Num tal espaço, se a métrica for *definitivamente positiva* ($g_{ij}dx^i dx^j > 0$ exceto se os diferenciais dx^i se anularem)(*) e for possível introduzir as chamadas *coordenadas cartesianas*, nas quais o tensor métrico e a distância quadrática infinitesimal tomam as formas especiais

$$g'_{ij} \doteq 1 \text{ se } i = j \text{ e } g'_{ij} \doteq 0 \text{ se } i \neq j \quad \Leftrightarrow \quad ds^2 = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + \cdots + (dx'^N)^2 \quad , \tag{6-7}$$

válidas em todos os pontos, dizemos que o espaço é *euclidiano* (usamos o sinal $\doteq$ para indicar que a igualdade só é válida num sistema de coordenadas específico). Espaços euclidianos são, portanto, casos especiais de espaços riemannianos.

(*) Alguns autores consideram riemanniano apenas o espaço de métrica definitivamente positiva, chamando de *pseudo-riemanniano* o espaço de métrica *de sinal não-definitivo*.

No Prob. 23 mostramos que as grandezas g_{ij} na Eq. (6-6) podem ser sempre consideradas como os componentes de um tensor covariante de 2ª ordem simétrico [a prova apresentada na Eq. (6-5) baseia-se na Eq. (6-4), que foi deduzida a partir da Eq. (6-2), e só vale, portanto, na hipótese de o espaço admitir as coordenadas cartesianas].

b) <u>O tensor fundamental contravariante</u>

Sejam $g \equiv |g_{ij}|$ o determinante do tensor métrico, denominado *determinante métrico* e admitido nesta exposição que nunca se anula, e G^{ij} o co-fator de g_{ij} nesse determinante; sabemos que

$$g_{ik}\, G^{jk} = g_{ki}\, G^{kj} = \delta_i^j g \quad , \tag{6-8}$$

de acordo com as regras ordinárias para o desenvolvimento de determinantes. Definamos agora as grandezas

$$g^{ij} \equiv \frac{G^{ij}}{g} \quad . \tag{6-9}$$

Pelas relações dadas na Eq. (6-8) vemos que tais grandezas satisfazem as equações

$$g_{ik}\, g^{jk} = \delta_i^j \quad . \tag{6-10}$$

Lembrando que, para qualquer matriz (a_{ij}), o elemento a_{ij}^{-1} da sua inversa é dado por

$$a_{ij}^{-1} = A_{ji} / a \quad , \tag{6-11}$$

onde A_{ji} é o co-fator do elemento a_{ji} no determinante $a = |a_{ij}|$, e considerando a simetria de G^{ij} nos índices *i* e *j* (vez que se trata dos co-fatores dos elementos do determinante simétrico $|g_{ij}|$), vemos que as grandezas g^{ij} definidas através da Eq. (6-9) são os elementos da matriz inversa (também simétrica) da matriz (g_{ij}). Em vista disso, reconhecemos no 1º membro da Eq. (6-10) o cálculo de um elemento genérico do produto da matriz (g_{ij}) pela sua inversa.

Usando a Eq. (6-10) podemos mostrar que g^{ij} é um tensor do tipo $\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}$ (cf. Prob. 24). É o chamado *tensor contravariante fundamental,* ou ainda *tensor conjugado* ou *recíproco de* g_{ij} (é simétrico, conforme já discutimos acima).

Duas observações: a) a Eq. (6-10) mostra um fato já comprovado na Eq. (3-5), que o delta de Kronecker δ_i^j é um tensor. Logo abaixo ficará claro que g_{ij}, g^{ij} e δ_i^j representam um mesmo objeto geométrico: a métrica, o que justifica chamar δ_i^j de *tensor fundamental misto*; b) os co-fatores G^{ij} de g_{ij} formam um tensor relativo contravariante de peso 2 (cf. Prob. 21).

c) <u>A formação de novos tensores por meio dos tensores fundamentais</u>

Os tensores fundamentais g_{ij} e g^{ij} podem ser usados nas operações de *abaixar* e *levantar* índices tensoriais assim definidas:

$$T^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots\ i\ \cdots} \equiv g_{im}\, T^{\cdots\ m\ \cdots}_{\cdots\ \ \ \cdots} \qquad \text{e} \qquad T^{\cdots\ j\ \cdots}_{\cdots\ \ \cdots} \equiv g^{jn}\, T^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots\ n\ \cdots} \quad , \tag{6-12}$$

onde dizemos que o tensor T teve seu índice *m abaixado* como *i* na primeira operação e seu índice *n levantado* como *j* na segunda. Dado um tensor, este e os que dele resultam abaixando e levantando índices são denominados *tensores associados*; usamos a mesma letra para denotá-los (T nos exemplos acima). Tensores associados são vistos como representações de um mesmo objeto geométrico (de fato, a relação $X_i = g_{ij} X^j$ estabelece um isomorfismo entre os vetores covariantes e contravariantes associados) — exemplos: (a) g_{ij}, g^{ij} e δ_i^j ($= g_{ik} g^{kj}$) são diferentes representações da *métrica* do espaço; (b) o vetor contravariante dx^j e o vetor covariante $dx_i = g_{ij} dx^j$ representam o mesmo deslocamento infinitesimal $\overrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}}$ desde o ponto $\mathcal{P}(x^j)$ até o ponto $\mathcal{Q}(x^j + dx^j)$.

A liberdade de levantar e abaixar índices exige cuidado com a ordem horizontal na qual os índices contravariantes e covariantes são escritos. Por exemplo, em geral, $X_i{}^j$ será diferente de $X^j{}_i$, sendo iguais quando X^{ij} for simétrico:

$$X_i{}^j - X^j{}_i = g_{ik} X^{kj} - g_{ik} X^{jk} = g_{ik}\left(X^{kj} - X^{jk} \right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X^{kj} = X^{jk} .$$

Por esta razão, daqui por diante evitaremos escrever um subíndice e um superíndice na mesma linha vertical. (Nos espaços vagos é comum escrever pontos – e.g: $T^{ij}{}_{..kl}$; no caso acima teríamos $X_{i.}{}^{j}$ e $X^{j}{}_{.i}$ — prática que não adotaremos.)

> Ressalva: Nas coordenadas cartesianas x'^i, o tensor métrico é dado pela Eq. (6-7) e, portanto, $A'_i = g'_{ij} A'^j = A'^i$, mostrando que os componentes cartesianos de um vetor não se distinguem quanto ao tipo contravariante ou covariante; isso, obviamente, é válido para os componentes *cartesianos* de um tensor qualquer. Portanto, qualquer que seja o tipo do tensor, seus componentes cartesianos podem ser denotados com subíndices apenas, prática comum na literatura e que será adotada aqui.

d) Magnitude de um vetor e ângulo entre vetores

O escalar $X^i Y_i$ obtido pelo produto interno de X^i com Y_i reduz-se ao produto escalar familiar no sistema de coordenadas cartesianas. Podemos, assim, definir a *magnitude* $|X|$ de um vetor X^i ou o seu associado X_i através da equação

$$|X|^2 \equiv X^i X_i \quad \left(= g_{ij} X^i X^j = g^{ij} X_i X_j \right) . \tag{6-13}$$

Podemos também definir o ângulo θ entre os vetores A^i e B^i (lembre-se de que estes representam objetos geométricos que também podem ser descritos pelos componentes covariantes A_i e B_i) como sendo o produto interno dos vetores unitários α_i e β_i obtidos a partir daqueles vetores:

$$\cos\theta \equiv \alpha^i \beta_i \quad , \quad \text{onde } \alpha^i \equiv A^i / \sqrt{|A|^2} \ \text{ e } \ \beta_i = B_i / \sqrt{|B|^2} \ . \tag{6-14}$$

É fácil ver que esses dois conceitos (magnitude e ângulo) são invariantes e se reduzem aos conceitos familiares no espaço euclidiano tridimensional.

e) Propriedades do determinante métrico

Substituindo T_{ij} por g_{ij} na Eq. (5-2) obtemos

$$g' = J^2 g \quad ; \tag{6-15}$$

ou seja, como qualquer determinante de um tensor de 2ª ordem covariante, *o determinante métrico é um escalar relativo de peso 2*. Tirando a raiz quadrada de ambos os membros da equação acima obtemos (admitindo $g > 0$)

$$\sqrt{g'} = J\sqrt{g} \quad , \tag{6-16}$$

ou seja, $\sqrt{g}$ é um escalar relativo de peso 1. Ele desempenha um papel importante nas integrações; por exemplo, temos que

$$dV \equiv \sqrt{g}\ dx^1 dx^2 \cdots dx^N = \text{Invariante} \quad . \tag{6-17}$$

De fato, usando a Eq. (6-16) obtemos

$$dV' = \sqrt{g'}\ dx'^1 dx'^2 \cdots dx'^N = \sqrt{g}\ J\ dx'^1 dx'^2 \cdots dx'^N = \sqrt{g}\ dx^1 dx^2 \cdots dx^N = dV \quad .$$

Assim, concluímos que, se ϕ for um invariante, então

$$\int_{V'} \phi'\, dV' = \int_V \phi\, dV \quad . \tag{6-18}$$

A Eq. (6-17) é usada para definir o *elemento de volume no* V_N. Essa definição decorre do fato de que aquela equação é obtida naturalmente partindo das coordenadas cartesianas x'^i. Realmente, usando a notação $\mathbf{A} = (a_{ij})$ para a matriz com elementos $a_{ij} \equiv \partial x'^i / \partial x^j$, vemos que

$$\begin{aligned} J'^2 &= \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right| \cdot \left| \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \right| = |a_{ik}| \cdot |a_{lj}| = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}} \cdot \det \mathbf{A} = \det(\tilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{A}) \\ &= |\tilde{a}_{ik}\, a_{kj}| = |a_{ki}\, a_{kj}| = \left| \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \right| = |g_{ij}| = g \quad , \end{aligned}$$

onde usamos propriedades dos determinantes bem conhecidas e também a Eq. (6-4). Portanto, partindo do elemento de volume em coordenadas cartesianas x'^i, mudando para as coordenas curvilíneas x^i e usando $J' = \sqrt{g}$, verificamos que a definição de dV dada na Eq. (6-17) é consistente:

$$dV' = dx'^1 dx'^2 \cdots dx'^N = J'\, dx^1 dx^2 \cdots dx^N = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^N \equiv dV \quad .$$

7. Componentes físicos de um tensor

Num sistema de coordenadas curvilíneas x^i *ortogonal* ($g_{ij} = 0$ se $i \neq j$), seja X^i um vetor qualquer e ξ^i um vetor unitário $(g_{ij}\xi^i\xi^j = 1)$. Temos a seguinte definição:

$$\textit{Componente físico do vetor } X^i \textit{ na direção de } \xi^i \equiv g_{ij}\, X^i \xi^j = X^i \xi_i = X_i\, \xi^i \quad . \tag{7-1}$$

Essa é uma expressão invariante que, em coordenadas cartesianas z_i (nas quais Z_i e ζ_i são os componentes cartesianos dos vetores X^i e ξ^i, respectivamente), toma a forma [(*)]

$$X^i \xi_i = Z_i \zeta_i \quad . \tag{7-2}$$

Sendo esse produto escalar dos vetores Z_i e ζ_i a projeção ortogonal usual de Z_i na direção de ζ_i, justificada está a definição na Eq. (7-1).

No caso de um tensor de 2ª ordem, os seus componentes físicos são calculados nas direções de dois vetores unitários ξ^i e η^i (que podem coincidir), sendo definidos como segue:

$$T_{ij}\, \xi^i \eta^j \quad \left(= T^{ij} \xi_i \eta_j = T^i{}_j\, \xi_i\, \eta^j ,\ \text{etc.} \right) \tag{7-3}$$

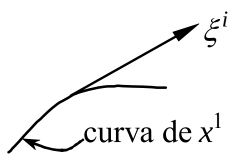
A extensão da definição de componentes físicos de tensores para os casos de ordem superior a 3 é óbvia.

> Ressalva: Geralmente, os vetores unitários ξ^i, η^i ao longo dos quais os componentes físicos são calculados são aqueles tangentes às curvas coordenadas. Admitiremos que esse é o caso ao nos referirmos aos componentes físicos de um tensor, que serão, então, denotados com uma barra em cima: $\overline{X}_\xi \equiv X_i\, \xi^i$, $\overline{T}_{\xi\eta} \equiv T^i{}_j\, \xi_i\, \eta^j$, etc.
>
> Um exemplo para clarear mais as idéias: na notação ordinária, os componentes físicos de um vetor $\vec{X}$ são, no sistema de coordenadas esféricas, os coeficientes dos versores na equação $\vec{X} = \overline{X}_r\, \vec{e}_r + \overline{X}_\theta\, \vec{e}_\theta + \overline{X}_\varphi\, \vec{e}_\varphi$, pois $\overline{X}_r = \vec{e}_r \cdot \vec{X} = r_i\, Z_i$, $\overline{X}_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \vec{X} = \theta_i\, Z_i$ e $\overline{X}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{X} = \varphi_i\, Z_i$, onde r_i, θ_i, φ_i e Z_i são os componentes cartesianos de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ e $\vec{X}$, respectivamente.

Nas Eqs. (7-1) e (7-3) transparece que os componentes físicos de um dado tensor podem ser calculados usando seus componentes contravariantes, covariantes ou mistos (esses e os componentes físicos representam um mesmo objeto geométrico, conforme já afirmamos na Seç. 6c).

Calculemos os componentes físicos de um vetor ao longo das curvas coordenadas em termos de seus componentes contravariantes ou covariantes. Para facilitar a exposição, consideramos um espaço tridimensional. É necessário usar a Eq. (7-1) três vezes, em cada uma com o vetor unitário ξ^i tangente a uma das curvas coordenadas.

Ora, dada uma curva $x^i = x^i(s)$ qualquer (parametrizada pelo comprimento de arco), sabemos que o vetor unitário tangente é $\xi^i = dx^i / ds$. No caso de ser ela a curva de x^1 (onde $x^2 = x^3 =$ constante) como mostra a figura à direita, o vetor unitário tangente é



$$\xi^1 = dx^1 / ds \ , \qquad \xi^2 = 0 \ , \qquad \xi^3 = 0 \quad .$$

Sendo esse um vetor unitário, temos que

$$1 = g_{ij} \xi^i \xi^j = g_{11} \xi^1 \xi^1 = g_{11} (\xi^1)^2 \quad ,$$

(*) Nas coordenadas cartesianas, não sendo os índices distinguidos pelo caráter contravariante ou covariante, escrevemo-los como subíndices (cf. a ressalva feita ao final da Seç. 6c) donde calculamos ξ^1 e, abaixando o índice, também ξ_1, ξ_2 e ξ_3:

$$\xi^1 = 1/\sqrt{g_{11}} \qquad \Rightarrow \qquad \xi_i = g_{ij}\xi^j = g_{i1}\xi^1 = g_{i1}/\sqrt{g_{11}} \quad . \tag{7-4}$$

Portanto, de acordo com a definição dada na Eq. (7-1), o componente físico do vetor X^i ao longo da curva de x^1 é dado por $\overline{X}_1 = X_i\,\xi^i = X_1\,\xi^1 = X_1/\sqrt{g_{11}}$. Ao longo das curvas de x^2 e x^3 temos resultados similares. Logo, os componentes físicos de X^i no sistema de coordenadas curvilíneas considerado são

$$X_1/\sqrt{g_{11}} \ , \qquad X_2/\sqrt{g_{22}} \quad \text{e} \quad X_3/\sqrt{g_{33}} \ ; \tag{7-5}$$

estes são calculados em termos dos componentes covariantes X_1, X_2 e X_3. Para calcular os componentes físicos em termos dos componentes contravariantes, usamos a expressão na Eq. (7-1) que envolve esses componentes: $\overline{X}_1 = X^i\xi_i = X^i g_{i1}/\sqrt{g_{11}} = X^1 g_{11}/\sqrt{g_{11}} = X^1\sqrt{g_{11}}$ é o componente físico ao longo da curva de x^1; este e os outros dois são

$$X^1\sqrt{g_{11}} \ , \qquad X^2\sqrt{g_{22}} \quad \text{e} \quad X^3\sqrt{g_{33}} \ . \tag{7-6}$$

Em resumo:

$$\overline{X}_1 = \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}} = X^1\sqrt{g_{11}} \ , \qquad \overline{X}_2 = \frac{X_2}{\sqrt{g_{22}}} = X^2\sqrt{g_{22}} \ , \qquad \overline{X}_3 = \frac{X_3}{\sqrt{g_{33}}} = X^3\sqrt{g_{33}} \ . \tag{7-7}$$

No caso de um tensor de 2ª ordem, os componentes físicos são calculados pelo mesmo procedimento. Por exemplo, selecionando ξ^i ao longo da curva de x^1 e η^i ao longo da curva de x^2, temos que

$$\xi^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \ , \ \xi^2 = 0 \ , \ \xi^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \eta^1 = 0 \ , \ \eta^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \ , \ \eta^3 = 0 \ ,$$

bem como

$$\xi_i = g_{ij}\,\xi^j = g_{i1}\,\xi^1 = \delta_{i1}g_{11}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = \delta_{i1}\sqrt{g_{11}} \quad \text{e} \quad \eta_i = g_{ij}\,\eta^j = g_{i2}\,\eta^2 = \delta_{i2}g_{22}\frac{1}{\sqrt{g_2}} = \delta_{i2}\sqrt{g_{22}} \ ;$$

portanto, o componente físico de T^{ij} nessas direções é

$$\overline{T}_{12} = T_{ij}\,\xi^i\eta^j = T_{12}\,\xi^1\eta^2 = \frac{T_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}} \ ,$$

ou, em termos dos componentes contravariantes,

$$\overline{T}_{12} = T^{ij}\xi_i\,\eta_j = T^{ij}\delta_{i1}\sqrt{g_{11}}\,\delta_{j2}\sqrt{g_{22}} = T^{12}\sqrt{g_{11}\,g_{22}} \ .$$

Em resumo, os nove componentes físicos desse tensor, tanto em termos dos seus componentes covariantes quanto dos contravariantes, são

$$
\left(\overline{T}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{T_{11}}{g_{11}} & \dfrac{T_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}} & \dfrac{T_{13}}{\sqrt{g_{11}\,g_{33}}} \\[2ex] \dfrac{T_{21}}{\sqrt{g_{22}\,g_{11}}} & \dfrac{T_{22}}{g_{22}} & \dfrac{T_{23}}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}} \\[2ex] \dfrac{T_{31}}{\sqrt{g_{33}\,g_{11}}} & \dfrac{T_{32}}{\sqrt{g_{33}\,g_{22}}} & \dfrac{T_{33}}{g_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{11} g_{11} & T^{12}\sqrt{g_{11}\,g_{22}} & T^{13}\sqrt{g_{11}\,g_{33}} \\[2ex] T^{21}\sqrt{g_{22}\,g_{11}} & T^{22} g_{22} & T^{23}\sqrt{g_{22}\,g_{33}} \\[2ex] T^{31}\sqrt{g_{33}\,g_{11}} & T^{32}\sqrt{g_{33}\,g_{22}} & T^{33} g_{33} \end{pmatrix} \tag{7-8}
$$

Os manuais de fórmulas matemáticas geralmente listam os fatores de escala h_i, em termos dos quais o elemento de comprimento de arco é dado por

$$
ds^2 = \underbrace{h_1^2}_{g_{11}}(dx^1)^2 + \underbrace{h_2^2}_{g_{22}}(dx^2)^2 + \underbrace{h_3^2}_{g_{33}}(dx^2)^2 \quad , \tag{7-9}
$$

donde facilmente concluímos que

$$
\sqrt{g_{11}} = h_1 \ , \qquad \sqrt{g_{22}} = h_2 \quad \text{e} \quad \sqrt{g_{33}} = h_3 \ , \tag{7-10}
$$

resultados úteis para a utilização das Eqs. (7-7) e (7-8).

8. Equação da linha geodésica

Considere todas as curvas que ligam dois pontos fixos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Em geral, dentre todas essas curvas, apenas uma, denominada *geodésica entre* $\mathcal{P}_1$ *e* $\mathcal{P}_2$, tem comprimento menor que o de todas as outras. Segue um método de determiná-la.

Admita que uma das curvas que ligam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ tenha a parametrização

$$
x^i = x^i(t) \quad , \quad t \in [t_1 \, , t_2] \quad , \tag{8-1}
$$

onde t é um parâmetro genérico e $x^i(t_1)$ e $x^i(t_2)$ são respectivamente as coordenadas de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. O seu elemento de comprimento de arco é

$$
ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j} = \sqrt{g_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j}\; dt \quad ; \tag{8-2}
$$

logo seu comprimento é

$$
\ell = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}\, dt \quad , \quad \text{com} \quad \dot{s} \equiv \sqrt{g_{ij}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_j} \quad . \tag{8-3}
$$

As equações paramétricas $x^k(t)$ da geodésica minimizam a integral que fornece ℓ, as quais, segundo o Cálculo de Variações, são dadas pelas equações de Euler-Lagrange (cf. Ap. C):

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial \dot{s}}{\partial x^k} = 0 \quad . \tag{8-4}
$$

Lembrando que g_{ij} não depende explicitamente de $\dot{x}^k$, temos que

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}\sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial(g_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j)}{\partial \dot{x}^k} = \frac{g_{ij}}{2\dot{s}}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^k}\dot{x}^j + \dot{x}^i\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{x}^k}\right)$$

$$= \frac{g_{ij}}{2\dot{s}}(\delta^i_k\dot{x}^j + \dot{x}^i\delta^j_k) = \frac{g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i}{2\dot{s}} = \frac{2g_{kj}\dot{x}^j}{2\dot{s}} = \frac{g_{kj}\dot{x}^j}{\dot{s}}$$

e que

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial x^k} = \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j) = \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j \;\; ;$$

esses resultados substituídos na Eq. (8-4) fornecem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kj}\,\dot{x}^j}{\dot{s}}\right) - \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \;\; .$$

Até agora usamos um parâmetro completamente genérico ao longo da geodésica, solução da equação acima. Se tomarmos como parâmetro o comprimento de arco medido desde o ponto $\mathcal{P}_1$ então $\dot{s} = 1$ e $\ddot{s} = 0$, passando a equação acima a ter a forma

$$\frac{d}{ds}\left(g_{kj}\frac{dx^j}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = g_{kj}\frac{d^2x^j}{ds^2} + \frac{dg_{kj}}{ds}\frac{dx^j}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \;\; .$$

O segundo termo pode ser escrito assim:

$$\frac{dg_{kj}}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} \;\; .$$

Logo, substituindo essa equação na anterior, obtemos

$$g_{kj}\frac{d^2x^j}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \;\; .$$

Introduzindo nesta equação o chamado *símbolo de Christoffel de 1ª espécie*,

$$[ij,k] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \;\; , \tag{8-5}$$

obtemos, com *l* no lugar de *k*,

$$g_{lj}\frac{d^2x^j}{ds^2} + [ij,l]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \;\; .$$

Por fim, multiplicando por g^{kl} e introduzindo o *símbolo de Christoffel de 2ª espécie*,

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \equiv g^{kl}\,[ij,l] \;\; , \tag{8-6}$$

encontramos a *equação da geodésica* na forma normalmente apresentada na literatura,

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \;\; , \tag{8-7}$$

cuja solução fornece a parametrização $x^k(s)$ da geodésica no espaço que é caracterizado pela métrica g_{ij}.

Note pela Eq. (8-5) que o símbolo de Christoffel de 1ª espécie é simétrico nos dois primeiros índices (i e j, no caso) e, portanto, pela Eq. (8-6), que também o de 2ª espécie é simétrico, mas nos dois índices inferiores.

Da Eq. (8-6) é fácil deduzir que

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} g_{km} = [ij,m] \quad . \tag{8-8}$$

Um meio mnemônico de memorizar as Eqs. (8-6) e (8-8) é considerar válidas as operações de levantar e abaixar índices para os símbolos de Christoffel. Assim, na Eq. (8-6), o índice l de $[ij,l]$ é levantado como k para se obter $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$ e, na Eq. (8-8), o índice k de $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$ é abaixado como m para se obter $[ij,m]$.

As seguintes relações envolvendo os símbolos de Christoffel e a métrica são úteis nas aplicações e são deduzidas nos exercícios resolvidos (cf. Probs. 37 e 38):

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [ik,j] + [jk,i] \tag{8-9}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{il}\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} - g^{jl}\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \tag{8-10}$$

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} \tag{8-11}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} && (8\text{-}12) \\ \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} && (8\text{-}13) \\ \begin{Bmatrix} i \\ jj \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} && (8\text{-}14) \end{aligned}\right\} \text{onde } i \neq j,\ g_{ij}\Big|_{i\neq j} = 0 \text{ e com a convenção da soma suspensa}$$

Na literatura, em vez de $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$, também se usam $\{ij,k\}$ e Γ^k_{ij}; esta última notação, entretanto, sugere um caráter tensorial que, como veremos adiante, não é verdadeiro em geral.

9. Lei de transformação dos símbolos de Christoffel

Considere o símbolo de Christoffel de 1ª espécie no sistema de coordenadas x'^i:

$$[ij,k]' \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{jk}}{\partial x'^i} + \frac{\partial g'_{ik}}{\partial x'^j} - \frac{\partial g'_{ij}}{\partial x'^k}\right) \quad ; \tag{9-1}$$

para obtê-lo no sistema de coordenadas x^i, calculemos nesse sistema o primeiro termo entre parênteses, fazendo uso da regra da cadeia e da lei de transformação da métrica:

$$\frac{\partial g'_{jk}}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(g_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\right) = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + g_{mn}\left(\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^k}\right).$$

Desta equação, com duas permutações $(\partial g'_{jk}/\partial x'^i \xrightarrow{i\rightleftarrows j} \partial g'_{ik}/\partial x'^j \xrightarrow{j\rightleftarrows k} \partial g'_{ij}/\partial x'^k)$, obtemos no sistema x^i os dois últimos termos da Eq. (9-1); substituindo nesta os resultados, encontramos

$$\begin{aligned}
[ij,k]' = {} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + \frac{1}{2} g_{mn}\left(\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + \cancel{\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^k}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}}_{l\rightleftarrows m} + \frac{1}{2} g_{mn}\left(\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + \cancel{\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^k}}\right) \\
& - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}}_{l,m,n\to n,l,m} - \frac{1}{2} g_{mn}\left(\cancel{\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^k \partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}} + \cancel{\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^k \partial x'^j}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j} + g_{mn}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\right) + g_{mn}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}
\end{aligned}$$

(onde indicamos as trocas de índices de acordo com o rodapé da p. 8), ou

$$[ij,k]' = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}[lm,n] + g_{mn}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \,. \tag{9-2}$$

Esta é a lei de transformação do símbolo de Christoffel de 1ª espécie. Observe que o segundo termo no 2º membro impede que $[ij,k]$ se transforme como um tensor do tipo $\substack{0\\3}$ (covariante de 3ª ordem).

Calculemos agora o símbolo de Christoffel de 2ª espécie no sistema de coordenadas x'^i em termos desses símbolos no sistema de coordenadas x^i. Usando a Eq. (9-2), temos

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' &= g'^{ks}[ij,s]' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a}\frac{\partial x'^s}{\partial x^b} g^{ab}\left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^s}[lm,n] + g_{mn}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^s}\right) \\
&= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\underbrace{\frac{\partial x'^s}{\partial x^b}\frac{\partial x^n}{\partial x'^s}}_{\delta^n_b} g^{ab}[lm,n] + \frac{\partial x'^k}{\partial x^a}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\underbrace{\overbrace{\frac{\partial x'^s}{\partial x^b}\frac{\partial x^n}{\partial x'^s}}^{\delta^n_b} g^{ab} g_{mn}}_{\delta^a_m} \\
&= \frac{\partial x'^k}{\partial x^a}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\underbrace{g^{an}[lm,n]}_{\left\{ {a \atop lm} \right\}} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}
\end{aligned}$$

ou, trocando *a* por *n*,

$$\left\{ {k \atop ij} \right\}' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\left\{ {n \atop lm} \right\} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \quad . \tag{9-3}$$

Esta é a lei de transformação do símbolo de Christoffel de 2ª espécie. Novamente note que é o segundo termo no 2º membro que impede que $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ se transforme como um tensor do tipo ${1 \atop 2}$.

Da (9-3) podemos calcular em termos dos símbolos de Christoffel de 2ª espécie uma expressão para $\partial^2 x^m / \partial x'^i \partial x'^j$. Multiplicando tal equação por $\partial x^a / \partial x'^k$, obtemos

$$\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}\left\{ {k \atop ij} \right\}' = \underbrace{\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}}_{\delta^a_n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\left\{ {n \atop lm} \right\} + \underbrace{\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}}_{\delta^a_m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \quad ,$$

donde

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^k}\left\{ {k \atop ij} \right\}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\left\{ {a \atop lm} \right\} \quad . \tag{9-4}$$

Nesta expressão podemos inverter x e x' para obter

$$\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\left\{ {k \atop ij} \right\} - \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^j}\left\{ {a \atop lm} \right\}' \quad . \tag{9-5}$$

10. Derivada covariante

a) Derivada covariante de tensores

Exceto no caso da diferenciação de uma função $\phi(x^i)$ invariante, para a qual $\partial\phi / \partial x'^j = (\partial\phi / \partial x^i)(\partial x^i / \partial x'^j)$, mostrando que $\partial\phi / \partial x^i$ é um vetor covariante, as derivadas parciais de tensores não resultam em novos tensores. Considere, por exemplo, um vetor contravariante V'^a; diferenciando em relação a x'^n ambos os membros de sua lei de transformação,

$$V'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j \quad ,$$

obtemos

$$\frac{\partial V'^a}{\partial x'^n} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j \right) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^i \partial x^j} V^j \quad .$$

No 2º membro, o 2º termo impede que $\partial V'^a / \partial x'^n$ se transforme como um tensor de 2ª ordem do tipo ${1 \atop 1}$. Entretanto, eliminando a derivada segunda $\partial^2 x'^a / \partial x^i \partial x^j$ que aparece naquele termo por meio da Eq. (9-5), encontramos

$$\frac{\partial V'^a}{\partial x'^n} = \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial V^j}{\partial x^i}}_{j\to k} + V^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix}'\right]$$

$$= \frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \underbrace{V^j \frac{\partial x'^m}{\partial x^j}}_{V'^m}\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}}_{\delta^l_n}\begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix}'$$

$$= \frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\left[\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\right] - V'^m\begin{Bmatrix} a \\ nm \end{Bmatrix}' \quad ,$$

ou

$$\left[\frac{\partial V'^a}{\partial x'^n} + V'^m\begin{Bmatrix} a \\ nm \end{Bmatrix}'\right] = \frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\left[\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\right] \quad , \tag{10-1}$$

onde vemos que os termos entre colchetes é um tensor de 2ª ordem do tipo $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ (pois se transforma como tal); a expressão desses termos é usada para definir a *derivada covariante do vetor contravariante* V^k (em relação a x^i e com respeito à métrica g_{ij} incorporada nos símbolos de Christoffel) e é denotada de várias maneiras:

$$\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \quad \equiv \quad V^k{}_{;i} \quad \text{ou} \quad \frac{DV^k}{Dx^i} \quad \text{ou} \quad \nabla_i V^k \quad \text{ou} \quad V^k{}_{\|i} \quad ; \tag{10-2}$$

aqui daremos preferência às duas primeiras formas.

A Eq. (10-2) mostra que à derivada parcial $\partial V^k / \partial x^i$ devemos adicionar um termo "corretivo", $V^j \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$ no caso, para obtermos um tensor: a derivada covariante $V^k{}_{;i}$. Veremos que isso vale para qualquer tensor $T^{i\cdots}_{j\cdots}$: $T^{i\cdots}_{j\cdots;n} = \partial T^{i\cdots}_{j\cdots} / \partial x^n$ + termos "corretivos".

Se considerarmos agora um vetor covariante V'_j e diferenciarmos em relação a x'^i a sua lei de transformação, $V'_j = V_a\, \partial x^a / \partial x'^j$, obtemos

$$\frac{\partial V'_j}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^j}V_a\right) = \frac{\partial x^a}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial V_a}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}V_a \quad .$$

Nesta, eliminando a derivada segunda por meio da Eq. (9-4), encontramos

$$\frac{\partial V'_j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial V_a}{\partial x^k} + V_a\left[\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix}\right] \quad ,$$

ou

$$\frac{\partial V'_j}{\partial x'^i} - \underbrace{V_a \frac{\partial x^a}{\partial x'^k}}_{V'_k} \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' = \underbrace{\frac{\partial V'_j}{\partial x'^i} - V'_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}'}_{(*)} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^a}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial V_a}{\partial x^k}}_{a \to m \text{ e } k \to l} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \underbrace{V_a \begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix}}_{a \to k}$$

$$= \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial V_m}{\partial x^l} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j} V_k \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \underbrace{\left[\frac{\partial V_m}{\partial x^l} - V_k \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} \right]}_{(*)} ,$$

onde vemos que os termos marcados por $(*)$ formam um tensor de 2ª ordem do tipo $\substack{0\\2}$; acabamos de justificar a seguinte definição para a *derivada covariante de um vetor covariante*:

$$V_{m;l} \equiv \frac{\partial V_m}{\partial x^l} - V_k \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} . \tag{10-3}$$

A definição de derivada covariante pode ser estendida para qualquer tensor. Podemos entrever como seria a fórmula da derivada covariante de um tensor genérico por simples inspeção das Eqs. (10-2) e (10-3). Mas, para que a indução que conduz à fórmula geral da derivada covariante seja bem compreendida, calculemos a derivada covariante do tensor misto $T_j^{\ i}$ empregando uma vez mais o método como a obtivemos acima para o caso dos vetores contravariantes e covariantes: Derivando a lei de transformação $T'^{a}_j = (\partial x'^a / \partial x^s)(\partial x^b / \partial x'^j) T_b^{\ s}$ em relação a x'^i e usando as Eqs. (9-4) e (9-5) para eliminar as derivadas segundas, obtemos

$$\frac{\partial T'^{a}_j}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j} T_b^{\ s} \right) = \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial T_b^{\ s}}{\partial x^r}}_{(\star)} + T_b^{\ s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^r \partial x^s} + T_b^{\ s}\frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^b}{\partial x'^i \partial x'^j}$$

$$= (\star) + T_b^{\ s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ rs \end{Bmatrix} - \frac{\partial x'^l}{\partial x^r}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix}' \right] + T_b^{\ s}\frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\left[\frac{\partial x^b}{\partial x'^k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} b \\ lm \end{Bmatrix} \right] =$$

$$(\star) + \underbrace{T_b^{\ s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^a}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ rs \end{Bmatrix}}_{k \rightleftarrows s} - \underbrace{T_b^{\ s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}}_{T'^{m}_j}\delta_i^l \begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix}' + \underbrace{T_b^{\ s}\frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^k}}_{T'^{a}_k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' - \underbrace{T_b^{\ s}\frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} b \\ lm \end{Bmatrix}}_{m \rightleftarrows b,\ l \to r}$$

$$= \frac{\partial x'^a}{\partial x^s}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial T_b^{\ s}}{\partial x^r} + T_b^{\ k}\begin{Bmatrix} s \\ rk \end{Bmatrix} - T_m^{\ s}\begin{Bmatrix} m \\ rb \end{Bmatrix} \right) - T'^{m}_j \begin{Bmatrix} a \\ im \end{Bmatrix}' + T'^{a}_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' .$$

Rearranjando os resultados, encontramos

$$\underbrace{\frac{\partial T'^{a}_{j}}{\partial x'^{i}} + T'^{m}_{j}\left\{\begin{matrix} a \\ im \end{matrix}\right\}' - T'^{a}_{k}\left\{\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right\}'}_{(*)} = \frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{b}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{i}}\underbrace{\left(\frac{\partial T_{b}{}^{s}}{\partial x^{r}} + T_{b}{}^{k}\left\{\begin{matrix} s \\ rk \end{matrix}\right\} - T_{m}{}^{s}\left\{\begin{matrix} m \\ rb \end{matrix}\right\}\right)}_{(*)} ,$$

onde vemos que os termos marcados por (∗), um tensor de 3ª ordem do tipo $\frac{1}{2}$, é a derivada covariante desejada:

$$T_{b}{}^{s}{}_{;r} \equiv \frac{\partial T_{b}{}^{s}}{\partial x^{r}} + T_{b}{}^{k}\left\{\begin{matrix} s \\ rk \end{matrix}\right\} - T_{m}{}^{s}\left\{\begin{matrix} m \\ rb \end{matrix}\right\} . \tag{10-4}$$

Agora é fácil escrever a derivada covariante de qualquer tensor; por exemplo:

$$T_{kl}{}^{ij}{}_{;n} = \frac{\partial T_{kl}{}^{ij}}{\partial x^{n}} + T_{kl}{}^{sj}\left\{\begin{matrix} i \\ sn \end{matrix}\right\} + T_{kl}{}^{is}\left\{\begin{matrix} j \\ sn \end{matrix}\right\} - T_{sl}{}^{ij}\left\{\begin{matrix} s \\ kn \end{matrix}\right\} - T_{ks}{}^{ij}\left\{\begin{matrix} s \\ ln \end{matrix}\right\} . \tag{10-5}$$

Caso não se queira deduzir esta fórmula pelo procedimento acima, não é difícil mostrar que a expressão de $T_{kl}{}^{ij}{}_{;n}$ acima se transforma, de fato, como um tensor do tipo que os índices indicam (do tipo $\frac{2}{3}$). A qualificação *covariante* para esse tipo de derivada é justificada pelo fato de ser o resultado dessa diferenciação um tensor com um índice covariante a mais.

A derivada covariante de um escalar $\phi(x)$ em relação a x^{i} é definida simplesmente por $\phi_{;i} \equiv \partial\phi / \partial x^{i}$, já que esta derivada parcial é um tensor (um vetor covariante).

Também não há dificuldades em se verificar que as regras para a diferenciação covariante de somas e produtos de tensores são as mesmas da diferenciação ordinária; observe os seguintes exemplos no caso de produtos:

$$\frac{D(A^{i}{}_{j}\, B^{j}{}_{kl})}{Dx^{n}} = (A^{i}{}_{j}\, B^{j}{}_{kl})_{;n} = A^{i}{}_{j;n}\, B^{j}{}_{kl} + A^{i}{}_{j}\, B^{j}{}_{kl;n} \quad \text{(derivada covariante de produto interno)}$$

$$\frac{D(A^{i}{}_{j}\, B^{k}{}_{lm})}{Dx^{n}} = (A^{i}{}_{j}\, B^{k}{}_{lm})_{;n} = A^{i}{}_{j;n}\, B^{k}{}_{lm} + A^{i}{}_{j}\, B^{k}{}_{lm;n} \quad \text{(derivada covariante de produto externo)}$$

O *teorema de Ricci*, cuja demonstração é deixada para os exercícios (cf. Prob. 40), diz serem nulas as derivadas covariantes do tensor fundamental e dos seus tensores associados:

$$g_{ij;k} = 0 \ ; \qquad g^{ij}{}_{;k} = 0 \ ; \qquad \delta^{i}{}_{j;k} = 0 \ . \tag{10-6}$$

Podemos então dizer que tais tensores "comportam-se como constantes" sob a diferenciação covariante. Isso justifica, por exemplo, abaixar o índice *i* em $T^{i}{}_{j;k}$ como normalmente faríamos — $g_{il}\, T^{i}{}_{j;k} = T_{lj;k}$ —, pois

$$g_{il}\, T^{l}{}_{j;k} = (g_{il}\, T^{l}{}_{j})_{;k} = T_{ij;k} \ . \tag{10-7}$$

Ressalva: Observe pela Eq. (10-5) que os termos "corretivos" a que nos referimos antes (que devem ser adicionados à derivada parcial do tensor para que o resultado seja um tensor) são multiplicações do tensor por símbolos de Christoffel de 2ª espécie. Ora, estes símbolos se anulam num sistema de coordenadas cartesianas: nestas, o tensor métrico é constante [cf. Eq. (6-7)] e a Eq. (8-5) mostra que os símbolos de Christoffel de 1ª espécie devem ser nulos e, por conseguinte, também os de 2ª espécie [cf. Eq. (8-6)]. Portanto, *num sistema de coordenadas cartesianas*, todos aqueles termos "corretivos" são nulos e *a derivada covariante reduz-se à derivada parcial usual*.

Ao ler esta seção, o aluno deve ter ficado intrigado sobre o que tem a derivada covariante a ver com as geodésicas a ponto de esses dois conceitos apresentarem em comum termos tão especiais quanto os símbolos de Christoffel. A razão disso é dada no final da Seç. 11.

b) Derivada covariante de tensores relativos

Deduzimos este tópico de duas maneiras, sendo a segunda delas mais simples, e o estudante com pressa pode pular a primeira, prosseguindo no texto que se inicia logo após a Eq. (10-12) .

Na primeira maneira de deduzir a derivada covariante de tensores relativos, fundamental é a fórmula da derivada parcial do jacobiano $J = |\partial x^i / \partial x'^j|$,

$$\frac{\partial J}{\partial x'^i} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^a} J \quad , \tag{10-8}$$

cuja demonstração é deixada para a seção de exercícios resolvidos (cf. Prob. 46). Eliminando a derivada segunda usando a Eq. (9-4), obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial x'^i} = J \frac{\partial x'^j}{\partial x^a} \left[\frac{\partial x^a}{\partial x'^k} \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \begin{Bmatrix} a \\ lm \end{Bmatrix} \right] = J \left[\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \begin{Bmatrix} a \\ al \end{Bmatrix} \right] , \tag{10-9}$$

equação que será de uso mais direto nas deduções que seguem.

O procedimento é o mesmo que foi usado para tensores absolutos. Comecemos com o caso de um escalar relativo de peso W, $\mathfrak{f}$; diferenciando em relação a x'^i ambos os membros de sua lei de transformação

$$\mathfrak{f}' = J^W \mathfrak{f} \quad ,$$

e usando a Eq. (10-9) para eliminar a derivada do jacobiano, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{f}'}{\partial x'^i} &= W J^{W-1} \mathfrak{f} \frac{\partial J}{\partial x'^i} + J^W \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \\ &= W \mathfrak{f} J^{W-1} J \left[\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \begin{Bmatrix} a \\ al \end{Bmatrix} \right] + J^W \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \\ &= W \underbrace{\mathfrak{f} J^W}_{\mathfrak{f}'} \begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}' - J^W \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} W \mathfrak{f} \begin{Bmatrix} a \\ al \end{Bmatrix} + J^W \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \quad , \end{aligned}$$

ou

$$\left[\frac{\partial f'}{\partial x'^i} - W f' \left\{ \begin{matrix} k \\ ki \end{matrix} \right\}' \right] = J^W \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \left[\frac{\partial f}{\partial x^l} - W f \left\{ \begin{matrix} a \\ al \end{matrix} \right\} \right] ,$$

onde vemos que os termos entre colchetes é um vetor relativo covariante de peso *W* (pois se transforma como tal); a expressão desses termos é usada para definir a *derivada covariante de* f (*um escalar relativo de peso W*):

$$f_{;l} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^l} - W f \left\{ \begin{matrix} s \\ sl \end{matrix} \right\} . \tag{10-10}$$

Considere agora um vetor relativo contravariante de peso *W*, V'^a; diferenciando em relação a x'^n ambos os membros de sua lei de transformação,

$$V'^a = J^W \frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j \quad ,$$

usando a Eq. (10-9) para eliminar a derivada do jacobiano e a Eq. (9-5) para eliminar a derivada segunda que surge, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V'^a}{\partial x'^n} &= W \frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j J^{W-1} \frac{\partial J}{\partial x'^n} + J^W \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j \right) \\
&= W \frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j J^{W-1} J \left[\left\{ \begin{matrix} k \\ kn \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \left\{ \begin{matrix} a \\ al \end{matrix} \right\} \right] + J^W \frac{\partial x'^a}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + J^W \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^i \partial x^j} V^j \\
&= W \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^j} V^j J^W}_{V'^a} \left\{ \begin{matrix} k \\ kn \end{matrix} \right\}' - W \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^j}}_{j \to k} V^j J^W \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \left\{ \begin{matrix} a \\ al \end{matrix} \right\}}_{l \to i} + J^W \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \frac{\partial V^j}{\partial x^i}}_{j \to k} \\
&\qquad + J^W \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} a \\ lm \end{matrix} \right\}' \right] V^j \\
&= W V'^a \left\{ \begin{matrix} k \\ kn \end{matrix} \right\}' - \underbrace{J^W \frac{\partial x'^m}{\partial x^j} V^j}_{V'^m} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}}_{\delta^l_n} \left\{ \begin{matrix} a \\ lm \end{matrix} \right\}' + J^W \frac{\partial x'^a}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \left[\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - W V^k \left\{ \begin{matrix} a \\ ai \end{matrix} \right\} \right]
\end{aligned}$$

ou

$$\left[\frac{\partial V'^a}{\partial x'^n} + V'^m \left\{ \begin{matrix} a \\ mn \end{matrix} \right\}' - W V'^a \left\{ \begin{matrix} k \\ kn \end{matrix} \right\}' \right] = J^W \frac{\partial x'^a}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \left[\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - W V^k \left\{ \begin{matrix} a \\ ai \end{matrix} \right\} \right] ,$$

onde vemos que os termos entre colchetes é um tensor relativo de peso *W* do tipo $^1_1$; ele é usado para definir a *derivada covariante de* V^k (*um vetor relativo contravariante de peso W*):

$$V^k{}_{;i} \equiv \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - W V^k \left\{ \begin{matrix} s \\ si \end{matrix} \right\} . \tag{10-11}$$

Olhando para as fórmulas de derivadas covariantes de tensores relativos deduzidas acima, Eqs. (10-10) e (10-11), vemos que é o seu último termo que as tornam diferentes daquelas referentes a tensores absolutos, sendo portanto fácil a generalização para uma tensor relativo de ordem e tipo qualquer, $\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$:

$$\mathcal{T}_{i\cdots\ ;a}^{j\cdots} \;=\; (\text{termos usuais caso } \mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots} \text{ fosse um tensor}) \;-\; W\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\begin{Bmatrix} s \\ sa \end{Bmatrix} \; . \qquad (10\text{-}12)$$

A segunda maneira, mais simples, de se chegar a essa definição de derivada covariante de tensores relativos baseia-se naquela dada para tensores absolutos. É fácil mostrar que, se $\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$ for um tensor relativo de peso *W*, $T_{i\,\cdots}^{\,j\cdots} \equiv g^{-W/2}\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$ será um tensor absoluto do mesmo tipo (cf. Prob. 22). A derivada covariante deste também será um tensor absoluto, cuja multiplicação por $g^{W/2}$ fornece de volta um tensor relativo de peso *W*. Este é, por definição, a derivada covariante de $\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$:

$$\mathcal{T}_{i\cdots\ ;a}^{j\cdots} \;\equiv\; g^{W/2}\,(\,g^{-W/2}\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\,)_{\,;a} \;\; .$$

Desenvolvendo essa expressão, obtemos o membro direito da Eq. (10-12):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{i\cdots\ ;a}^{j\cdots} \;&=\; g^{W/2}\left[\, \frac{\partial}{\partial x^a}(\,g^{-W/2}\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\,) + \sum\left(g^{-W/2}\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\{\ \}\right)\right] \\
&=\; g^{W/2}\left[-\frac{W}{2}\,g^{-(W/2)-1}\,\frac{\partial g}{\partial x^a}\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots} + g^{-W/2}\left(\frac{\partial \mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}}{\partial x^a} + \sum\left(\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\{\ \}\right)\right)\right] \\
&=\; \underbrace{\frac{\partial \mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}}{\partial x^a} + \sum\left(\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\{\ \}\right)}_{(*)} \;-\; W\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\underbrace{\left(\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^a}\right)}_{(\dagger)} \; ,
\end{aligned}$$

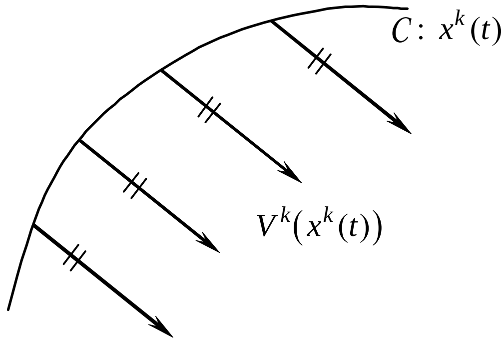
onde marcamos com $(*)$ os termos usuais caso $\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$ fosse um tensor absoluto [obviamente, por $\sum\left(\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}\{\ \}\right)$ denotamos os termos que envolvem os símbolos de Christoffel] e, em vista da Eq. (8-11), podemos identificar o termo assinalado por $(\dagger)$ com $\begin{Bmatrix} s \\ sa \end{Bmatrix}$.

A Eq. (10-11), no caso especial de $W = 1$ (i.e., de uma densidade vetorial contravariante) e com $i = k$, fornece um resultado muito importante:

$$\mathcal{V}^i{}_{;i} = \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial x^i} \quad (\mathcal{V}^i : \text{vetor relativo contravariante de } \underline{\text{peso 1}}) \; . \qquad (10\text{-}13)$$

Esta equação é válida em qualquer sistema de coordenadas; nas cartesianas, em particular, o 2º membro é a divergência do campo formado pelas *N* grandezas $\mathcal{V}^i$, o que justifica dizer que a equação acima define a *divergência covariante de* $\mathcal{V}^i$, um escalar relativo de peso 1 (cf. Prob. 47).

11. Derivada intrínseca ou absoluta



Considere um vetor V^k qualquer num certo ponto de uma curva C dada parametricamente por $x^k(t)$. Tomando em cada ponto da curva um vetor eqüipolente a V^k [i.e., de mesma magnitude e direção[(*)] que V^k] temos o que chamamos de um *campo vetorial eqüipolente ao longo de* C. Se utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas x'^k, os componentes V'^k do campo considerado serão constantes e $dV'^k/dt = 0$. Já num sistema de coordenadas curvilíneas x^k, os componentes V^k desse mesmo campo não satisfazem necessariamente uma equação similar, $dV^k/dt = 0$, pois os componentes em relação a uma base que muda de ponto a ponto (o que caracteriza as coordenadas curvilíneas) certamente variam. Surge assim a questão: em coordenadas genéricas, que equação é satisfeita pelo campo considerado? Na obtenção da resposta constataremos o poder da descrição tensorial.

Primeiramente, observe que a equação $dV'^k/dt = 0$ discutida acima pode ser assim escrita:

$$0 \doteq \frac{dV'^k}{dt} = \frac{\partial V'^k}{\partial x'^j}\frac{dx'^j}{dt} \doteq \underbrace{\frac{DV'^k}{Dx'^j}\frac{dx'^j}{dt}}_{(*)} , \qquad (11\text{-}1)$$

onde, na última passagem, usamos o fato de que, em coordenadas cartesianas, a derivada parcial é igual à derivada covariante (cf. a ressalva feita no final da Seç. 10a). O termo marcado por $(*)$, sendo o produto de dois tensores, é também um tensor, cuja importância garante-lhe nome e notação especial: *derivada intrínseca do vetor* V^k *ao longo da curva* $x^k(t)$ (num sistema genérico de coordenadas), comumente denotada por meio do símbolo δ e sendo encontrada na literatura em várias formas equivalentes:

$$\frac{\delta V^k}{\delta t} \equiv \frac{DV^k}{Dx^j}\frac{dx^j}{dt} = \left[\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} V^i\right]\frac{dx^j}{dt} = \frac{dV^k}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} V^i \frac{dx^j}{dt} , \qquad (11\text{-}2)$$

onde substituímos a expressão da derivada covariante de V^k.

Ora, a Eq. (11-1) diz que $\delta V'^k/\delta t = 0$ (derivada intrínseca nula em coordenadas cartesianas); mas, sendo essa uma equação tensorial, ela vale em qualquer sistema de coordenadas. Reciprocamente, se um campo for tal que $\delta V^k/\delta t = 0$ ao longo de uma curva, essa equação em coordenadas cartesianas x'^k reduz-se à equação $dV'^k/dt = 0$, pela qual concluiremos que se trata de um campo eqüipolente ao longo da curva dada.

Podemos resumir a resposta ao problema posto como segue: *a derivada intrínseca de um campo* V^k *de vetores ao longo da curva* $x^k(t)$ *é nula, i.e.,*

$$\frac{\delta V^k}{\delta t} = 0 , \qquad (11\text{-}3)$$

se e somente se esse campo for eqüipolente ao longo da curva.

(*) Dois vetores têm a mesma *direção* se o ângulo entre eles, segundo a definição dada na Seç. 6d, for nulo.

A derivada intrínseca é facilmente estendida ao caso de um tensor genérico; por exemplo, temos que

$$\frac{\delta T^{ij}{}_{kl}}{\delta t} \equiv \frac{DT^{ij}{}_{kl}}{Dx^m}\frac{dx^m}{dt} \quad . \tag{11-4}$$

Usando a notação da derivada intrínseca, podemos reescrever a equação da geodésica dada pela Eq. (8-7) como segue:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^k}{ds}\right) + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \frac{dV^k}{ds} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} V^i \frac{dx^j}{ds} = \frac{\delta V^k}{\delta s} = 0 \quad ,$$

onde o vetor $V^k \equiv dx^k / ds$ é tangente à geodésica e unitário. *Portanto, a geodésica é a curva ao longo da qual os vetores unitários tangentes formam um campo eqüipolente (i.e. apresentam derivada intrínseca nula).* No espaço tridimensional euclidiano esse fato é óbvio: as geodésicas são linhas retas, cujos vetores unitários tangentes são claramente paralelos. Essa interpretação da equação da geodésica, como sendo uma derivada intrínseca nula, responde à questão levantada ao final da Seç. 10b, a de saber qual relação entre os conceitos de geodésica e derivada covariante explicaria nesses a presença dos símbolos de Christoffel.

12. Formas tensoriais do gradiente, divergência, laplaciano e rotacional

a) Gradiente

Considere a função escalar $\phi(x)$. Definimos *o gradiente de* ϕ *num sistema genérico de coordenadas curvilíneas* x^i *como sendo o vetor covariante*

$$(\text{grad}\,\phi)_i \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \phi_{;i} \tag{12-1}$$

pela simples razão de $\partial\phi / \partial x^i$ ser um tensor (um vetor covariante, como foi dito) que, nas coordenadas cartesianas, coincide com a definição usual do gradiente.

b) Divergência

Definimos a divergência de um campo vetorial contravariante F^i como a seguinte contração de sua derivada covariante:

$$\text{div}\, F^i \equiv F^i{}_{;i} \quad . \tag{12-2}$$

A razão é simples: como a derivada covariante

$$F^i{}_{;j} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} + F^k \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$$

em coordenadas cartesianas torna-se na derivada parcial $\partial F^i / \partial x^j$, então o invariante $F^i{}_{;i}$ nessas coordenadas reduz-se à conhecida fórmula $\text{div}\,\vec{F} = \partial F^i / \partial x^i$. Os componentes contravariantes F^i são usados na definição dada na Eq. (12-2) porque, no caso dos componentes covariantes, $F_{i;i}$ resulta num tensor de 2ª ordem covariante em vez de um escalar, como há de ser o $\text{div}\,\vec{F}$.

Obtemos $\operatorname{div} F_i$, a divergência em termos dos componentes covariantes do vetor, usando a invariância dessa grandeza:

$$\operatorname{div} F_i = \operatorname{div} F^j \quad ; \tag{12-3}$$

logo,

$$\operatorname{div} F_i = \operatorname{div} F^j = F^j{}_{;\,j} = (g^{ij} F_i)_{;\,j} \quad ,$$

ou, lembrando que g^{ij} "comporta-se como uma constante" sob a diferenciação covariante [cf. Eq. (10-7)], obtemos

$$\operatorname{div} F_i = g^{ij} F_{i;\,j} \; . \tag{12-4}$$

Freqüentemente encontramos na literatura a seguinte fórmula para a divergência:

$$\operatorname{div} F^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, F^i \right) \; , \tag{12-5}$$

deduzida na seções de exercícios resolvidos (cf. Prob. 49).

c) <u>Laplaciano</u>

O laplaciano de uma função invariante das coordenadas x^i é definido como sendo o invariante que se obtém calculando a divergência do gradiente de ϕ:

$$\nabla^2 \phi \equiv \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi)_i \quad . \tag{12-6}$$

Podemos desenvolver esta expressão e obter duas fórmulas do laplaciano usadas na literatura física. Primeiramente, usando as Eqs. (12-3) e (12-5), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi)_i = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi)^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\, (\operatorname{grad} \phi)^i \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\, g^{ij} (\operatorname{grad} \phi)_j \right] = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right] \; . \end{aligned} \tag{12-7}$$

De outro modo, usando as Eqs. (12-4) e (10-3), encontramos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi)_i = g^{ij} (\operatorname{grad} \phi)_{i;\,j} = g^{ij} \left[\frac{\partial (\operatorname{grad} \phi)_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} (\operatorname{grad} \phi)_k \right] \\ &= g^{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) - \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right] = g^{ij} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} \right) - \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right] \; . \end{aligned} \tag{12-8}$$

Destaquemos a expressão invariante do laplaciano obtida de passagem acima,

$$\nabla^2 \phi = g^{ij} \phi_{;ij} \quad , \tag{12-9}$$

que também aparece com freqüência na literatura.

d) <u>Rotacional</u>

No espaço euclidiano tridimensional, para um vetor $\vec{V}$ de componentes V_i' nas coordenadas cartesianas x'^i, temos que, se

$$R'_{ij} \equiv \mathcal{E}_{ijk}\,(\nabla' \times \vec{V})_k \quad ,$$

então R'_{23}, R'_{31} e R'_{12} são, respectivamente, os componentes cartesianos do rotacional de $\vec{V}$ ao longo dos eixos x'^1, x'^2 e x'^3, [$R'_{23} = \mathcal{E}_{23k}(\nabla' \times \vec{V})_k = (\nabla' \times \vec{V})_1$, etc], e os demais valores de R'_{ij}, devido à anti-simetria nos índices *l* e *m*, ou são nulos (se *l* = *m*) ou o negativo de um daqueles componentes. Em suma, apenas três valores de R'_{ij} são independentes e são eles os componentes cartesianos de $\nabla' \times \vec{V}$.

Mas, usando a Eq. (B-20) e lembrando que, num sistema cartesiano, as derivadas parciais podem ser substituídas pelas derivadas covariantes, podemos escrever

$$R'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i} V'_j - \frac{\partial}{\partial x'^j} V'_i = V'_{j;\,i} - V'_{i;\,j} \quad .$$

Ora, essa expressão é tensorial. Está assim justificada a definição do *rotacional de um vetor covariante* V_i *num sistema de coordenadas curvilíneas* x'^i *como sendo o tensor covariante de 2ª ordem anti-simétrico* $R_{ij} \equiv V_{j;\,i} - V_{i;\,j}$. Computando essas derivadas covariantes, obtemos

$$R_{ij} = \frac{\partial V_j}{\partial x^i} - V_k \cancel{\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} - V_k \cancel{\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}} \right) \quad ,$$

ou seja, chegamos à seguinte expressão mais simples do rotacional:

$$\text{Rotacional de } V_k = \frac{\partial V_j}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i}{\partial x^j} \quad . \tag{12-10}$$

Observe que, para um vetor *contravariante*, a diferença $V^j{}_{;\,i} - V^i{}_{;\,j}$ de derivadas covariantes *não* é igual à diferença $\partial V^j / \partial x^i - \partial V^i / \partial x^j$ de derivadas parciais.

13. Tensor de curvatura ou de Riemann-Christoffel

Uma condição suficiente para que as derivadas parciais duplas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

sejam iguais é que $f(x, y)$ seja da classe C^2. Embora se admita que componentes de tensores sempre satisfaçam tal condição, isso não garante que uma diferenciação covariante dupla independa da ordem em que cada uma seja calculada. Assim, por exemplo, para um vetor V_a, temos que $V_{a;ij} \neq V_{a;\,ji}$ em geral. Deduzimos em seguida a condição para que a ordem de cálculo da derivada covariante não importe.

Considere a derivada covariante de V_i em relação a x^j,

$$V_{i\,;\,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} V_r \quad ,$$

e a derivada covariante de $V_{i\,;\,j}$ em relação a x^k,

$$V_{i\,;\,jk} = (V_{i\,;\,j})_{;\,k} = \frac{\partial V_{i,\,j}}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} V_{r\,;\,j} - \begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix} V_{i\,;\,r} \quad .$$

Nesta, fazendo a permutação $j \rightleftarrows k$, obtemos

$$V_{i\,;\,kj} = (V_{i\,;\,k})_{;\,j} = \frac{\partial V_{i\,;\,k}}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} V_{r\,;\,k} - \begin{Bmatrix} r \\ kj \end{Bmatrix} V_{i\,;\,r} \quad .$$

A diferença dessas duas últimas equações é

$$V_{i\,;\,jk} - V_{i\,;\,kj} \;=\; \frac{\partial V_{i\,;\,j}}{\partial x^k} - \frac{\partial V_{i\,;\,k}}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} V_{r\,;\,j} + \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} V_{r\,;\,k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} V_s \right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} V_s \right) - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial V_r}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} s \\ rj \end{Bmatrix} V_s \right) + \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial V_r}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} s \\ rk \end{Bmatrix} V_s \right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^k \partial x^j}} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}}{\partial x^k} V_s - \cancel{\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial V_s}{\partial x^k}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^j \partial x^k}} + \frac{\partial \begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix}}{\partial x^j} V_s + \cancel{\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} \frac{\partial V_s}{\partial x^j}}$$

$$- \cancel{\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial x^j}} + \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ rj \end{Bmatrix} V_s + \cancel{\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial x^k}} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ rk \end{Bmatrix} V_s$$

$$= \left[\frac{\partial \begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix}}{\partial x^j} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ rj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ rk \end{Bmatrix} \right] V_s$$

ou, denotando o termo entre parênteses por $R^s{}_{ijk}$, um tensor de 4ª ordem, do tipo $\frac{1}{3}$, segundo a lei do quociente (pois o 1º membro $V_{i\,;\,jk} - V_{i\,;\,kj}$ é um tensor e V_s é um vetor covariante arbitrário),

$$R^s{}_{ijk} \equiv \frac{\partial \begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix}}{\partial x^j} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ rj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ rk \end{Bmatrix} \quad , \tag{13-1}$$

que é o chamado *tensor de curvatura* ou *de Riemann-Christoffel*, encontramos

$$V_{i;jk} - V_{i;kj} = R^{s}{}_{ijk}\, V_s \quad . \tag{13-2}$$

Se tivéssemos iniciado os cálculos com o vetor V^i em vez de V_i teríamos encontrado (cf. Prob. 51)

$$V^{i}{}_{;jk} - V^{i}{}_{;kj} = -R^{i}{}_{sjk}\, V^{s} \quad . \tag{13-3}$$

Por essas duas equações vemos que, ao se diferenciar covariantemente várias vezes um vetor, a ordem em que cada derivada é calculada não será importante se e somente se $R^{s}{}_{ijk} \equiv 0$. Ora, isso acontece num sistema de coordenadas cartesianas, no qual os símbolos de Christoffel se anulam e, por conseguinte, o tensor de curvatura também. Portanto, nos espaços euclidianos, onde coordenadas cartesianas são admitidas, o tensor de curvatura é identicamente nulo (lembre-se de que, se um tensor se anular num sistema particular de coordenadas, ele se anulará em qualquer outro sistema que se adote no espaço em estudo) e a ordem da diferenciação covariante poderá ser invertida. Nos casos de métrica definitivamente positiva, a recíproca também será verdadeira (Sokolnikoff a demonstra): se num certo espaço o tensor de curvatura se anular (um espaço onde a ordem de se diferenciar covariantemente não importa) então esse espaço será euclidiano.

14. Problemas propostos

Propriedades básicas dos tensores, adição e subtração

(1) (Neste exercício empregamos a linguagem e a notação da Análise Vetorial elementar.) Seja $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^3$. Num sistema de coordenadas curvilíneas x^i podemos usar, em cada ponto, as duas bases locais seguintes $\mathrm{B} = \{\vec{T}_i\}$ com $\vec{T}_i = \partial\vec{r}/\partial x^i$ e $\beta = \{\vec{N}^i\}$ e $\vec{N}^i = \nabla x^i$ $(i = 1, 2 \cdots)$. Mostre que, para um campo vetorial $\vec{A}(\vec{r})$, os componentes na base B e os componentes na base β transformam-se contravariantemente e covariantemente, respectivamente.

(2) Mostre que, se A_{ij}^k e B_{ij}^k são tensores, $S(i, j, k) \equiv A_{ij}^k + B_{ij}^k$ e $D(i, j, k) = A_{ij}^k - B_{ij}^k$ também são.

(3) Mostre que, se os componentes de um tensor num sistema de coordenadas

(a) forem nulos, (b) forem iguais,

também o serão em todos os sistemas de coordenadas.

Produto externo

(4) Mostre que a grandeza *T* dada como produto externo dos tensores *U* e *W* é também um tensor e informe qual o seu tipo:

(a) $T(i, j, k, l, m) = U_i^{kl}\, W_j^m$ (b) $T(i, j, k) = U_{ij}\, W_k$

(c) $T(i, j, k, l) = U^{ij}\, W^{kl}$ (d) $T(i, j, k, l) = U_{ij}\, W^{kl}$

Contração

(5) Mostre que a contração do tensor A_i^j é um escalar.

(6) Mostre que o produto interno dos tensores A^i e B_j é um invariante.

(7) Seja A_{ijk}^{lm} um tensor.

(a) Prove que o resultado da contração dos índices *k* e *l* é um tensor e diga de que tipo
(b) Idem, mas agora contraindo tanto *k* e *l* quanto *j* e *m*

Produto interno

(8) Mostre que o produto interno dos tensores A_i^j e B_k^{lm} que resulta da contração dos índices *i* e *m* em seu produto externo é um tensor e diga de que tipo.

(9) Se $G(i, j, k)$ forem grandezas tais que $G(i, j, a)T^{ij}{}_b = 0$ para qualquer tensor $T^{ij}{}_b$, mostre que $G(i, j, k) \equiv 0$.

Tensores simétricos e anti-simétricos

(10) Se $G(i, j, k)$ forem grandezas tais que $G(i, j, a)S_b^{ij} = 0$ para qualquer tensor S_b^{ij} com simetria nos índices *i* e *j*, mostre que não podemos afirmar que $G(i, j, k) \equiv 0$, mas, sim, que a sua

chamada *parte simétrica em relação aos índices i e j* será nula: $G\big((i,j),k\big) \equiv [G(i,j,k)+G(j,i,k)]/2 = 0$.

(11) Se $G(i,j,k)$ forem grandezas tais que $G(i,j,a)A^{ij}_b = 0$ para qualquer tensor A^{ij}_b com anti-simetria nos índices *i* e *j*, mostre que não podemos afirmar que $G(i,j,k) \equiv 0$ mas, sim, que a sua chamada *parte anti-simétrica em relação aos índices i e j* será nula: $G\big([i,j],k\big) \equiv [\,G(i,j,k) - G(j,i,k)\,]/2 = 0$.

(12) Prove que todo tensor de 2ª ordem contravariante ou covariante pode ser expresso como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico.

(13) Mostre que não há tensores anti-simétricos de ordem superior a quatro em quatro dimensões.

Lei do quociente

(14) Num sistema de coordenadas x^i sabe-se que uma grandeza $T(i)$ é tal que $\phi = T(i)U^i$, onde ϕ é um invariante e U^i é um vetor arbitrário. Prove que $T(i)$ é um vetor e diga de que tipo.

(15) Mostre que, se o produto interno $A(i,a)\tau_{aj}$ entre o conjunto de N^2 grandezas $A(i,a)$ e um tensor covariante de 2ª ordem *arbitrário* τ_{aj} for um tensor, então $A(i,a) = A_i^a$, um tensor misto de 2ª ordem.

(16) Sabe-se que uma grandeza $A(i,j,k)$ é tal que $A(i,j,k)U^k{}_{jl} = C^i{}_l$ num sistema de coordenadas x^i, onde $U^k{}_{jl}$ é um tensor arbitrário. Prove que $A(i,j,k)$ é um tensor e diga de que tipo.

(17) Se $G(i,j)$ é tal que $S^{ij}\,G(i,j) = \phi$ (invariante) para qualquer tensor simétrico S^{ij}, explique por que não podemos afirmar que $G(i,j)$ seja um tensor; mostre, entretanto, que a sua *parte simétrica*, $G\big((i,j)\big) = [G(i,j)+G(j,i)]/2$ (definida no Prob. 10), sim, é um tensor G_{ij} simétrico do tipo $\substack{0\\2}$ tal que $S^{ij}\,G_{ij} = \phi$.

(18) Há uma assertiva análoga àquela demonstrada no Prob. 17 para o caso em que, no lugar de S^{ij}, tem-se um tensor anti-simétrico A^{ij} qualquer, quando, então, a parte anti-simétrica de $G(i,j)$ é um tensor. Para estabelecer isso e, ao mesmo tempo, permitir que o estudante observe a possibilidade de se obterem resultados mais genéricos, pede-se, no presente problema, que se explique por que, se $G(i,j,k)$ é tal que $A^{ij}\,G(i,j,k) = V_k$ (vetor covariante) para qualquer tensor anti-simétrico A^{ij}, não podemos afirmar que $G(i,j,k)$ seja um tensor, mostrando, entretanto, que a sua *parte anti-simétrica*, $G\big([i,j],k\big) = [G(i,j,k) - G(j,i,k)]/2$ (definida no Prob. 11), sim, é um tensor G_{ijk} anti-simétrico nos índices *i* e *j* tal que $A^{ij}\,G_{ijk} = V_k$.

Tensores relativos

(19) Sejam $\mathcal{A}^i{}_{jk}$ e $\mathcal{B}^l$ tensores relativos de pesos W_1 e W_2, respectivamente. Mostre que

(a) o produto externo deles é um tensor relativo do tipo $\frac{2}{2}$ e de peso $W_1 + W_2$

(b) o produto interno $\mathcal{A}^i{}_{jk}\,\mathcal{B}^j$ é um tensor relativo do tipo $\frac{1}{1}$ e de peso $W_1 + W_2$

(c) a contração $\mathcal{A}^i{}_{ji}$ é um vetor relativo covariante de peso W_1

(d) $\sqrt{g}\,\mathcal{B}^l$ é um vetor relativo contravariante de peso $W_2 + 1$ (*)

(20) Obtenha as Eqs. (5-2), (5-3) e (5-4).

(21) Prove que os co-fatores $\mathcal{G}^{ij}$ de g_{ij} formam um tensor relativo contravariante de peso 2 (*)

(22) Mostre que, se $\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$ for um tensor relativo de peso W, $T_{i\cdots}^{j\cdots} \equiv g^{-W/2}\,\mathcal{T}_{i\cdots}^{j\cdots}$ será um tensor absoluto do mesmo tipo.

<u>Os tensores fundamentais</u>

(23) Mostre que os coeficientes g_{ij} na métrica [Eq. (6-6)] podem ser sempre definidos de modo que sejam simétricos e assim formar um tensor simétrico do tipo $\frac{0}{2}$.

(24) Através da Eq. (6-10) e tendo em conta que g_{ij} é um tensor do tipo $\frac{0}{2}$ (conforme se provou no Prob. 23), mostre que g^{ij} é um tensor do tipo $\frac{2}{0}$.

(25) Num espaço euclidiano, mostre que

$$\text{(a)}\ g_{ij} = \frac{\partial z_k}{\partial x^i}\frac{\partial z_k}{\partial x^j} \qquad\qquad \text{(b)}\ g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial z_k}\frac{\partial x^j}{\partial z_k}$$

onde x^i são coordenadas curvilíneas e z_k são as coordenadas cartesianas.

(26) Mostre que $R^s{}_{rjk}\,V_s = R_{srjk}\,V^s$ (R e V são arbitrários)

(27) No Exercício 1, mostre que

(a) $\vec{N}^i = g^{ij}\vec{T}_j$ e $\vec{T}_i = g_{ij}\vec{N}^j$

(b) as bases B e β coincidirão se forem normalizadas, isto é, formadas pelos vetores unitários $\vec{e}_i \equiv \vec{T}_i/|\vec{T}_i|$ e $\vec{\varepsilon}^i \equiv \vec{N}_i/|\vec{N}_i|$, respectivamente, e se o sistema de coordenadas for ortogonal.

(28) Mostre que g_{ii} ($i = 1, 2\cdots$, não somados) nunca se anulam.

(29) Mostre que os ângulos θ_{12}, θ_{13} e θ_{23} formados pelas curvas coordenadas de um sistema de coordenadas curvilíneas tridimensional são dados por

$$\cos\theta_{12} = g_{12}/\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\,, \qquad \cos\theta_{13} = g_{13}/\sqrt{g_{11}\,g_{33}}\,, \qquad \cos\theta_{23} = g_{23}/\sqrt{g_{22}\,g_{33}}\quad .$$

(*) Necessário ler antes as Seçs. 6a e 6b.

(*) Necessário ler antes as Seçs. 6a e 6b.

(30) Mostre que os co-senos dos ângulos que o vetor unitário tridimensional u^i faz com as curvas coordenadas são $u_1/\sqrt{g_{11}}$, $u_2/\sqrt{g_{22}}$ e $u_3/\sqrt{g_{33}}$.

(31) Num sistema de coordenadas ortogonais, prove que $g_{ij} = g^{ij} = 0$ se $i \neq j$ e que $g^{ii} = 1/g_{ii}$ (sem somatório).

(32) Mostre que $\partial g/\partial g_{ij} = g\, g^{ij}$

(33) Mostre que $g^{il} g^{jm} \dfrac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} = -\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}$

Equação da linha geodésica

(34) Mostre que as geodésicas num plano são linhas retas.

(35) Mostre que, no espaço bidimensional formado pelos pontos de uma superfície esférica, as geodésicas são arcos de grandes círculos.

Símbolos de Christoffel

(36) No texto obtivemos a seguinte lei de transformação para o símbolo de Christoffel de 2ª espécie:

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} .$$

Mostre que esta equação é equivalente à seguinte:

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} .$$

(37) Mostre que:

(a) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [ki, j] + [kj, i]$ (b) $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{il}\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} - g^{jl}\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix}$ (c) $\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial x^j} = \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix}$

(38) Para i, j e k distintos, $g_{ij}\big|_{i\neq j} = 0$ e com a convenção do somatório suspensa, mostre que

(a) $\begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2g_{ii}}\dfrac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$ (b) $\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2g_{ii}}\dfrac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$ (c) $\begin{Bmatrix} i \\ jj \end{Bmatrix} = -\dfrac{1}{2g_{ii}}\dfrac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}$ (d) $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} = 0$

(39) Num espaço euclidiano, sendo x^i coordenadas curvilíneas e z_i cartesianas, mostre que

(a) $[ij, k] = \dfrac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j}\dfrac{\partial z_s}{\partial x^k}$ e (b) $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} = \dfrac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j}\dfrac{\partial x^k}{\partial z_s}$.

Derivada covariante

(40) Demonstre o *teorema de Ricci*, que diz serem nulas as derivadas covariantes do tensor fun-

damental e dos seus tensores associados:

(a) $g_{ij;k} = 0$ (b) $g^{ij}{}_{;k} = 0$ (c) $\delta^i{}_{j;k} = 0$

(41) Mostre que as derivadas covariantes de vetores contravariantes e covariantes, dadas por

$$V^k{}_{;i} \equiv \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad V_{i;j} \equiv \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - V_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} ,$$

são tensores dos tipos $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ e $\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}$, respectivamente.

(42) Mostre a regra de Leibniz para a derivada covariante nos seguintes casos:

a) $(A^i{}_j\, B^k{}_{lm})_{;n} = A^i{}_{j;n}\, B^k{}_{lm} + A^i{}_j\, B^k{}_{lm;n}$ (derivada covariante de produto externo)

b) $(A^i{}_j\, B^j{}_{kl})_{;n} = A^i{}_{j;n}\, B^j{}_{kl} + A^i{}_j\, B^j{}_{kl;n}$ (derivada covariante de produto interno)

(43) Seja ϕ uma função invariante das coordenadas. Mostre que $\phi_{;ij} = \phi_{;ji}$ (a ordem na qual a derivada covariante de um invariante é calculada não importa).

(44) Mostre que $f_{;i} \equiv \partial f / \partial x^i - W f \begin{Bmatrix} s \\ si \end{Bmatrix}$ é um vetor relativo covariante de peso W, onde f é um escalar relativo de mesmo peso.

(45) Mostre que $(\sqrt{g})_{;i} = g_{;i} = 0$.

(46) Mostre que $\dfrac{\partial J}{\partial x'^i} = \dfrac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j} \dfrac{\partial x'^j}{\partial x^a} J$ (importante na dedução da derivada covariante de tensores relativos):

(47) Mostre que a divergência covariante de um vetor relativo contravariante de peso 1, definida na Eq. (10-13), é um escalar relativo de peso 1.

Gradiente, divergência, laplaciano e rotacional

(48) Mostre que o gradiente de $\phi(x)$ é normal à superfície $\phi(x) = const.$ e calcule o vetor contravariante unitário e normal a essa superfície.

(49) Mostre a fórmula $\operatorname{div} F^i = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, F^i \right)$.

Tensor de curvatura

(50) $g_{si}\, R^s{}_{jkl} = R_{ijkl}$ é o tão-chamado *tensor covariante de curvatura*. Mostre que esse tensor é

(a) anti-simétrico nos índices do primeiro par (ij) e do segundo (kl): $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$

(b) simétrico quanto à troca do primeiro com o segundo par de índices: $R_{ijkl} = R_{klij}$

(51) Mostre a fórmula $V^i{}_{;jk} - V^i{}_{;kj} = -R^i{}_{sjk}\, V^s$.

Cálculos em sistemas de coordenadas específicos

(52) Calcule os tensores fundamentais covariante e contravariante e o determinante métrico para
a) o plano *xy* euclidiano no sistema de coordenadas polares
b) o espaço *xyz* euclidiano nas coordenadas cilíndricas e esféricas

(53) No plano *xy* euclidiano, V_x e V_y são os componentes cartesianos de um vetor. No sistema de coordenadas polares, calcule para esse vetor:
a) os componentes contravariantes V^r e V^θ
b) os componentes covariantes V_r e V_θ
c) os componentes físicos $\overline{V}_r$ e $\overline{V}_\theta$

(54) Verifique se os resultados do Prob. 53 estão de acordo com a equação $V_i = g_{ij} V^j$.

(55) No Prob. 53, substitua $V_x = 2x - y$ e $V_y = 2xy$ e obtenha as expressões de V^r e V^θ bem como as de V_r e V_θ?

(56) Calcule os símbolos de Christoffel de 1ª e 2ª espécie em coordenadas polares:
(a) diretamente da definição desses símbolos
(b) usando o Prob. 39

(57) Usando o Prob. 38, calcule os símbolos de Christoffel de 2ª espécie em coordenadas polares e esféricas.

(58) Calcule $V_{i;j}$ no sistema de coordenadas polares para o vetor descrito no Prob. 55:
(a) diretamente da definição de derivada covariante
(b) mudando as derivadas covariantes calculadas no sistema cartesiano para o sistema polar

(59) Como você definiria a velocidade e a aceleração de uma partícula?

(60) Mostre que a aceleração definida no Prob. 59 é dada por $a^i = \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \dfrac{dx^j}{dt} \dfrac{dx^k}{dt}$.

(61) Expresse no sistema de coordenadas polares a velocidade de uma partícula em movimento no plano *xy*:
a) em termos dos componentes contravariantes
b) em termos dos componentes físicos

(62) O Prob. 61, mas para a aceleração da partícula.

(63) Os Probs. 61 e 62, mas, agora, no sistema de coordenadas esféricas para uma partícula em movimento no espaço.

(64) No plano *xy* euclidiano, considere o campo vetorial de componentes cartesianos $V_x = 0$ e $V_y = y - x$. No sistema de coordenadas polares, calcule a derivada intrínseca desse campo ao longo da reta $y = x + 1$ para mostrar que ela é nula (por quê?).

(65) Calcule os componentes físicos de $\operatorname{grad}\phi$

a) no plano, em coordenadas polares

b) no espaço, em coordenadas esféricas

(66) Exprima $\operatorname{div} F^i$ em termos dos componentes físicos de F^i no sistema de coordenadas esféricas.

(67) Obtenha o laplaciano em coordenadas polares usando $\nabla^2\phi = g^{ij}\,\phi_{;ij}$ com $x^1 = r$ e $x^2 = \theta$.

(68) No sistema de coordenadas esféricas ($x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$), calcule separadamente os dois membros da fórmula no Prob. 38b com $i = 3$ e $j = 2$ e verifique a sua validade.
Sugestão: Use a fórmula deduzida no Prob. 39b

(69) Exprima $\nabla^2\phi$ em coordenadas esféricas usando a fórmula $\nabla^2\phi = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$.

(70) Considere as coordenadas paraboloidais (u, v, φ), cuja lei de transformação para as coordenadas cartesianas (x, y, z) é

$$x = u\,v\cos\varphi\,,\quad y = u\,v\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,\quad z = (u^2 - v^2)/2 \qquad [u \ge 0\,,\ v \ge 0\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi]\ .$$

Trata-se de um sistema *ortogonal* de coordenadas, sendo os fatores de escala dados por

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}\,,\quad h_\varphi = u\,v\ .$$

Obtenha o laplaciano de $\psi(u, v, \varphi)$ usando a mesma fórmula do Prob. 69.

15. Soluções dos problemas propostos

(1)

Note que a base B é formada pelos vetores tangentes às curvas coordenadas e a base β, pelos vetores normais às superfícies coordenadas.

(a) $$\vec{A} = \underbrace{a'^i}_{*}\vec{T}_i{}' = a^j\vec{T}_j = a^j\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^j} = a^j\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \underbrace{\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}a^j}_{*}\,\vec{T}_i{}' \xrightarrow[\text{termos com } *]{\text{igualando os}} a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}a^j$$ (regra contra-variante)

(b) Denotemos por z_i e $\vec{\zeta}_i$ as coordenadas e os versores cartesianos. Abaixo usamos o fato de que, nessas coordenadas, o gradiente de função *f* qualquer é dado por $\nabla f = \vec{\zeta}_i(\partial f/\partial z_i)$.

$$\vec{A} = \alpha_l'\vec{N}'^l = \alpha_l'\nabla x'^l = \underbrace{\alpha_l'\frac{\partial x'^l}{\partial z_k}}_{*}\vec{\zeta}_k = \alpha_j\vec{N}^j = \alpha_j\nabla x^j = \underbrace{\alpha_j\frac{\partial x^j}{\partial z_k}}_{*}\vec{\zeta}_k \xrightarrow[\text{termos com } *]{\text{igualando os}} \alpha_l'\frac{\partial x'^l}{\partial z_k} = \alpha_j\frac{\partial x^j}{\partial z_k}$$

Multiplicando ambos membros por $\partial z^k/\partial x'^i$, obtemos

$$\alpha_l'\underbrace{\frac{\partial x'^l}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x'^i}}_{\delta_i^l} = \alpha_j\underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x'^i}}_{\partial x^j/\partial x'^i} \quad\Rightarrow\quad \alpha_i' = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\alpha_j \ \text{(regra covariante)}$$

(2)

$$S'(i,j,k) = A'^{\,k}_{ij} + B'^{\,k}_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}A^n_{lm} + \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}B^n_{lm}$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\left(A^n_{lm} + B^n_{lm}\right) = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}S(l,m,n) \ ;$$

logo, $S(l,m,n) = S^{\,n}_{lm}$, um tensor do mesmo tipo que A^n_{lm} e B^n_{lm}, pois se transforma como estes.

(3)

(a) $T_k^{\,l\,\cdots}{}_{\cdots} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_i'^{\,j\,\cdots}{}_{\cdots} = \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\cdots\right)\underbrace{T_k^{\,l\,\cdots}{}_{\cdots}}_{0} = 0$. QED.

(b) Sejam T' e U' dois tensores iguais num sistema de coordenadas x', onde, por conseguinte, $D' \equiv T' - U'$ é um tensor nulo. De acordo com o item (a), temos que $D = T - U = 0$ num outro sistema de coordenadas x qualquer, onde, portanto, $T = U$. QED.

(4)

Resolve-se apenas o item (a); os demais são análogos:

$$T'(i,j,k,l,m) = U'^{\,kl}_{\ i}\, W'^{\,m}_{\ j} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^p}\frac{\partial x'^l}{\partial x^q}U^{\,pq}_{n}\frac{\partial x^r}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}W^{\,s}_{r}$$
$$= \frac{\partial x^n}{\partial x'^i}\frac{\partial x^r}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^p}\frac{\partial x'^l}{\partial x^q}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}T(n,r,p,q,s) \ ,$$

mostrando que $T'(i,j,k,l,m) = T'^{\,klm}_{ij}$, um tensor do tipo $\frac{3}{2}$, pois se transforma como tal.

(5)

$$A'^{\,j}_{i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}A^l_k \quad \Rightarrow \quad A'^{\,i}_{i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}A^l_k = \delta^{\,k}_{\,l}\,A^l_k = A^k_k \ ,$$

ou seja, A^k_k é invariante. QED.

(6)

$$A'^{\,i}\,B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k\,\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}B_l = \delta^{\,l}_{\,k}\,A^k\,B_l = A^k\,B_k = \text{ invariante . QED.}$$

(7)

Resolve-se apenas o item (a); os demais são análogos:

$$A'^{\,km}_{ijk} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\underbrace{\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}}_{\delta^q_r}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}A^{rs}_{lpq} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}A^{qs}_{lpq} \ ,$$

mostrando que $A'^{\,km}_{ijk} = A'^{\,m}_{ij}$, um tensor do tipo $\frac{1}{2}$, pois se transforma como tal.

(8)

$$A'^{\,j}_{i}\,B'^{\,li}_{k} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}A^l_k\,\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^l}{\partial x^n}\frac{\partial x'^i}{\partial x^p}B^{np}_{m} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^l}{\partial x^n}\delta^{\,k}_{\,p}\,A^l_k\,B^{np}_{m} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^l}{\partial x^n}A^{\,l}_{\,p}\,B^{np}_{m} \ ,$$

mostrando que $A'^{\,j}_{i}\,B'^{\,li}_{k} \equiv C'^{\,jl}_{\ k}$, um tensor do tipo $\frac{2}{1}$, pois se transforma como tal.

(9)

Se $G(i,j,a)T_b^{ij}=0$ para qualquer T_b^{ij} então, em particular, aquela equação vale para o tensor T_b^{ij} cujos componentes, com exceção dos T_b^{IJ} (com $i=I$ e $j=J$), são todos nulos; logo,

$$G(i,j,a)T_b^{ij}=G(I,J,a)\underbrace{T_b^{IJ}}_{\neq 0}=0 \text{ (sem somatório em } I \text{ e } J\text{)} \quad \Rightarrow \quad G(I,J,a)=0 \quad ,$$

resultado válido para todos *I*, *J*, *a*. QED.

(10)

Não usamos a convenção do somatório neste problema. Temos que

$$\sum_{i,j} G(i,j,a)\,S_b^{ij}=0 \quad .$$

Não podemos concluir por esta equação que $G(i,j,a)$ são todos nulos, por que as grandezas S_b^{ij} não são todas independentes; há a relação de simetria $S_b^{ij}=S_b^{ji}$ entre elas. Devemos então reescrever o somatório com a presença apenas dos componentes S_b^{ij} que sejam independentes:

$$\sum_{j<i} G(i,j,a)\,S_b^{ij}+\Big[G(i,j,a)\,S_b^{ij}\Big]_{j=i}+\underbrace{\sum_{j>i} G(i,j,a)\,S_b^{ij}}_{i\rightleftarrows j}$$

$$=\sum_{j<i} G(i,j,a)\,S_b^{ij}+\Big[G(i,j,a)\,S_b^{ij}\Big]_{j=i}+\sum_{i>j} G(j,i,a)\,S_b^{ji}$$

$$=\sum_{j<i}\big[G(i,j,a)+G(j,i,a)\big]S_b^{ij}+\Big[G(i,j,a)\,S_b^{ij}\Big]_{j=i}=0 \quad .$$

Nesse somatório, todos S_b^{ij} são independentes e arbitrários; logo,

$$G(i,j,a)+G(j,i,a)=0 \ , \text{ i.e., } \ G\big((i,j),k\big)=0 \quad \text{se } j\le i \quad .$$

Esse resultado garante que a parte simétrica de $G(i,j,a)$ é também nula para $j>i$:

$$G\big((i,j),a\big)\Big|_{j>i} \overset{\substack{\text{pela simetria}\\ \text{nos índices } i,j}}{=} G\big((j,i),a\big)\Big|_{j>i}=0 \quad . \text{ QED.}$$

(11)

Não usamos a convenção do somatório neste problema.
Temos que

$$\sum_{i,j} G(i,j,a)\,A_b^{ij}=0 \quad .$$

Não podemos concluir por esta equação que $G(i,j,a)$ são todos nulos, por que as grandezas A_b^{ij} não são todas independentes; há a relação de anti-simetria $A_b^{ij}=-A_b^{ji}$ entre elas. Devemos então reescrever o somatório com a presença apenas dos componentes A_b^{ij} que sejam independentes:

$$\sum_{j<i} G(i,j,a)\,A_b^{ij} + \Big[\, G(i,j,a)\,A_b^{ij} \,\Big]_{j=i} + \underbrace{\sum_{j>i} G(i,j,a)\,A_b^{ij}}_{i \rightleftarrows j}$$

$$= \sum_{j<i} G(i,j,a)\,A_b^{ij} + G(i,i,a)\,\underbrace{A_b^{ii}}_{0} + \sum_{i>j} G(j,i,a)[-A_b^{ij}]$$

$$= \sum_{j<i} \big[\, G(i,j,a) - G(j,i,a) \,\big]\,A_b^{ij} = 0 \quad .$$

Nesse somatório, todos A_b^{ij} são independentes e arbitrários; logo,

$$G(i,j,a) - G(j,i,a) = 0 \ \text{ , i.e., } \ G\big([i,j],k\big) = 0 \quad \text{se } j < i \quad .$$

Esse resultado garante que a parte anti-simétrica de $G(i,j,a)$ também se anula para $j > i$:

$$G\big([i,j],a\big)\Big|_{j>i} \overset{\substack{\text{pela anti-simetria} \\ \text{nos índices } i,j}}{=} -G\big([j,i],a\big)\Big|_{j>i} = 0$$

Por fim, para $i = j$ temos que

$$G\big([i,i],k\big) = \frac{G(i,i,a) - G(i,i,a)}{2} = 0 \quad . \qquad \text{QED.}$$

(12)

Sejam A_{ij} e B^{ij} tensores arbitrários. Suas partes simétricas,

$$A_{(ij)} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} \qquad \text{e} \qquad B^{(ij)} = \frac{B^{ij} + B^{ji}}{2} \quad ,$$

são tensores simétricos e que suas partes anti-simétricas,

$$A_{[ij]} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2} \qquad \text{e} \qquad B^{[ji]} = \frac{B^{ij} - B^{ji}}{2} \quad ,$$

são tensores anti-simétricos, em termos das quais aqueles tensores podem ser decompostos:

$$A_{ij} = A_{(ij)} + A_{[ij]} \qquad \text{e} \qquad B^{ij} = B^{(ij)} + B^{[ij]} \quad . \qquad \text{QED.}$$

(14)

$$T'(i)U'^i = \phi' = \phi = T(i)U^i \ \Rightarrow \ T'(i)\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}U^j = T(j)U^j \ \Rightarrow \ \left[\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}T'(i) - T(j)\right]U^j = 0 \ .$$

Sendo U^j um vetor arbitrário, podemos igualar o termo entre colchetes a zero para obter

$$T(j) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}T'(i) \quad ,$$

que é a lei de transformação do *vetor covariante* $T(j) = T_j$. QED.

(15)

É dado que $A(i,a)\,\tau_{aj} \equiv T_{ij}$, um tensor do tipo $\substack{0\\2}$. Esta equação nas coordenadas curvilíneas x'^i é $A'(i,a)\tau'_{aj} \equiv T'_{ij}$; escrevendo-a com os tensores τ'_{aj} e T'_{ij} transformado para as coordenadas x^i, obtemos

$$A'(i,a)\frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\tau_{bk} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}T_{lk} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}A(l,b)\tau_{bk}$$

$$\Rightarrow \left[A'(i,a)\frac{\partial x^b}{\partial x'^a} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}A(l,b)\right]\underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\tau_{bk}}_{\text{arbitrário}} = 0 \quad\Rightarrow\quad A'(i,a)\frac{\partial x^b}{\partial x'^a} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}A(l,b) = 0$$

$$\overset{\times\,\partial x'^c/\partial x^b}{\Rightarrow} \quad A'(i,a)\underbrace{\frac{\partial x'^c}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial x'^a}}_{\delta^c_a} - \frac{\partial x'^c}{\partial x^b}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}A(l,b) = 0 \quad\Rightarrow\quad A'(i,c) = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^c}{\partial x^b}A(l,b) \ ,$$

mostrando que $A'(i,c) = A'^{c}_{\ i}$, um tensor do tipo $\frac{1}{1}$, pois se transforma como tal. QED.

(16)

$$A(i,j,k)U^{k}_{\ jl} = C^{i}_{\ l} \quad\Rightarrow\quad A'(i,j,k)U'^{k}_{\ jl} = C'^{i}_{\ l} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial x'^l}C^{q}_{\ p}$$

$$\Rightarrow \quad A'(i,j,k)\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^p}{\partial x'^l}U^{n}_{\ mp} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial x'^l}A(q,m,n)U^{n}_{\ mp}$$

$$\Rightarrow \quad \left[A'(i,j,k)\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^q}A(q,m,n)\right]\underbrace{\frac{\partial x^p}{\partial x'^l}U^{n}_{\ mp}}_{\text{arbitrário}} = 0$$

$$\overset{\text{Prob. 9}}{\Rightarrow} \quad A'(i,j,k)\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^q}A(q,m,n) = 0$$

$$\overset{\times\,\partial x^l/\partial x'^i}{\Rightarrow} \quad A'(i,j,k)\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} - \underbrace{\frac{\partial x'^i}{\partial x^q}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}}_{\delta^l_q}A(q,m,n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A(l,m,n) = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}A'(i,j,k) \ ,$$

mostrando que $A(l,m,n) = A^{lm}_{n}$, um tensor do tipo $\frac{2}{1}$, pois se transforma como tal. QED.

(17)

Não podemos aplicar a regra do quociente para afirmar que $G(i,j)$ seja um tensor porque S^{ij}, sendo simétrico, não é um tensor arbitrário. Entretanto, podemos provar a que sua parte simétrica é um tensor do tipo $\frac{0}{2}$ como segue:

$$\phi = S^{ij}\,G(i,j) \overset{i\rightleftarrows j}{=} S^{ji}\,G(j,i) \overset{\substack{\text{pela sime-}\\ \text{tria de } S^{ij}}}{=} S^{ij}\,G(j,i) \quad\Rightarrow\quad \phi + \phi = S^{ij}\,G(i,j) + S^{ij}\,G(j,i)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = S^{ij}\,\frac{G(i,j)+G(j,i)}{2} \quad\Rightarrow\quad \phi = S^{ij}\,G\big((i,j)\big)$$

Provamos agora que $G\big((i,j)\big)$, claramente simétrico, é um tensor do tipo $\substack{0\\2}$:

$$S'^{ij}\,G'\big((i,j)\big)=\phi' \quad\Rightarrow\quad S^{kl}\,\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}G'\big((i,j)\big)=\phi=S^{kl}\,G\big((k,l)\big)$$

$$\Rightarrow\quad S^{kl}\underbrace{\left[G\big((k,l)\big)-\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}G'\big((i,j)\big)\right]}_{\equiv H(k,l)}=0 \qquad (*)$$

Note que $H(k,l)$ é simétrico:

$$H(l,k)=G\big((l,k)\big)-\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}G'\big((i,j)\big)=G\big((k,l)\big)-\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}G'\big((j,i)\big)=H(k,l) \quad .$$

Logo, pelo Prob. 10 , a Eq. $(*)$ acima implica que

$$\frac{H(k,l)+H(l,k)}{2}=H(k,l)=G\big((k,l)\big)-\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}G'\big((i,j)\big)=0 \quad ,$$

mostrando que $G\big((k,l)\big)$ é um tensor covariante de 2ª ordem, pois se transforma como tal.

(18)

Não podemos aplicar a regra do quociente para afirmar que $G(i,j,k)$ seja um tensor porque A^{ij}, sendo anti-simétrico, não é um tensor arbitrário. Entretanto, podemos provar que a sua parte anti-simétrica é um tensor do tipo $\substack{0\\3}$ como segue:

$$V_k = A^{ij}\,G(i,j,k) \overset{i\rightleftarrows j}{=} A^{ji}\,G(j,i,k) \overset{\substack{\text{pela anti-}\\ \text{-simetria de } A^{ij}}}{=} -A^{ij}\,G(j,i,k)$$

$$\Rightarrow\quad 2V_k = A^{ij}\,G(i,j,k)-A^{ij}\,G(j,i,k)$$

$$\Rightarrow\quad V_k = A^{ij}\,\frac{G(i,j,k)-G(j,i,k)}{2} \quad\Rightarrow\quad V_k = A^{ij}\,G\big([i,j],k\big)$$

Provamos agora que $G\big([i,j],k\big)$, claramente anti-simétrico, é um tensor do tipo $\substack{0\\3}$:

$$A'^{ij}\,G'\big([i,j],k\big)=V'_k \quad\Rightarrow\quad A^{lm}\,\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}G'\big([i,j],k\big)=\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}V_a=\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}A^{lm}\,G\big([l,m],a\big)$$

$$\overset{\times\partial x'^k/\partial x^n}{\Rightarrow}\quad A^{lm}\,\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}G'\big([i,j],k\big)=\underbrace{\overbrace{\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^a}{\partial x'^k}}^{\delta_{na}}G\big([l,m],a\big)}_{G([l,m],n)}A^{lm}$$

$$\Rightarrow\quad A^{lm}\underbrace{\left[G\big([l,m],n\big)-\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}G'\big([i,j],k\big)\right]}_{\equiv H(l,m,n)}=0 \qquad (*)$$

Note que $H(l,m,n)$ é anti-simétrico nos índices l e m:

$$H(m,l,n) \;=\; G\big([m,l],n\big) - \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} G'\big([i,j],k\big)$$

$$= -G\big([l,m],n\big) + \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} G'\big([j,i],k\big) \;=\; -\,H(l,m,n)$$

Logo, pelo Prob. 11, a Eq. (∗) acima implica que

$$\frac{H(l,m,n) - H(m,l,n)}{2} = H(l,m,n) = G\big([l,m],n\big) - \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} G'\big([i,j],k\big) = 0 \quad ,$$

mostrando que $G\big([l,m],n\big)$ é um tensor covariante de 3ª ordem, pois se transforma como tal.

(19)

(b)

$$\mathcal{C}'^i{}_k = \big(\mathcal{A}'^i{}_{jk}\big)\big(\mathcal{B}'^j\big) = \left(J^{W_1}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\mathcal{A}^l{}_{mn}\right)\left(J^{W_2}\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\mathcal{B}^p\right) = J^{W_1+W_2}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\delta^m_p\mathcal{A}^l{}_{mn}\mathcal{B}^p$$

$$= J^{W_1+W_2}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\mathcal{A}^l{}_{pn}\mathcal{B}^p = J^{W_1+W_2}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\mathcal{C}^l{}_n \quad ,$$

que é a lei de transformação de um tensor relativo do tipo $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ e peso $W_1 + W_2$. QED.

(d)

Pelas leis de transformação de g e $\mathcal{B}^l$, dadas pelas Eqs. (6-15) e (5-1), temos que

$$(\sqrt{g'}\,\mathcal{B}'^m) = (J^2 g)^{1/2}\, J^{W_2}\mathcal{B}^l\,\frac{\partial x'^m}{\partial x^l} = J^{W_2+1}(\sqrt{g}\,\mathcal{B}^l)\frac{\partial x'^m}{\partial x^l} \quad ,$$

ou seja, $\sqrt{g}\,\mathcal{B}^l$ é um vetor relativo contravariante de peso $W_2 + 1$, pois se transforma como tal.

(20)

Denotando elementos de matrizes jacobianas pela notação $\partial x^i / \partial x'^k \equiv J_{ik}$ e $\partial x'^i / \partial x^k \equiv J'_{ik}$, temos que $|J_{ik}| = J$, $|J'_{ik}| = J' = J^{-1}$ e que

$$T'_{ij} = J_{ki}\, J_{lj}\, T_{kl} = \tilde{J}_{ik}\, T_{kl}\, J_{lj} \qquad \Rightarrow \qquad |T'_{ij}| = \underbrace{|\tilde{J}_{ik}|}_{J}\,|T_{kl}|\,\underbrace{|J_{lj}|}_{J} = J^2\,|T_{kl}| \quad ■$$

$$U'^{ij} = J'_{ik}\, J'_{jl}\, U^{kl} = J'_{ik}\, U^{kl}\, \tilde{J}'_{lj} \qquad \Rightarrow \qquad |U'^{ij}| = \underbrace{|J'_{ik}|}_{J^{-1}}\,|U^{kl}|\,\underbrace{|\tilde{J}'_{lj}|}_{J^{-1}} = J^{-2}\,|U^{kl}| \quad ■$$

$$W_i'^j = J'_{jl}\, W_k^l\, J_{ki} = \qquad \Rightarrow \qquad |W_i'^j| = \underbrace{|J'_{jl}|}_{J^{-1}}\,|W_k^l|\,\underbrace{|J_{ki}|}_{J} = |W_k^l| \quad ■$$

(21)

No texto já vimos que g é um escalar relativo de peso 2. Assim, temos que

$$\mathcal{G}^{ij} = g\, g^{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}'^{ij} = g'\, g'^{ij} = \Big[\, J^2 g \,\Big]\left[\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\right] g^{kl} = J^2\,\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\mathcal{G}^{kl} \quad ,$$

que é a lei de transformação de um tensor relativo contravariante de peso 2. QED.

(22)

Usando as leis de transformação de g e $\mathcal{T}_{i\cdots}^{\,j\cdots}$, dadas pelas Eqs. (6-15) e (5-1), temos que

$$
\begin{aligned}
T'^{\;j\cdots}_{\cdot i\cdot} &\equiv g'^{-W/2}\,\mathcal{T}'^{\;j\cdots}_{i\cdots} = (J^2 g)^{-W/2}\,J^W \mathcal{T}_{k\cdots}^{\;l\cdots}\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\cdots = g^{-W/2}\,\mathcal{T}_{k\cdots}^{\;l\cdots}\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\cdots \\
&= T_{k\cdots}^{\;l\cdots}\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\cdots \quad ,
\end{aligned}
$$

ou seja, $T_{i\cdots}^{\;j\cdots}$ é um tensor absoluto, pois se transforma como tal, e do mesmo tipo de $\mathcal{T}_{i\cdots}^{\,j\cdots}$.

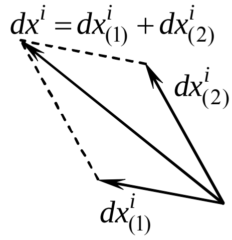
(23)

Temos que

$$
ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ji}\,dx^j dx^i \;\Rightarrow\; 2\,ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j + g_{ji}\,dx^i dx^j \;\Rightarrow\; ds^2 = \frac{g_{ij}+g_{ji}}{2}\,dx^i dx^j \quad ,
$$

mostrando que, se a matriz g_{ij} não for originalmente simétrica, podemos tomar os coeficientes na métrica como sendo os da parte simétrica daquela matriz, $g_{(ij)}$, uma matriz claramente simétrica.

Assim sendo, considere a métrica $ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$ com coeficientes simétricos. Note que não podemos usar o Prob. 17 para afirmar que g_{ij} seja um *tensor* simétrico do tipo $\binom{0}{2}$, pois $S^{ij} \equiv dx^i dx^j$ não é um tensor simétrico *arbitrário*, uma vez que dx^i e dx^j são componentes de um mesmo vetor contravariante. Mas, sendo dx^i um deslocamento infinitesimal arbitrário, podemos tomá-lo como a soma de dois deslocamentos infinitesimais, $dx^i_{(1)}$ e $dx^i_{(2)}$ (figura à direita), aos quais associamos as distâncias quadráticas infinitesimais $ds^2_{(1)} = g_{ij}\,dx^i_{(1)}\,dx^j_{(1)}$ e $ds^2_{(2)} = g_{ij}\,dx^i_{(2)}\,dx^j_{(2)}$. A distância quadrática infinitesimal associada a dx^i é, então, dada por



$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ij}\,[dx^i_{(1)} + dx^i_{(2)}][dx^j_{(1)} + dx^j_{(2)}] \\
&= g_{ij}\,dx^i_{(1)}\,dx^j_{(1)} + g_{ij}\,dx^i_{(2)}\,dx^j_{(2)} + g_{ij}\,dx^i_{(1)}\,dx^j_{(2)} + g_{ij}\,dx^i_{(2)}\,dx^j_{(1)} \\
&= ds^2_{(1)} + ds^2_{(2)} + 2\,g_{ij}\,dx^i_{(1)}\,dx^j_{(2)} \quad ,
\end{aligned}
$$

ou

$$
g_{ij}\,S^{ij} = ds^2 - ds^2_{(1)} - ds^2_{(2)} = \text{ invariante } \quad ,
$$

onde $S^{ij} \equiv 2\,dx^i_{(1)}\,dx^j_{(2)}$, um tensor simétrico arbitrário; logo, pelo Prob. 17, temos que g_{ij} é um tensor simétrico do tipo $\binom{0}{2}$. QED.

(24)

$$g'^{ip} g'_{pm} = \delta^i_m \;\to\; g'^{ip} \frac{\partial x^r}{\partial x'^p}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m} g_{rs} = \delta^i_m \xrightarrow{\times\, \partial x'^m/\partial x^k} g'^{ip}\frac{\partial x^r}{\partial x'^p}\underbrace{\delta^s_k\, g_{rs}}_{g_{rk}} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \xrightarrow{\times\, g^{kl}}$$

$$g'^{ip}\underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial x'^p}\overbrace{g_{rk}\, g^{kl}}^{\delta^l_r}}_{\partial x^l/\partial x'^p} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} g^{kl} \xrightarrow{\times\, \partial x'^j/\partial x^l} g'^{ip}\underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}}_{\delta^j_p} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl} \to g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl} \quad \blacksquare$$

(25)

(a) $ds^2 = dz_k dz_k = \dfrac{\partial z_k}{\partial x^i} dx^i \dfrac{\partial z_k}{\partial x^j} dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$ com $g_{ij} = \dfrac{\partial z_k}{\partial x^i}\dfrac{\partial z_k}{\partial x^j}$ ■

(b) $$g^{si} g_{sj} = g^{si}\frac{\partial z_m}{\partial x^s}\frac{\partial z_m}{\partial x^j} = \delta^i_j \;\Rightarrow\; g^{si}\frac{\partial z_m}{\partial x^s}\underbrace{\frac{\partial z_m}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z_k}}_{\delta_{mk}} = \delta^i_j \frac{\partial x^j}{\partial z_k} \;\Rightarrow\; g^{si}\frac{\partial z_k}{\partial x^s} = \frac{\partial x^i}{\partial z_k}$$

$$\Rightarrow\; g^{si}\underbrace{\frac{\partial z_k}{\partial x^s}\frac{\partial x^j}{\partial z_k}}_{\delta^j_s} = \frac{\partial x^i}{\partial z_k}\frac{\partial x^j}{\partial z_k} \;\Rightarrow\; g^{ji} = \frac{\partial x^i}{\partial z_k}\frac{\partial x^j}{\partial z_k} \quad \blacksquare$$

(26)

$$R^s{}_{rjk} V_s = g^{sa} R_{arjk}\, g_{sb} V^b = R_{arjk} V^b \delta^a_b = R_{arjk} V^a = R_{srjk} V^s$$

(27)

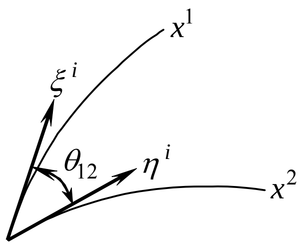
$\vec{N}^i = \nabla x^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial z_k}\vec{\zeta}_k = \dfrac{\partial x^i}{\partial z_k}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z_k} = \dfrac{\partial x^i}{\partial z_k}\dfrac{\partial x^j}{\partial z_k}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} = g^{ij}\vec{T}_j$ ■ (onde usamos o Prob. 25b)

Usando esse resultado, podemos escrever $g_{ij}\vec{N}^j = g_{ij} g^{jk}\vec{T}_k = \delta^k_i \vec{T}_k = \vec{T}_i$ ■

(28)

Da fórmula $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ deduzimos que o elemento de comprimento de arco ao longo da curva de $x^1 \equiv ds_{(1)} = \sqrt{g_{11}(dx^1)^2} = \sqrt{g_{11}}\, dx^1 \neq 0 \;\Rightarrow\; g_{11} \neq 0$. De modo análogo mostramos que $g_{22} \neq 0$, etc. QED.

(29)



Sejam ξ^i e η^i vetores unitários tangentes ao longo das curvas de x^1 e x^2, respectivamente (v. figura). O vetor dx^i/ds é, por definição, tangente a uma curva $x^i(s)$ e também é unitário, pois

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^i}{ds} = \frac{g_{ij}\, dx^i dx^j}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \quad ;$$

logo, temos que

$$\xi^1 = \frac{dx^1}{ds}, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = 0 \; ; \qquad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = \frac{dx^2}{ds}, \quad \eta^3 = 0 \; .$$

Calculamos ξ^1 e η^2 como segue:

$$\begin{cases} \xi^i \xi_i = g_{ij}\xi^i \xi^j = g_{11}\xi^1\xi^1 = g_{11}(\xi^1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \xi^1 = 1/\sqrt{g_{11}} \\ \eta^i \eta_i = g_{ij}\eta^i \eta^j = g_{22}\eta^2\eta^2 = g_{22}(\eta^2)^2 = 1 \Rightarrow \; \eta^2 = 1/\sqrt{g_{22}} \end{cases}$$

Portanto,

$$\cos\theta_{12} = \xi^i \eta_i = g_{ij}\xi^i \eta^j = g_{12}\xi^1\eta^2 = g_{12}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \; .$$

De modo análogo calculamos $\cos\theta_{13}$ e $\cos\theta_{23}$. QED.

(30)

Vimos no Prob. 29 que o vetor ξ^i unitário e tangente à curva de x^1 é $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (1/\sqrt{g_{11}}, 0, 0)$; logo, o co-seno do ângulo entre ξ^i e u^i é $u_i \xi^i = u_1 \xi^1 = u_1 / \sqrt{g_{11}}$. De modo análogo mostramos os outros resultados. QED.

(31)

Basta fazer $\theta_{ij}\big|_{i\neq j} = \pi/2$ no Prob. 29 para imediatamente obter $g_{ij}\big|_{i\neq j} = 0$.

Os outros resultados são obtidos como segue (sem empregar a convenção do somatório):

$$\sum_k g^{jk} \underbrace{g_{ik}}_{0 \text{ se } k\neq i} = \delta_i^j \;\Rightarrow\; g^{ji} g_{ii} = \delta_i^j \;\Rightarrow\; g^{ji} = \frac{\delta_i^j}{g_{ii}} \;\Rightarrow\; g^{ji} = \begin{cases} 1/g_{ii} & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

(32)

$$g = \sum_k g_{ik} G^{ik} \;\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial g_{ik}}{\partial g_{ij}}}_{\delta_k^j} G^{ik} + g_{ik} \underbrace{\frac{\partial G^{ik}}{\partial g_{ij}}}_{0\,(*)} \right) = G^{ij} = g\, g^{ij} \;.\; \text{QED}$$

(*) $\partial G^{ik}/\partial g_{ij} = 0$, pois G^{ik} não contém explicitamente qualquer g_{ab} com $a = i$ ou $b = k$ [lembre-se de que, no cálculo de G^{ik}, a linha *i* e a coluna *k* são eliminadas do determinante de (g_{ij})].

(33)

$$g^{il} g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\underbrace{g^{il} g^{jm} g_{lm}}_{g^{ij}}) - \frac{\partial g^{il}}{\partial x^k} \underbrace{g^{jm} g_{lm}}_{\delta_l^j} - \frac{\partial g^{jm}}{\partial x^k} \underbrace{g^{il} g_{lm}}_{\delta_m^i} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^{ji}}{\partial x^k} = -\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \quad \blacksquare$$

(34)

A equação da geodésica [Eq. (8-7)], nas coordenadas cartesianas no plano, $(x^1, x^2) = (x, y)$, torna-se em

$$d^2x/ds^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad d^2y/ds^2 = 0 \quad ,$$

pois os símbolos de Christoffel são nulos em tais coordenadas; logo, temos

$$x = c_1 s + c_2 \qquad \text{e} \qquad y = d_1 s + d_2 \quad ,$$

que são conhecidamente as equações paramétricas (parâmetro s) de uma reta no plano xy.

(35)

Este problema é usado para exemplificar algumas técnicas descritas no Ap. C, onde, nas Seçs. (a) e (b), é mostrado de duas maneiras que as geodésicas estão ao longo dos grandes círculos

(36)

Basta mostrar que os segundos termos nos membros direitos das duas equações são iguais; isto é, que

$$-\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^m \partial x^n} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \quad .$$

Obtemos esse resultado por simples operações diferenciais:

$$\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^j}\overbrace{\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\right)}^{\delta_i^k}}_{0} - \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\right) = -\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \quad . \text{ QED}$$

(37)

(a) $$[ki, j] + [kj, i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \cancel{\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}} - \cancel{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \cancel{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}} - \cancel{\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad \blacksquare$$

(b) $$-g^{il}\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} - g^{jl}\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} = -g^{il}g^{jm}[kl,m] - \underbrace{g^{jl}g^{im}[kl,m]}_{l \rightleftarrows m} = -g^{il}g^{jm}\big([kl,m] + [km,l]\big)$$

$$\overset{(*)}{=} -g^{il}g^{jm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \overset{(\dagger)}{=} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \quad \blacksquare$$

Acima, usamos o item (a) na passagem $(*)$ e o Prob. 33 na passagem $(\dagger)$.

(c) $$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2g}\, g\, g^{ik}\big([ji,k] + [jk,i]\big)$$

$$= \frac{1}{2} g^{ik} \left([ji,k] + [jk,i] \right) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ ji \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} k \\ jk \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} \quad \blacksquare$$

Na passagem $(*)$ usamos os Probs. 32 e 37a.

(38)

Neste Prob. 38, a convenção do somatório é suspensa.

Primeiramente, note que, sendo $1 = \sum_s g^{is} g_{is} = g_{ii} g^{ii}$, então $g^{ii} = 1/g_{ii}$. Assim, temos:

(a) $$\left\{ \begin{matrix} i \\ ii \end{matrix} \right\} = \sum_s g^{is} [ii,s] = \sum_s g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^s} \right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} = \frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \quad \blacksquare$$

(b) $$\left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} = \sum_s g^{is} [ij,s] = \sum_s g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} = \frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \quad \blacksquare$$

(c) $$\left\{ \begin{matrix} i \\ jj \end{matrix} \right\} = \sum_s g^{is} [jj,s] = \sum_s g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^s} \right) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \quad \blacksquare$$

Nas passagens $(*)$ acima, há de se lembrar que $i \neq j$ e que $g^{is}\big|_{s \neq i} = g_{is}\big|_{s \neq i} = 0$.

(39)

a) Basta usar o Prob. 25a:

$$[ij,k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial z_s}{\partial x^j} \frac{\partial z_s}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial z_s}{\partial x^i} \frac{\partial z_s}{\partial x^k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial z_s}{\partial x^i} \frac{\partial z_s}{\partial x^j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial z_s}{\partial x^k} + \cancel{\frac{1}{2} \frac{\partial z_s}{\partial x^j} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^k}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial z_s}{\partial x^k} + \cancel{\frac{1}{2} \frac{\partial z_s}{\partial x^i} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^j \partial x^k}} - \cancel{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial z_s}{\partial x^j}} - \cancel{\frac{1}{2} \frac{\partial z_s}{\partial x^i} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^k \partial x^j}}$$

$$= \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial z_s}{\partial x^k} \quad \blacksquare$$

b) Agora usamos o item (a) e o Prob. 25b:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{kl} [ij,l] = \frac{\partial x^k}{\partial z_r} \frac{\partial x^l}{\partial z_r} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial z_s}{\partial x^l} = \frac{\partial x^k}{\partial z_r} \delta_r^s \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial z_s} \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j} \quad \blacksquare$$

(40)

(a) $$g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{sj} \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\} - g_{is} \left\{ \begin{matrix} s \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \underbrace{g_{sj} g^{sl}}_{\delta_j^l} [ik,l] - \underbrace{g_{is} g^{sl}}_{\delta_i^l} [jk,l]$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \underbrace{\left([ik,j] + [jk,i] \right)}_{\partial g_{ij} / \partial x^k \ (*)} = 0 \quad \blacksquare$$

[(*)pelo resultado do Prob. 37a]

(b) $$g^{ij}{}_{;k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \underbrace{g^{sj}\begin{Bmatrix} i \\ ks \end{Bmatrix} + g^{is}\begin{Bmatrix} j \\ ks \end{Bmatrix}}_{-\partial g^{ji}/\partial x^k\ (\dagger)} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^{ji}}{\partial x^k} = 0 \ \blacksquare$$ [(†)pelo resultado do Prob. 37b]

(c) $$\delta^i_{j;k} = \frac{\partial \delta^i_j}{\partial x^k} + \delta^s_j\begin{Bmatrix} i \\ ks \end{Bmatrix} - \delta^i_s\begin{Bmatrix} s \\ jk \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} = 0 \ \blacksquare$$

---

(41)

Substituindo na equação

$$V'^k{}_{;i} \equiv \frac{\partial V'^k}{\partial x'^i} + V'^j\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}'$$

as leis de transformação do símbolo de Christoffel de 2ª espécie [a que é dada pela *segunda* equação no Prob. 36] e do vetor contravariante, obtemos

$$\begin{aligned}
V'^k{}_{;i} &= \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^a}V^a\right) + \frac{\partial x'^j}{\partial x^a}V^a\left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n}\right] \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}V^n\right) + V^a\delta^m_a\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} - V^a\delta^n_a\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} \\
&= \cancel{\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^l \partial x^n}}V^n + \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial V^n}{\partial x^l} + V^m\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} - V^n\cancel{\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n}} \\
&= \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial V^n}{\partial x^l} + V^m\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix}\right) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}V^n{}_{,l} \quad ,
\end{aligned}$$

mostrando que $V^n{}_{;l}$ é, de fato, um tensor do tipo $\substack{1\\1}$.

Agora, substituindo na equação

$$V'_{i;j} \equiv \frac{\partial V'_i}{\partial x'^j} - V'_k\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}'$$

as leis de transformação do símbolo de Christoffel de 2ª espécie [a que é dada pela primeira equação no Prob. 36] e do vetor contravariante, obtemos

$$\begin{aligned}
V'_{i;j} &= \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^i}V_a\right) - \frac{\partial x^a}{\partial x'^k}V_a\left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\right] \\
&= \cancel{\frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}}V_a + \frac{\partial x^a}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial V_a}{\partial x^m} - V_a\delta^a_n\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} - \cancel{V_a\delta^a_m\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}} \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial V_l}{\partial x^m} - V_n\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix}\right) = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}V_{l,m} \quad ,
\end{aligned}$$

mostrando que $V_{l;m}$ é, de fato, um tensor do tipo $\substack{0\\2}$. QED.

(42)

Item (a)

$$\overbrace{(A^i{}_j B^k{}_{lm})}^{\equiv T^i{}_j{}^k{}_{lm}}{}_{;n} = T^i{}_j{}^k{}_{lm\,;n} = \frac{\partial T^i{}_j{}^k{}_{lm}}{\partial x^n} + T^s{}_j{}^k{}_{lm}\left\{ {i \atop sn} \right\}$$

$$+ T^i{}_j{}^s{}_{lm}\left\{ {k \atop sn} \right\} - T^i{}_s{}^k{}_{lm}\left\{ {s \atop jn} \right\} - T^i{}_j{}^k{}_{sm}\left\{ {s \atop ln} \right\} - T^i{}_j{}^k{}_{ls}\left\{ {s \atop mn} \right\}$$

$$= \frac{\partial A^i{}_j}{\partial x^n} B^k{}_{lm} + A^i{}_j \frac{\partial B^k{}_{lm}}{\partial x^n} + A^s{}_j B^k{}_{lm}\left\{ {i \atop sn} \right\} + A^i{}_j B^s{}_{lm}\left\{ {k \atop sn} \right\}$$

$$- A^i{}_s B^k{}_{lm}\left\{ {s \atop jn} \right\} - A^i{}_j B^k{}_{sm}\left\{ {s \atop ln} \right\} - A^i{}_j B^k{}_{ls}\left\{ {s \atop mn} \right\}$$

$$= \left(\frac{\partial A^i{}_j}{\partial x^n} + A^s{}_j\left\{ {i \atop sn} \right\} - A^i{}_s\left\{ {s \atop jn} \right\} \right) B^k{}_{lm} + A^i{}_j \left(\frac{\partial B^k{}_{lm}}{\partial x^n} + B^s{}_{lm}\left\{ {k \atop sn} \right\} - B^k{}_{sm}\left\{ {s \atop ln} \right\} - B^k{}_{ls}\left\{ {s \atop mn} \right\} \right)$$

$$= A^i{}_{j\,;n} B^k_{l\,m} + A^i{}_j B^k_{l\,m\,;n} \ . \qquad \text{QED.}$$

Item (b): Usando o teorema de Ricci e o item (a), temos:

$$\left(A^i{}_j B^j{}_{kl}\right)_{;n} = \left(A^i{}_j B^m{}_{kl}\,\delta^j_m\right)_{;n} = \delta^j_m \left(A^i{}_j B^m{}_{kl}\right)_{;n} = \delta^j_m \left(A^i{}_{j\,;n} B^m{}_{kl} + A^i{}_j B^m{}_{kl\,;n}\right) =$$

$$= A^i{}_{j\,;n} B^j{}_{kl} + A^i{}_j B^j{}_{kl\,;n} \ . \quad \text{QED.}$$

(43)

$$\phi_{;ij} = \frac{\partial \phi_{;i}}{\partial x^j} - \phi_{;s}\left\{ {s \atop ij} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \phi_{;s}\left\{ {s \atop ij} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \phi_{;s}\left\{ {s \atop ij} \right\} = \frac{\partial \phi_{;j}}{\partial x^i} - \phi_{;s}\left\{ {s \atop ij} \right\} = \phi_{;ji} \quad \blacksquare$$

(44)

$$f'_{;i} = \frac{\partial f'}{\partial x'^i} - W f' \left\{ {s \atop si} \right\}' = \frac{\partial (J^W f)}{\partial x'^i} - W J^W f \left[\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\left\{ {n \atop lm} \right\} + \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \right]$$

$$= W J^{W-1}\frac{\partial J}{\partial x'^i} f + J^W \frac{\partial f}{\partial x'^i} - W J^W f \left[\delta^m_n \left\{ {n \atop lm} \right\} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} + \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j} \right]$$

$$= \cancel{W J^{W-1} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}} J f + J^W \frac{\partial f}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} - W J^W f \left\{ {m \atop lm} \right\} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} - \cancel{W J^W f \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}}$$

$$= J^W \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x^l} - W f \left\{ {m \atop lm} \right\} \right]}_{f_{;l}} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} = J^W f_{;l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \ . \qquad \text{QED.}$$

(45)

$$\left(\sqrt{g}\right)_{;i} \overset{\substack{\text{Eq. (10.10)}\\ \text{com } W=1}}{=} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} - \sqrt{g}\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix} \overset{\text{Prob.37c}}{=} \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial x^i} - \sqrt{g}\,\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i} = 0 \;\blacksquare$$

$$g_{;i} \overset{\substack{\text{Eq. (10.10)}\\ \text{com } W=2}}{=} \frac{\partial g}{\partial x^i} - 2g\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix} \overset{\text{Prob. 37c}}{=} \frac{\partial g}{\partial x^i} - 2g\,\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i} = 0 \;\blacksquare$$

(46)

Seja $J = |J_{ij}|$, onde $J_{ij} \equiv \partial x^i / \partial x'^j$, e seja $\mathcal{J}_{ij}$ o co-fator de J_{ij} em J; considere também os elementos $J'_{ij} \equiv \partial x'^i / \partial x^j$. Lembrando que J é função dos elementos J_{aj}, temos que

$$\frac{\partial J}{\partial x'^i} = \frac{\partial J}{\partial J_{aj}}\frac{\partial J_{aj}}{\partial x'^i} = \mathcal{J}_{aj}\,\frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^j}\right) \;,$$

onde usamos o Prob. 32 (válido, obviamente, para qualquer matriz). Usando agora a Eq. **(6-8)** (válida também para qualquer matriz), podemos calcular $\mathcal{J}_{aj}$ como segue:

$$J_{ik}\,\mathcal{J}_{ak} = J\,\delta_{ia} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{J'_{ji}\,J_{ik}}_{\delta_{jk}}\,\mathcal{J}_{ak} = J'_{ji}\,\delta_{ia}\,J \quad\Rightarrow\quad \mathcal{J}_{aj} = J'_{ja}\,J = \frac{\partial x'^j}{\partial x^a}J \quad .$$

Logo, substituindo esse resultado na equação anterior, obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial x'^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^a}J\,\frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^j}\right) = \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^a}J \quad \text{. QED.}$$

(47)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'^i{}_{;i} &= \frac{\partial \mathcal{V}'^i}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(J\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\mathcal{V}^j\right) = \frac{\partial J}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\mathcal{V}^j + J\underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)}_{(*)}\mathcal{V}^j + J\underbrace{\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial x'^i}}_{\partial\mathcal{V}^j/\partial x^j} \\ &= \frac{\partial J}{\partial x^j}\mathcal{V}^j + J\underbrace{\left(-J^{-1}\frac{\partial J}{\partial x^j}\right)}_{(*)}\mathcal{V}^j + J\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial x^i} = J\,\mathcal{V}^i{}_{;i} \;\blacksquare \end{aligned}$$

A igualdade dos termos marcado ($*$) acima é estabelecida com o auxílio da Eq. (10-8) e da equação $J'J = 1$ como segue:

$$\frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) = \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}J'\right)J = \left(\frac{\partial J'}{\partial x^j}\right)J = \frac{\partial J^{-1}}{\partial x^j}J = -J^{-2}\frac{\partial J}{\partial x^j}J = -J^{-1}\frac{\partial J}{\partial x^j} \quad .$$

(48)

Seja $x^i(t,u)$ uma parametrização da superfície $\mathcal{S}$ dada por $\phi(x) = const$. Os vetores $\xi^i \equiv \partial x^i / \partial t$ e $\eta^i \equiv \partial x^i / \partial u$ são tangentes a $\mathcal{S}$. Devemos provar que $\operatorname{grad}\phi$ é ortogonal a ξ^i e η^i:

$$\phi[x^i(t,u)] = const. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^i}{\partial t} = (\text{grad}\,\phi)_i\,\xi^i = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial u} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^i}{\partial u} = (\text{grad}\,\phi)_i\,\eta^i = 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow\; (\text{grad}\,\phi)_i \text{ é ortogonal a } \xi^i \text{ e } \eta^i \quad \blacksquare$$

O vetor $N_i \equiv (\text{grad}\,\phi)_i$ é um vetor *covariante* normal a $\mathcal{S}$; temos então que um vetor *contravariante* normal a $\mathcal{S}$ é dado por $N^i = g^{ij}(\text{grad}\,\phi)_j = g^{ij}\,\partial\phi/\partial x^j$, cujo quadrado da magnitude é

$$|N|^2 = N^i N_i = g^{ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \quad .$$

Por fim, o vetor contravariante unitário e normal a $\mathcal{S}$, denotado por n^i, é

$$n^i = \frac{N^i}{\sqrt{|N|^2}} = g^{ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \Bigg/ \sqrt{g^{ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}} \quad \blacksquare$$

(49)

Usando as definições de divergência e derivada covariante, podemos escrever

$$\text{div}\,F^i = F^i{}_{;i} = \frac{\partial F^i}{\partial x^i} + F^j \left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\}$$

Mas, usando o Prob. 37c, temos que

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g/\partial x^j}{2\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j} \quad ;$$

logo,

$$\text{div}\,F^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^i} + \frac{F^j}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^i}\sqrt{g} + F^i\,\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,F^i\right) \quad \blacksquare$$

(51)

$$V^i{}_{;jk} - V^i{}_{;kj} = g^{ir}\left(V_{r;jk} - V_{r;kj}\right) = g^{ir}\left(R^s{}_{rjk}\,V_s\right) = g^{ir}\left(R_{srjk}\,V^s\right) = g^{ir}\left(-R_{rsjk}\,V^s\right) = -R^i{}_{sjk}\,V^s,$$

onde usamos os Probs. 26 e 50a.

(52)

1º modo:

g_{ij} é tirado direto da expressão do quadrado do elemento de comprimento de arco. Este modo convém quando o sistema de coordenadas for ortogonal e com fatores de escala conhecidos, em cujo caso $ds^2 = h_1^2(dx^1)^2 + h_2^2(dx^2)^2 + \cdots$, donde $g_{11} = h_1^2$, $g_{22} = h_2^2$, etc e $g_{ij}\big|_{i\neq j} = 0$. Além disso, sendo (g^{ij}) a inversa da matriz diagonal (g_{ij}), temos que $g^{11} = 1/g_{11}$, $g^{22} = 1/g_{22}$, etc, pois a matriz inversa (a_{ij}^{-1}) de uma matriz *diagonal* $(a_{ij}) = \text{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ é a matriz *diagonal* $(a_{ij}^{-1}) = \text{diag}(1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \cdots)$.

Coordenadas polares:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}, \quad g = r^2$$

Coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\varphi} & g_{\rho z} \\ g_{\varphi\rho} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi z} \\ g_{z\rho} & g_{z\varphi} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\varphi} & g^{\rho z} \\ g^{\varphi\rho} & g^{\varphi\varphi} & g^{\varphi z} \\ g^{z\rho} & g^{z\varphi} & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \rho^2$$

Coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{r\varphi} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta\varphi} \\ g^{\varphi r} & g^{\varphi\theta} & g^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}, \quad g = r^4 \operatorname{sen}^2\theta$$

<u>2º modo</u>:

São usadas as fórmulas

$$g_{ij} = \frac{\partial z_k}{\partial x^i}\frac{\partial z_k}{\partial x^j} \qquad \text{e} \qquad g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial z_k}\frac{\partial x^j}{\partial z_k}$$

onde z_i são coordenadas cartesianas e x^i são coordenadas curvilíneas. Assim, nas coordenadas polares, temos:

$$g_{rr} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$g_{r\theta} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 = g_{\theta r}$$

(53)

<u>Componentes contravariantes</u>:

Estas são calculadas através da equação $V'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j$, com

$$\left.\begin{array}{l} x^j \xrightarrow{j=1,2} x, y \\ V^j \xrightarrow{j=1,2} V_x, V_y \end{array}\right\rangle \text{ coordenadas e os componentes dados no sistema de coordenadas cartesianas}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} x'^i & \xrightarrow{i=1,2} & r\,,\theta \\ V'^i & \xrightarrow{i=1,2} & V^r\,,V^\theta \end{array}\right\rangle$$ coordenadas e os componentes contravariantes no sistema de coordenadas polares

Da lei de transformação de coordenadas dada por $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ \dfrac{-\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$V^r = \frac{\partial r}{\partial x}V_x + \frac{\partial r}{\partial y}V_y = V_x\cos\theta + V_y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}V_x + \frac{\partial \theta}{\partial y}V_y = -V_x\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} + V_y\frac{\cos\theta}{r}$$

<u>Componentes covariantes</u>:

Estas são calculadas através da equação $V_i' = \dfrac{\partial x^j}{\partial x'^i}V_j$, com

x^j e $V^j \xrightarrow{j=1,2} x\,,y$ e $V_x\,,V_y$ (coordenadas e componentes no sistema cartesiano)

x'^i e $V_i' \xrightarrow{j=1,2} r\,,\theta$ e $V_r\,,V_\theta$ (coordenadas e componentes covariantes no sistema de coordenadas polares)

Logo,

$$V_r = \frac{\partial x}{\partial r}V_x + \frac{\partial y}{\partial r}V_y = V_x\cos\theta + V_y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}V_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}V_y = -V_x r\,\mathrm{sen}\,\theta + V_y r\cos\theta$$

<u>Componentes físicos</u> [usando a Eq. (7-7), tendo em conta o Prob. 52]:

$$\overline{V}_r = V_r\big/\sqrt{g_{rr}} = V_r = V_x\cos\theta + V_y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\overline{V}_\theta = V_\theta\big/\sqrt{g_{\theta\theta}} = V_\theta / r = -V_x\,\mathrm{sen}\,\theta + V_y\cos\theta$$

Note que os componentes físicos coincidem com as projeções do vetor nas direções dos versores, isto é, $\overline{V}_r = \vec{V}\cdot\vec{e}_r$ e $\overline{V}_\theta = \vec{V}\cdot\vec{e}_\theta$, onde usamos a notação elementar, na qual $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j}$, $\vec{e}_r = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $\vec{e}_\theta = -\vec{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \vec{j}\cos\theta$.

(54)

$$V_r = \underbrace{g_{rr}}_{1} V^r + \underbrace{g_{r\theta}}_{0} V^\theta = V^r \text{ .... verdade}$$

$$V_\theta = \underbrace{g_{\theta r}}_{0} V^r + \underbrace{g_{\theta\theta}}_{r^2} V^\theta = r^2 V^\theta \text{ .... verdade}$$

(55)

$$\begin{aligned} V^r &= V_x \cos\theta + V_y \operatorname{sen}\theta = (2x - y)\cos\theta + 2xy \operatorname{sen}\theta \\ &= (2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (2r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \\ &= 2r\cos^2\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^\theta &= -V_x \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + V_y \frac{\cos\theta}{r} = -(2x - y)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + 2xy\frac{\cos\theta}{r} \\ &= -(2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + (2r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta)\frac{\cos\theta}{r} \\ &= -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 2r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Usando o Prob. 54, obtemos

$$V_r = V^r = 2r\cos^2\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

$$V_\theta = r^2 V^\theta = -2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta + 2r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$$

(56)

Item (a): Devemos fazer os índices i, j e k tomarem os valores 1 ou 2.

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right):$$

$$[rr,r] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

$$[rr,\theta] = \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = 0$$

$$[r\theta,r] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = 0$$

$$[r\theta,\theta] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = r$$

$$[\theta r,r] = [r\theta,r] = 0$$

$$[\theta r,\theta] = [r\theta,\theta] = r$$

$$[\theta\theta,r] = \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -r$$

$$[\theta\theta,\theta] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} = g^{ks}[ij,s]:$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix} = \underbrace{g^{rr}}_{1}\underbrace{[rr,r]}_{0} + \underbrace{g^{r\theta}}_{0}[rr,\theta] = 0$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix} = \underbrace{g^{rr}}_{1}\underbrace{[r\theta,r]}_{0} + \underbrace{g^{r\theta}}_{0}[r\theta,\theta] = 0$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ \theta r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = \underbrace{g^{rr}}_{1}\underbrace{[\theta\theta,r]}_{-r} + \underbrace{g^{r\theta}}_{0}[\theta\theta,\theta] = -r$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix} = \underbrace{g^{\theta r}}_{0}\underbrace{[rr,r]}_{0} + \underbrace{g^{\theta\theta}}_{1/r^2}\underbrace{[rr,\theta]}_{0} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix} = \underbrace{g^{\theta r}}_{0}\underbrace{[r\theta,r]}_{0} + \underbrace{g^{\theta\theta}}_{1/r^2}\underbrace{[r\theta,\theta]}_{r} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = \underbrace{g^{\theta r}}_{0}[\theta\theta,r] + \underbrace{g^{\theta\theta}}_{1/r^2}\underbrace{[\theta\theta,\theta]}_{0} = 0$$

<u>Item (b)</u>: Pela fórmula $[ij,k] = \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial z_s}{\partial x^k}$ temos, por exemplo:

$$[\theta\theta,r] = \frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2(r\cos\theta)}{\partial^2\theta}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial^2(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial^2\theta}\frac{\partial(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial r} =$$
$$= (-r\cos\theta)(\cos\theta) + (-r\,\mathrm{sen}\,\theta)(\mathrm{sen}\,\theta) = -r$$

Pela fórmula $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial z_s}$ temos, por exemplo:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial^2(r\cos\theta)}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial(\arctan y/x)}{\partial x} + \frac{\partial^2(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial(\arctan y/x)}{\partial y}$$
$$= (-\mathrm{sen}\,\theta)\frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{r} + (\cos\theta)\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{r}$$

---

(57)

<u>Coordenadas polares</u> ($2^3 = 8$ símbolos)

Pelo Prob. 38a: $\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{rr}}\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial 1}{\partial r} = 0$; $\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\theta} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r^2}{\partial\theta} = 0$

Pelo Prob. 38b: $\begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ \theta r \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{rr}}\frac{\partial g_{rr}}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial 1}{\partial\theta} = 0$; $\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{1}{r}$

Pelo Prob. 38c: $\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{rr}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = -r$; $\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{rr}}{\partial\theta} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial 1}{\partial\theta} = 0$

<u>Coordenadas esféricas</u> ($3^3 = 27$ símbolos)

Pelo Prob. 38d: $\begin{Bmatrix} r \\ \theta\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ r\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ r\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta r \end{Bmatrix} = 0$

Pelo Prob. 38a:

$$\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{rr}/\partial r}{2g_{rr}} = \frac{\partial 1/\partial r}{2} = 0 \quad \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{\theta\theta}/\partial\theta}{2g_{\theta\theta}} = \frac{\partial r^2/\partial\theta}{2r^2} = 0 \quad \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{\varphi\varphi}/\partial\varphi}{2g_{\varphi\varphi}} = \frac{\partial(r^2\,\mathrm{sen}^2\theta)/\partial\varphi}{2r^2\,\mathrm{sen}^2\theta} = 0$$

Pelo Prob. 38b:

$$\begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ \theta r \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{rr} / \partial\theta}{2g_{rr}} = \frac{\partial 1/\partial\theta}{2} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} r \\ r\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ \varphi r \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{rr} / \partial\varphi}{2g_{rr}} = \frac{\partial 1/\partial\varphi}{2} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{\theta\theta} / \partial r}{2g_{\theta\theta}} = \frac{\partial r^2/\partial r}{2r^2} = \frac{1}{r} \qquad \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{\theta\theta} / \partial\varphi}{2g_{\theta\theta}} = \frac{\partial r^2/\partial\varphi}{2r^2} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ r\varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{\varphi\varphi} / \partial r}{2g_{\varphi\varphi}} = \frac{\partial (r^2 \operatorname{sen}^2\theta)/\partial r}{2r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{r} \qquad \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta\varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial g_{\varphi\varphi} / \partial\theta}{2g_{\varphi\varphi}} = \frac{\partial (r^2 \operatorname{sen}^2\theta)/\partial \theta}{2r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \cot\theta$$

Pelo Prob. 38c:

$$\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = -\frac{\partial g_{\theta\theta} / \partial r}{2g_{rr}} = -\frac{\partial r^2/\partial r}{2} = -r \qquad \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = -\frac{\partial g_{\varphi\varphi} / \partial r}{2g_{rr}} = -\frac{\partial (r^2 \operatorname{sen}^2\theta)/\partial r}{2} = -r\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix} = -\frac{\partial g_{rr} / \partial\theta}{2g_{\theta\theta}} = -\frac{\partial 1/\partial\theta}{2r^2} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = \frac{-\partial g_{\varphi\varphi} / \partial\theta}{2g_{\theta\theta}} = \frac{-\partial (r^2 \operatorname{sen}^2\theta)/\partial\theta}{2r^2} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ rr \end{Bmatrix} = -\frac{\partial g_{rr} / \partial\varphi}{2g_{\varphi\varphi}} = \frac{-\partial 1/\partial\varphi}{2r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta\theta \end{Bmatrix} = -\frac{\partial g_{\theta\theta} / \partial\varphi}{2g_{\varphi\varphi}} = \frac{-\partial r^2/\partial\varphi}{2r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

(58)

Antes de proceder aos cálculos, expliquemos uma notação que utilizaremos daqui por diante. No presente problema desejamos calcular

$$V_{i;\,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - V_s \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} \qquad (*)$$

para $i, j = 1, 2$ (onde $x^1 \equiv r$ e $x^2 \equiv \theta$), ou, explicitamente, $V_{1;1} \equiv V_{r;r}$, $V_{1;2} \equiv V_{r;\theta}$, $V_{2,1} \equiv V_{\theta;r}$ e $V_{2;2} \equiv V_{\theta;\theta}$. Note, entretanto, que $V_{i;2}$ é perfeitamente definido; trata-se da derivada covariante do vetor V_i em relação a x^2. Mas o significado de $V_{1;2}$, por exemplo, precisa ser explicado pois não pode ser a derivada de V_1 em relação a x^2: a derivada covariante de um dado componente (V_1, no caso) não é definida. Refletindo um pouco, concluímos que $V_{1;2}$ *denota o componente com* $i = 1$ *da derivada covariante de* V_i *em relação a* x^2:

$$V_{1;2} = V_{i;2}\Big|_{i=1} = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x^2} - V_s \begin{Bmatrix} s \\ i\,2 \end{Bmatrix} \right]_{i=1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} - V_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} - V_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} \ . \qquad (\#)$$

Analogamente, temos que $V_{i;\,j3} = (V_{i;\,j})_{;3}$ é inequivocamente a derivada covariante de $V_{i;\,j}$ em relação a x^3. Mas $V_{i;23}$ não pode ser a derivada covariante de $V_{i;2}$ em relação a x^3; trata-se de $V_{i;\,j3}\Big|_{j=2}$, o componente com $j = 2$ da derivada covariante de $V_{i;\,j}$ em relação a x^3. *Essa, portanto, é a interpretação a ser adotada quando atribuirmos o valor* $1, 2 \cdots$ ou N *a um índice localizado numa posição mais interna que a de outro que indique diferenciação covariante*.

Passemos à resolução do item (a) do problema.

(a) Fazendo $i, j = 1,2$ na Eq. (∗) e interpretando os termos que se obtêm com essa atribuição de valores aos índices [a Eq. (#) mostra um desses termos] conforme explicado acima, obtemos os quatro valores de $V_{i;j}$:

$$V_{r;r} = \frac{\partial V_r}{\partial r} - V_r \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix}}_{0} - V_\theta \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix}}_{0} = -\cos\theta\,(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) + 4r\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$$

$$V_{\theta;r} = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - V_r \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta r \end{Bmatrix}}_{0} - V_\theta \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta r \end{Bmatrix}}_{1/r} = r\operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) + 4r^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$$

$$V_{r;\theta} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_r \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix}}_{0} - V_\theta \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix}}_{1/r} = -r\cos\theta\,(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + 2r^2\operatorname{sen}\theta\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$V_{\theta;\theta} = \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_r \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{-r} - V_\theta \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{0} = r^2\operatorname{sen}\theta\,(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + 2r^3\cos\theta\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

onde usamos os símbolos de Christoffel de 2ª espécie calculados no Prob. 56.

(b) Usando a fórmula

$$V_{i;j} = \frac{\partial z_k}{\partial x^i}\frac{\partial z_l}{\partial x^j} Z_{k;l} = \frac{\partial z_k}{\partial x^i}\frac{\partial z_l}{\partial x^j}\frac{\partial Z_k}{\partial z_l} \quad ,$$

onde $Z_1 = V_x$ e $Z_2 = V_y$ são os componentes do vetor dado nas coordenadas cartesianas $z_1 = x$ e $z_2 = y$, e fazendo $i, j = 1,2$ (onde $V_{1;1} = V_{r;r}$, $V_{2;1} = V_{\theta;r}$, etc), obtemos os mesmos resultados do item (a):

$$\begin{aligned} V_{r;r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x}}_{2} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial y}}_{-1} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial x}}_{2y} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial y}}_{2x} \\ &= (\cos\theta)^2(2) + (\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)(-1) + (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)(2r\operatorname{sen}\theta) + (\operatorname{sen}\theta)^2(2r\cos\theta) \\ &= 2\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\theta;r} &= \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r}}_{-r\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x}}_{2} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}}_{-r\operatorname{sen}^2\theta}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial y}}_{-1} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r}}_{r\cos^2\theta}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial x}}_{2y} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}}_{r\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial y}}_{2x} \\ &= r\operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) + 4r^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{r;\theta} &= \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x}}_{2} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r\cos^2\theta}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial y}}_{-1} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r\operatorname{sen}^2\theta}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial x}}_{2y} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial y}}_{2x} \\ &= -r\cos\theta\,(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + 2r^2\operatorname{sen}\theta\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \end{aligned}$$

$$V_{\theta;\theta} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\theta}}_{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x}}_{2} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\theta}}_{-r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial y}}_{-1} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\theta}}_{-r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial x}}_{2y} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\theta}}_{r^2\cos^2\theta}\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial y}}_{2x}$$
$$= r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,(2\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta) + 2r^3\cos\theta\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta)$$

(59)

Podemos definir a velocidade e a aceleração respectivamente pelas equações $v^i \equiv dx^i/dt$ e $a^i \equiv \delta v^i/\delta t$, sendo t o tempo, pois assim são tensores (um vetor contravariante) que, em coordenadas cartesianas, coincidem com a definição usual daquelas grandezas.

(60)

$$a^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = v^i{}_{;j}\frac{dx^j}{dt} = \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\right]\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} v^k\frac{dx^j}{dt}$$
$$= \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}v^k = \frac{dv^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$
$$= \frac{d^2x^i}{dt^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

(61)

No sistema de coordenadas polares, a velocidade possui os seguintes:

a) Componentes contravariantes: $v^i = dx^i/dt$; ou seja:

$$v^r = \frac{dr}{dt} = \dot r \qquad \text{e} \qquad v^\theta = \frac{d\theta}{dt} = \dot\theta$$

b) Componentes físicos [use a Eq. (7-7) e o Prob. 52]:

$$\bar v_r = \underbrace{\sqrt{g_{rr}}}_{1}\,v^r = \dot r \qquad \text{e} \qquad \bar v_\theta = \underbrace{\sqrt{g_{\theta\theta}}}_{r}\,v^\theta = r\dot\theta$$

(62)

a) Componentes contravariantes: $a^i = \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^k}{dt}$; ou seja:

$$a^r = \frac{d^2r}{dt^2} + \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix}}_{0}\frac{dr}{dt}\frac{dr}{dt} + \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix}}_{0}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta r \end{Bmatrix}}_{0}\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{-r}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \ddot r - r\dot\theta^2$$

$$a^\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix}}_{0}\frac{dr}{dt}\frac{dr}{dt} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix}}_{1/r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta r \end{Bmatrix}}_{1/r}\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{0}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \ddot\theta + \frac{2\dot r\dot\theta}{r}$$

b) Componentes físicos [use a Eq. (7-7) e o Prob. 52]:

$$\bar a_r = \underbrace{\sqrt{g_{rr}}}_{1}\,a^r = \ddot r - r\dot\theta^2 \qquad \text{e} \qquad \bar a_\theta = \underbrace{\sqrt{g_{\theta\theta}}}_{r}\,a^\theta = \ddot\theta r + 2\dot r\dot\theta$$

(64)

Devemos calcular $\dfrac{\delta V_i}{\delta t} = V_{i;\,j}\,\dot{x}^j$, isto é $\begin{cases} \delta V_r / \delta t = V_{r;r}\,\dot{r} + V_{r;\theta}\,\dot{\theta} \\ \delta V_\theta / \delta t = V_{\theta;r}\,\dot{r} + V_{\theta;\theta}\,\dot{\theta} \end{cases}$

<u>Cálculo dos componentes covariantes</u> $\left(V_i = \dfrac{\partial z_j}{\partial x^i} Z_j \right)$

$$V_r = \frac{\partial x}{\partial r}V_x + \frac{\partial y}{\partial r}V_y = \underbrace{V_x}_{0}\cos\theta + \underbrace{V_y}_{y-x}\operatorname{sen}\theta = (r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\operatorname{sen}\theta = r\operatorname{sen}^2\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}V_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}V_y = -\underbrace{V_x}_{0}\,r\operatorname{sen}\theta + \underbrace{V_y}_{y-x}\,r\cos\theta = (r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\,r\cos\theta = r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - r^2\cos^2\theta$$

<u>Parametrização da reta $y = x + 1$ (a abscissa x será o parâmetro t: $t = x$)</u>

$$\left.\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} \\ \theta = \arctan y/x = \arctan\dfrac{x+1}{x} \end{cases}\right\rangle \xrightarrow{x=t} \begin{cases} r(t) = \sqrt{2t^2 + 2t + 1} \\ \theta(t) = \arctan\dfrac{t+1}{t} \end{cases}$$

Dessa parametrização obtemos as seguintes expressões, necessárias mais adiante:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{2t+1}{r(t)}\ , \qquad \dot{\theta} = \frac{-1}{r^2(t)}\ , \qquad \operatorname{sen}\theta(t) = \frac{t+1}{r(t)}\ , \qquad \cos\theta(t) = \frac{t}{r(t)}$$

<u>Cálculo das derivadas covariantes</u> $V_{i;\,j} = \dfrac{\partial V_i}{\partial x^j} - V_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$

Adotando a notação explicada no Prob. 58, temos

$$V_{r;r} = \frac{\partial V_r}{\partial r} - V_r\underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix}}_{0} - V_\theta\underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix}}_{0} = \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$V_{r;\theta} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_r\underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ r\theta \end{Bmatrix}}_{0} - V_\theta\underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ r\theta \end{Bmatrix}}_{1/r}$$

$$= 2r\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cancel{r\cos^2\theta} + r\operatorname{sen}^2\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cancel{r\cos^2\theta}$$

$$= r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r\operatorname{sen}^2\theta$$

$$V_{\theta;r} = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - V_r\underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta r \end{Bmatrix}}_{0} - V_\theta\underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta r \end{Bmatrix}}_{1/r}$$

$$= 2r\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2r\cos^2\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r\cos^2\theta$$

$$= r\operatorname{sen}\theta\cos\theta - r\cos^2\theta$$

$$V_{\theta;\theta} = \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_r \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{-r} - V_\theta \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{0}$$

$$= r^2 \cos^2\theta - \cancel{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} + 2r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cancel{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} - r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= r^2\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Cálculo das derivadas intrínsecas

$$\frac{\delta V_r}{\delta t} = V_{r;r}\,\dot r + V_{r;\theta}\,\dot\theta$$

$$= \left[\operatorname{sen}^2\theta(t) - \operatorname{sen}\theta(t)\cos\theta(t)\right]\frac{2t+1}{r(t)} + \left[r(t)\operatorname{sen}\theta(t)\cos\theta(t) + r(t)\operatorname{sen}^2\theta(t)\right]\frac{-1}{r^2(t)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta(t)}{r(t)}\left\{2t\underbrace{\operatorname{sen}\theta(t)}_{(t+1)/r(t)} - 2(t+1)\underbrace{\cos\theta(t)}_{t/r(t)}\right\} = 0$$

$$\frac{\delta V_\theta}{\delta t} = V_{\theta;r}\,\dot r + V_{\theta;\theta}\,\dot\theta$$

$$= \left[r\operatorname{sen}\theta\cos\theta - r\cos^2\theta\right]\frac{2t+1}{r(t)} + \left[r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]\frac{-1}{r^2(t)}$$

$$= \underbrace{\left[2t\operatorname{sen}\theta - 2(t+1)\cos\theta\right]}_{0}\cos\theta = 0$$

Observe que, sobre a reta dada, $(V_x, V_y) = (0,1)$, um campo eqüipolente; por isso que a derivada intrínseca é nula ao longo daquela reta.

(65)

a) Em coordenadas polares

Componentes covariantes: $\frac{\partial\phi}{\partial r}$ e $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$

Componentes físicos: $\overline{(\operatorname{grad}\phi)}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial r}$ e $\overline{(\operatorname{grad}\phi)}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$

b) Em coordenadas esféricas

Componentes covariantes: $\frac{\partial\phi}{\partial r}$, $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$ e $\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$

Componentes físicos:

$$\overline{(\operatorname{grad}\phi)}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial r},\quad \overline{(\operatorname{grad}\phi)}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\ \text{ e }\ \overline{(\operatorname{grad}\phi)}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

(66)

$$F^r = \overline{F}_r / h_r = \overline{F}_r \,, \quad F^\theta = \overline{F}_\theta / h_\theta = \overline{F}_\theta / r \,, \quad F^\varphi = \overline{F}_\varphi / h_\varphi = \overline{F}_\theta / (r \operatorname{sen}\theta), \quad \sqrt{g} = r^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, F^i \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{F}_r \, r^2 \operatorname{sen}\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\overline{F}_\theta}{r} r^2 \operatorname{sen}\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\overline{F}_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \right) \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \overline{F}_r \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\overline{F}_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial \overline{F}_\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

(67)

Neste problema adotamos a notação explicada no Prob. 58.

$$\nabla^2 \phi(r,\theta) = g^{rr} \phi_{;rr} + g^{\theta\theta} \phi_{;\theta\theta} = g^{rr} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{;r} + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{;\theta}$$

Usando o Prob. 52, temos que

$$g_{rr} = 1 \quad \Rightarrow \quad g^{rr} = 1$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad \Rightarrow \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2$$

Abaixo usamos os símbolos de Christoffel em coordenadas polares já calculados no Prob. 56:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{;r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial r} \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ rr \end{Bmatrix}}_{0} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ rr \end{Bmatrix}}_{0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{;\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial r} \underbrace{\begin{Bmatrix} r \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{-r} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\theta \end{Bmatrix}}_{0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\nabla^2 \phi(r,\theta) = 1 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad \blacksquare$$

(68)

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \ , \text{ i.e., } \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 g_{\varphi\varphi}} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \ .$$

• *Cálculo do 1º membro*:

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Tendo em conta que

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta$$

temos que

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\theta} = -r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\ , \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi$$

e que

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = \dfrac{-\mathrm{sen}\,\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = \dfrac{\cos\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = (-r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\left(\frac{-\mathrm{sen}\,\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\right) + (r\cos\theta\cos\varphi)\frac{\cos\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} = \cot\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + \cot\theta\cos^2\varphi = \cot\theta \quad \blacksquare$$

• *Cálculo do 2º membro*:

$$g_{\varphi\varphi} = h_\varphi^2 = r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2g_{\varphi\varphi}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} = \frac{1}{2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\,2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \cot\theta \quad \blacksquare$$

(69)

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}\,g^{11}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}\,g^{22}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}\,g^{33}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}\cdot 1\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cancel{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{1}{\cancel{r^2}}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$
$$+ \frac{1}{\cancel{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cancel{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \quad \blacksquare$$

(70)

$$\sqrt{g} = h_u\, h_v\, h_\varphi = (u^2 + v^2)\, u\, v \qquad g^{11} = g^{uu} = \frac{1}{g_{uu}} = \frac{1}{h_u^2} = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$$g^{22} = g^{vv} = \frac{1}{g_{vv}} = \frac{1}{h_v^2} = \frac{1}{u^2+v^2} \qquad g^{33} = g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{1}{h_\varphi^2} = \frac{1}{u^2 v^2}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\left[\sqrt{g}\; g^{11}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right] + \frac{\partial}{\partial x^2}\left[\sqrt{g}\; g^{22}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x^3}\left[\sqrt{g}\; g^{33}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2)\,u\,v}\left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\cancel{(u^2+v^2)}\,u\,v\,\frac{1}{\cancel{(u^2+v^2)}}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\cancel{(u^2+v^2)}\,u\,v\,\frac{1}{\cancel{(u^2+v^2)}}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right] + \right.$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(u^2+v^2)\,u\,v\,\frac{1}{u^2 v^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2)}\left\{ \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{u^2+v^2}{u^2 v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \right\} \quad \blacksquare$$

Apêndice A – Coordenadas curvilíneas

a) Preliminares

i) Revisão de alguns conceitos em coordenadas cartesianas

Considere um campo escalar $f(x,y,z)$ e um campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = \vec{e}_x\, F_x(x,y,z) + \vec{e}_y\, F_y(x,y,z) + \vec{e}_z\, F_z(x,y,z)$. Vale recordar as seguintes definições:

$$\nabla \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad : \quad \text{operador } \textit{nabla} \text{ ou } \textit{del}$$

$$\nabla f \equiv \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad : \quad \textit{gradiente de f}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} \equiv \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{e}_x F_x + \vec{e}_y F_y + \vec{e}_z F_z \right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} : \quad \textit{divergência de } \vec{F}$$

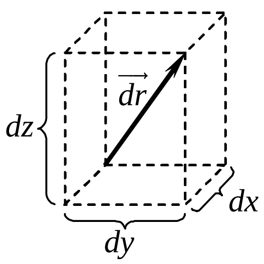
$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad : \quad \textit{laplaciano de f} \text{ (a divergência do gradiente de } f\text{)}$$

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad : \quad \textit{diferencial de f}$$

$$d\vec{F} \equiv \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz \quad : \quad \textit{diferencial de } \vec{F}$$

A expressão de df também pode ser escrita como segue:

$$df = \left(\vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy + \vec{e}_z\, dz \right) = \nabla f \cdot \overrightarrow{dr} \quad . \tag{A-1}$$

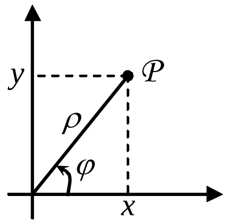


Observe que o *deslocamento infinitesimal* $\overrightarrow{dr} \equiv \vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy + \vec{e}_z\, dz$ (no espaço; v. figura à esquerda) é igual a $d\vec{r}$, diferencial do vetor posição $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ (fato aparentemente óbvio, mas que constitui um dos modos de se calcular $\overrightarrow{dr}$ em outros sistemas de coordenadas):

$$\overrightarrow{dr} \equiv \vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy + \vec{e}_z\, dz = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}}_{\vec{e}_x} dx + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}_{\vec{e}_y} dy + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}_{\vec{e}_z} dz = d\vec{r} \quad . \tag{A-2}$$

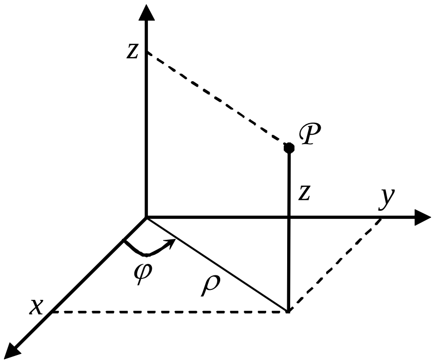
ii) Os principais sistemas de coordenadas não-cartesianos

Nas figuras abaixo definem-se, indicando-se distâncias e ângulos, os três sistemas de coordenadas não-cartesianos mais importantes, estando à direita delas outras informações relevantes sobre esses sistemas:



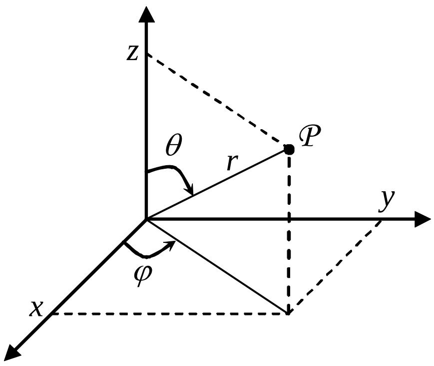
As coordenadas *polares* ρ e φ de um ponto $\mathcal{P}$ do plano *xy*. A *lei de transformação de coordenadas* entre elas e as cartesianas é a seguinte:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \qquad (\rho \geq 0\,,\;\; 0 \leq \varphi < 2\pi)$$



As coordenadas *cilíndricas* ρ, φ e z de um ponto $\mathcal{P}$ do espaço. Elas são formadas pela coordenada cartesiana z de $\mathcal{P}$ e pelas coordenadas polares ρ e φ da projeção desse ponto no plano *xy*. A lei de transformação é

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (\rho \geq 0\,,\;\; 0 \leq \varphi < 2\pi\,,\;\; z \in \mathbb{R})$$



As coordenadas *esféricas* r, θ e φ de um ponto $\mathcal{P}$ do espaço. A lei de transformação é

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geq 0\,, 0 \leq \theta < \pi\,,\;\; 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

A nomenclatura mais usada para as diversas coordenadas de um ponto $\mathcal{P}$ do espaço é a seguinte: x é a *abscissa*, y é a *ordenada* e z é a *cota* de $\mathcal{P}$. Já ρ e r são as coordenadas *radiais*, *cilíndrica* e *esférica*, respectivamente. Quanto às coordenadas angulares, φ é a *longitude* (ou *azimute*) de $\mathcal{P}$ e θ é a *co-latitude* (pois é o complemento da *latitude*, que é a posição angular de $\mathcal{P}$ em relação ao plano *xy*).

iii) O laplaciano em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.

Para nós, o laplaciano é especialmente importante por aparecer em várias equações da Física Matemática, tais como as equações do calor e da onda. Boa parte do presente capítulo é voltada ao seu desenvolvimento nos diversos sistemas de coordenadas. Assim, um dos nossos objetivos é deduzir as expressões do laplaciano de uma função f em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas (a sua *definição* em coordenadas cartesianas é dada abaixo para fins de referência):

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \text{(cartesianas)}$$

$$\nabla^2 f(\rho,\varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \qquad \text{(polares)} \qquad \text{(A-3)}$$

$$\nabla^2 f(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{(cilíndricas)} \qquad \text{(A-4)}$$

$$\nabla^2 f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right] \quad \text{(esféricas)} \qquad \text{(A-5)}$$

Uma das maneiras de realizar as deduções consiste em *transformar* a expressão do laplaciano como é definido nas coordenadas cartesianas para as coordenadas desejadas, pela aplicação reiterada da regra da cadeia. Façamos isso para o caso mais simples. Vamos deduzir o laplaciano em coordenadas polares [i.e., a Eq. (A-3)], a partir da definição $\nabla^2 f(x,y) = f_{xx} + f_{yy}$ (essa notação de diferenciação parcial é utilizada abaixo). Utilizando a notação $f(x,y) = f(\rho,\varphi)$ e o esquema de composição de funções seguinte, temos, pela regra da cadeia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto f \qquad \Rightarrow \qquad f_x = f_\rho\,\rho_x + f_\varphi\,\varphi_x \quad .$$

Derivando essa expressão novamente em relação a x (agora aplicando a regra da cadeia para derivar f_ρ e f_φ do mesmo modo como se fez para f acima), obtemos

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(f_{\rho\rho}\,\rho_x + f_{\rho\varphi}\,\varphi_x \right)\rho_x + f_\rho\,\rho_{xx} + \left(f_{\varphi\rho}\,\rho_x + f_{\varphi\varphi}\,\varphi_x \right)\varphi_x + f_\varphi\,\varphi_{xx} \\ &= \rho_x^2\, f_{\rho\rho} + \varphi_x^2\, f_{\varphi\varphi} + 2\,\rho_x\,\varphi_x\, f_{\rho\varphi} + \rho_{xx}\, f_\rho + \varphi_{xx}\, f_\varphi \quad . \end{aligned}$$

Neste resultado, trocando x por y, obtemos

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \left(f_{\rho\rho}\,\rho_y + f_{\rho\varphi}\,\varphi_y \right)\rho_y + f_\rho\,\rho_{yy} + \left(f_{\varphi\rho}\,\rho_y + f_{\varphi\varphi}\,\varphi_y \right)\varphi_y + f_\varphi\,\varphi_{yy} \\ &= \rho_y^2\, f_{\rho\rho} + \varphi_y^2\, f_{\varphi\varphi} + 2\,\rho_y\,\varphi_y\, f_{\rho\varphi} + \rho_{yy}\, f_\rho + \varphi_{yy}\, f_\varphi \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} =$$

$$(\rho_x^2+\rho_y^2)\, f_{\rho\rho} + (\varphi_x^2+\varphi_y^2)\, f_{\varphi\varphi} + 2(\rho_x\,\varphi_x+\rho_y\,\varphi_y)\, f_{\rho\varphi} + (\rho_{xx}+\rho_{yy})\, f_\rho + (\varphi_{xx}+\varphi_{yy})\, f_\varphi \quad . \qquad \text{(A-6)}$$

Para calcular ρ_x, φ_x, etc, usamos a lei de transformação inversa

$$\rho \equiv \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad \varphi = \arctan(y/x) + \delta \quad ,$$

onde, considerando $\varphi \in [0,2\pi)$, é necessário definir a constante aditiva δ como sendo igual a 0, π, π ou 2π se φ for do 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante, respectivamente, uma vez que os valores principais da função arctan estão no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Logo,

$$\rho_x = \partial\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big/\partial x = (2x)\Big/\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right) = x/\rho \quad ,$$

$$\rho_{xx} = \partial\left(x\,\rho^{-1}\right)\Big/\partial x = \rho^{-1} - x\,\rho^{-2}\rho_x = (\rho^2 - x^2)/\rho^3 = y^2/\rho^3 \quad ,$$

$$\varphi_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan(y/x) + \delta\right] = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{\rho^2} \quad ,$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\,\rho^{-2}\right) = 2\,y\,\rho^{-3}\rho_x = \frac{2y}{\rho^3}\frac{x}{\rho} = \frac{2xy}{\rho^4} \quad .$$

Nas duas primeiras expressões acima, podemos simplesmente substituir x e y um pelo outro, já que a expressão de ρ é simétrica com respeito a essa troca, para obter

$$\rho_y = y/\rho \quad , \qquad \rho_{yy} = x^2/\rho^3 \quad .$$

Já φ não exibe tal simetria; suas derivadas em relação a y devem ser calculadas normalmente:

$$\varphi_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\arctan(y/x) + \delta\right] = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho^2} \quad ,$$

$$\varphi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\,\rho^{-2}\right) = -2\,x\,\rho^{-3}\rho_y = \frac{-2x}{\rho^3}\frac{y}{\rho} = \frac{-2xy}{\rho^4} \quad .$$

Assim,

$$\rho_x^2 + \rho_y^2 \;=\; x^2/\rho^2 + y^2/\rho^2 \;=\; (x^2+y^2)/\rho^2 \;=\; \rho^2/\rho^2 \;=\; 1 \quad ,$$

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \;=\; y^2/\rho^4 + x^2/\rho^4 \;=\; \rho^2/\rho^4 \;=\; 1/\rho^2 \quad ,$$

$$\rho_x\,\varphi_x + \rho_y\,\varphi_y = -xy/\rho^3 + xy/\rho^3 = 0$$

$$\rho_{xx} + \rho_{yy} \;=\; y^2/\rho^3 + x^2/\rho^3 \;=\; \rho^2/\rho^3 \;=\; 1/\rho \quad ,$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad .$$

A substituição desses resultados na Eq. (A-6) fornece a Eq. (A-3) desejada.

A utilização do método acima (regra da cadeia) para obter o laplaciano em coordenadas esféricas envolve muitas contas (tente!). Para isso, adotamos um outro método, que, além de fornecer o resultado mais rapidamente, é válido para toda uma classe de sistemas de coordenadas (os ditos *ortogonais*, a que pertencem os sistemas considerados acima). Mais ainda, ele facilita o cálculo de várias grandezas importantes, como os versores e os elementos de comprimento de arco e de volume. É claro que nada vem de graça; a elaboração desse método — o das *coordenadas curvilíneas* —, feito a seguir, demanda tempo e energia.

b) Coordenadas e versores curvilíneos. Elementos de comprimento de arco, área e volume.

Admita que as coordenadas cartesianas x, y e z de pontos do $\mathbb{R}^3$ sejam expressas como funções de três variáveis t, u e v,

$$x = x(t,u,v)\,, \quad y = y(t,u,v)\,, \quad z = z(t,u,v) \quad ,$$

e que tais funções tenham derivadas contínuas e possam ser invertidas,

$$t = t(x,y,z)\,, \quad u = u(x,y,z)\,, \quad v = v(x,y,z) \quad ,$$

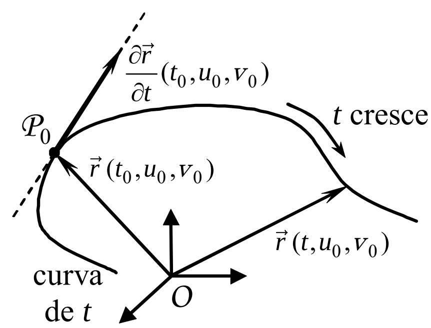
o que implica num jacobiano $J = \partial(x,y,z)/\partial(t,u,v)$ que não se anula. (Na prática, o jacobiano pode se anular em certos pontos, onde, então, considerações especiais devem ser levantadas.) Assim, a cada ponto $\mathcal{P}(x,y,z)$ do espaço podemos associar um único terno (t,u,v) formado pelas chamadas *coordenadas curvilíneas*. O sistema composto pelas três equações acima define uma *transformação de coordenadas*.

Exemplo – Coordenadas esféricas — $t = r$, $u = \theta$, $v = \varphi$:

$$\begin{aligned}
x &= x(r,\theta,\varphi) = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi \\
y &= y(r,\theta,\varphi) = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\
z &= z(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta \\
r &> 0\,,\ \theta \in (0,\pi)\,,\ \varphi \in [0,2\pi) \\
&\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\,\text{sen}\,\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\theta &= \theta(x,y,z) = \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \right) \\
\varphi &= \varphi(x,y,z) = \arctan(y/x) + \delta \\
&\text{onde } (x,y,z) \in (\mathbb{R}^3 - \text{eixo z}) \text{ e } \delta \text{ como já definido}
\end{aligned}$$

O vetor posição de um ponto do espaço pode ser escrito como uma função vetorial das coordenadas cartesianas, $\vec{r}(x,y,z)$, ou curvilíneas, $\vec{r}(t,u,v)$. Considere um ponto $\mathcal{P}_0$ do espaço, de coordenadas cartesianas (x_0,y_0,z_0) e curvilíneas (t_0,u_0,v_0). Mantendo $u = u_0 = \text{const.}$, $v = v_0 = \text{const.}$ e variando t, obtemos uma curva passando por $\mathcal{P}_0$, que é a imagem da função vetorial $\vec{r}(t,u_0,v_0)$ e que se define como sendo a *curva de t* (mostrada na figura à direita). Recorde-se de que o vetor $\partial\vec{r}/\partial t$ é tangente a essa curva (observe-o no ponto $\mathcal{P}_0$ da figura). De modo análogo se definem a *curva de u*, $\vec{r}(t_0,u,v_0)$, e a *curva de v*, $\vec{r}(t_0,u_0,v)$ passando por $\mathcal{P}_0$. Essas são as chamadas *curvas coordenadas*. Temos assim definidas, num sistema de coordenadas curvilíneas fixo, três curvas coordenadas em cada ponto do espaço. Que elas não coincidem é garantido pelo fato de o jacobiano ser diferente de zero em todos os pontos. De fato, se



$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial t & \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial t & \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial t & \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \neq 0 \qquad \text{(A-7)}$$

num dado ponto então, nesse ponto, os vetores tangentes $\partial\vec{r}/\partial t$, $\partial\vec{r}/\partial u$ e $\partial\vec{r}/\partial v$ formam um paralelepípedo cujo volume, dado pelo produto misto acima, é diferente de zero, indicando que esses vetores tangentes são linearmente independentes e, portanto, que as curvas coordenadas nesse ponto são distintas.

Quando essas curvas interceptam-se em ângulos retos em todos os pontos, o sistema de coordenadas curvilíneas é dito *ortogonal*.

Também temos as *superfícies coordenadas*, que são aquelas sobre as quais uma das coordenadas curvilíneas mantém-se constante; logo, são dadas por $t = t_0$, $u = u_0$ ou $v = v_0$. Note que uma curva coordenada é a interseção de duas superfícies coordenadas; e.g., a curva de *t*, na qual só *t* varia, é a interseção das superfícies coordenadas $u = u_0$ e $v = v_0$.

Exemplos:

i) No sistema cartesiano:

– as curvas da coordenada *x* são retas paralelas ao eixo *x*.

– as superfícies coordenadas são planos paralelos aos planos *xy*, *xz* ou *yz*.

ii) No sistema de coordenadas esféricas:

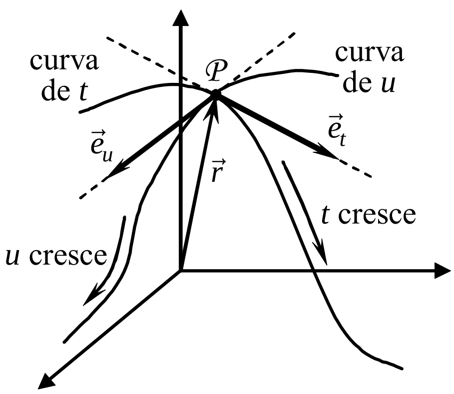
– as curvas da coordenada *r* são semi-retas partindo da origem (raios).

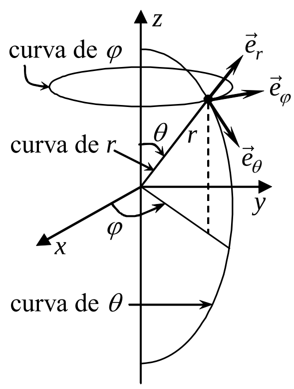
– as curvas da coordenada θ são semicircunferências centradas na origem que começam e terminam no eixo *z*.

– uma curva da coordenada φ é uma circunferência centrada num ponto do eixo *z* e paralela ao plano *xy*.

– as superfícies coordenadas são superfícies esféricas de centro na origem $(r = r_0)$, superfícies cônicas (de uma só folha) com o vértice na origem $(\theta = \theta_0)$ e co-axiais com o eixo *z* bem como semiplanos com a borda no eixo *z* $(\varphi = \varphi_0)$.

Sejam $\vec{e}_t$, $\vec{e}_u$ e $\vec{e}_v$ vetores *unitários* e *tangentes* respectivamente às curvas de *t*, *u* e *v*, apontando na direção de crescimento dessas coordenadas; denominamo-los *versores*. A figura à esquerda abaixo mostra, interceptando-se num ponto $\mathcal{P}$, as curvas de *t* e de *u* bem como os respectivos versores nesse ponto.





Exemplo – O sistema de coordenadas esféricas:

Note que: (i) trata-se de um sistema ortogonal (convença-se através da figura acima à direita que $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ e $\vec{e}_\varphi$ são ortogonais; isto será demonstrado analiticamente mais adiante), (ii) embora ortogonais em todos os pontos, a orientação dos versores muda de um ponto a outro; (iii) *dr* é um comprimento, já $d\theta$ e $d\varphi$ são ângulos.

Ora, é fácil concluir que

$$\vec{e}_t = \frac{1}{h_t}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad \vec{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad , \tag{A-8}$$

onde

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x(t,u,v)\vec{e}_x + y(t,u,v)\vec{e}_y + z(t,u,v)\vec{e}_z$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{e}_z \ , \ \text{etc} \ ,$$

e com

$$h_t \equiv \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \ , \ \text{etc} \ .$$

Os parâmetros h_t, h_u e h_v são chamados *fatores de escala*. Para interpretá-los geometricamente, calculemos um elemento de comprimento de arco na curva coordenada de t:

$$ds = \left|\overrightarrow{dr}\right|_{\substack{u \text{ e } v \\ \text{fixos}}} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}dt\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right| dt = h_t\, dt \qquad (\text{se } dt > 0) \ .$$

Logo, genericamente, temos que, *multiplicando o fator de escala de uma coordenada pelo diferencial dela obtemos o elemento de comprimento de arco da sua curva coordenada.*

Os versores definem um *sistema de eixos local* em cada ponto do espaço. Eles, obviamente, são ortogonais se o sistema de coordenadas curvilíneas for ortogonal. Nesse caso, por conveniência, as coordenadas são ordenadas no terno (t,u,v) de modo que $\vec{e}_t$-$\vec{e}_u$-$\vec{e}_v$, nessa ordem, forme um trio "destro" (i.e., para o qual vale a regra da mão direita). Obviamente, trios "sinistros" (consoante a regra da mão esquerda) também podem ser empregados. Apenas no caso de um sistema ortogonal, os versores são normais às superfícies coordenadas ($\vec{e}_t$ é normal à superfície $t = \text{const.}$, $\vec{e}_u$ o é à $u = \text{const.}$, etc).

Note que, em geral, os ângulos entre os eixos podem variar de um ponto a outro e, mesmo que esses ângulos permaneçam os mesmos (e.g., todos retos, no caso de um sistema ortogonal), as orientações dos versores curvilíneos (em relação aos versores cartesianos $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$) ainda podem mudar de ponto a ponto. Além disso, as coordenadas t, u e v podem não ter o significado geométrico de comprimento e, portanto, dt, du e dv não são necessariamente elementos de comprimento de arco (ds) ao longo das curvas coordenadas correspondentes.

Substituindo na Eq. (A-7) as fórmulas de cálculo dos versores, dadas pelas Eqs. (A-8), obtemos a seguinte fórmula para o jacobiano:

$$J = h_t\, h_u\, h_v\; \vec{e}_t \cdot \vec{e}_u \times \vec{e}_v \ . \tag{A-9}$$

Nota: *A partir desse ponto, toda discussão é restrita a coordenadas curvilíneas ortogonais*, muito empregadas na Física.

Se $\vec{e}_t$, $\vec{e}_u$ e $\vec{e}_v$ são ortogonais, então

$$\begin{aligned} h_t\, h_u\; \vec{e}_t \cdot \vec{e}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{e}_z\right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \ , \quad \text{etc} \ , \end{aligned}$$

que são as chamadas *relações de ortogonalidade*. Verifiquemo-las, em particular, para os versores $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\theta$ do sistema de coordenadas esféricas:

$$\vec{r} = \vec{e}_x\, r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \vec{e}_y\, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \vec{e}_z\, r \cos\theta$$

$$\begin{aligned}
h_r\, h_\theta\, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta &= \left(\partial\vec{r}/\partial r\right)\cdot\left(\partial\vec{r}/\partial\theta\right) = \\
&= (\vec{e}_x \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \vec{e}_z \cos\theta)\cdot(\vec{e}_x\, r\cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\, r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \vec{e}_z\, r\operatorname{sen}\theta) \\
&= (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)(r\cos\theta\cos\varphi) + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)(r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi) + (\cos\theta)(-r\operatorname{sen}\theta) \\
&= \underbrace{r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi}_{r\operatorname{sen}\theta\cos\theta} - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0
\end{aligned}$$

O deslocamento infinitesimal, sendo a diferencial de $\vec{r}(t,u,v)$ [cf. Eq. (A-2)], é dado por

$$\overrightarrow{dr} = d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv = h_t\, dt\,\vec{e}_t + h_u\, du\,\vec{e}_u + h_v\, dv\,\vec{e}_v \qquad \text{(A-10)}$$

e, portanto, o elemento de comprimento arco é

$$ds = \left|\,\overrightarrow{dr}\,\right| = \left|\, h_t\,\vec{e}_t\, dt + h_u\,\vec{e}_u\, du + h_v\,\vec{e}_v\, dv\,\right| = \sqrt{h_t^2\, dt^2 + h_u^2\, du^2 + h_v^2\, dv^2} \quad . \qquad \text{(A-11)}$$

O elemento de volume pode ser calculado multiplicando-se os três elementos de comprimento de arco, mutuamente perpendiculares, correspondentes às três curvas coordenadas:

$$dV = (h_t\, dt)(h_u\, du)(h_v\, dv) = h_t\, h_u\, h_v\, dt\, du\, dv \quad , \qquad \text{(A-12)}$$

donde, tendo em conta que $dV = |J|\, dt\, du\, dv$, tiramos que

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,v)}\right| = h_t\, h_u\, h_v \quad . \qquad \text{(A-13)}$$

Essa fórmula também pode ser obtida daquela na Eq. (A-9), uma vez que, sendo ortogonais e unitários os versores, o produto misto tem módulo unitário.

A expressão do elemento de área de uma superfície coordenada é a seguinte:

$$dS = (h_t\, dt)(h_u\, du) = h_t\, h_u\, dt\, du \qquad \text{(da superfície } v = \text{const.)} \;; \qquad \text{(A-14)}$$

isto é, o elemento de área de uma superfície coordenada é dado pelo produto dos fatores de escala e os diferenciais das duas coordenadas que variam naquela superfície.

Exemplo – Os versores e o elemento de comprimento de arco, volume e área em coordenadas esféricas:

$$\vec{r} = \vec{e}_x\, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \vec{e}_z\, r\cos\theta$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_x \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \vec{e}_z\cos\theta \;\Rightarrow\; h_r = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \vec{e}_x\, r\cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\, r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \vec{e}_z\, r\operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; h_\theta = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = r$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\vec{e}_x\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \vec{e}_y\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad h_\varphi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \vec{e}_z\cos\theta$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \vec{e}_x\cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi - \vec{e}_z\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\vec{e}_x\,\mathrm{sen}\,\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi$$

$$ds = \sqrt{h_r^2\,dr^2 + h_\theta^2\,d\theta^2 + h_\varphi^2\,d\varphi^2} = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\varphi^2}$$

$$dV = h_r\,h_\theta\,h_\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \underbrace{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}_{|J|}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$dS = h_\theta\,h_\varphi\,d\theta\,d\varphi = r_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi$ é o elemento de área da superfície esférica $r = r_0 =$ const.

$dS = h_r\,h_\varphi\,dr\,d\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,dr\,d\varphi$ é o elemento de área da superfície cônica $\theta = \theta_0 =$ const.

$dS = h_r\,h_\theta\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$ é o elemento de área da superfície plana $\varphi = \varphi_0 =$ const.

Vale a pena listar os fatores de escala dos principais sistemas de coordenadas:

- $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho$ (coordenadas polares)
- $h_x = 1, \quad h_y = 1, \quad h_z = 1$ (coordenadas cartesianas)
- $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ (coordenadas esféricas)
- $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1$ (coordenadas cilíndricas)

c) Gradiente, Divergência, Laplaciano e Rotacional.

[Este tópico é desenvolvido de outra maneira no item (j) da Seç. 12-2.]

Calculemos o gradiente de uma função escalar $f(t,u,v)$:

$$\left.\begin{aligned}\nabla f &= (\nabla f)_t\vec{e}_t + (\nabla f)_u\vec{e}_u + (\nabla f)_v\vec{e}_v\\ \overrightarrow{dr} &= h_t\,dt\,\vec{e}_t + h_u\,du\,\vec{e}_u + h_v\,dv\,\vec{e}_v\end{aligned}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} df = \nabla f\cdot\overrightarrow{dr} &= h_t\,(\nabla f)_t\,dt + h_u\,(\nabla f)_u\,du + h_v\,(\nabla f)_v\,dv\\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\end{aligned}\right\rangle \underset{\text{(que se justifica pelo fato de } \overrightarrow{dr} \text{ ser arbitrário)}}{\overset{\text{igualando os coeficientes de } dt,\, du \text{ e } dv}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow\quad (\nabla f)_t = \frac{1}{h_t}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad (\nabla f)_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad (\nabla f)_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\ ;$$

ou seja, o gradiente de f é dado por

$$\nabla f = \frac{1}{h_t}\frac{\partial f}{\partial t}\vec{e}_t + \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v \quad . \tag{A-15}$$

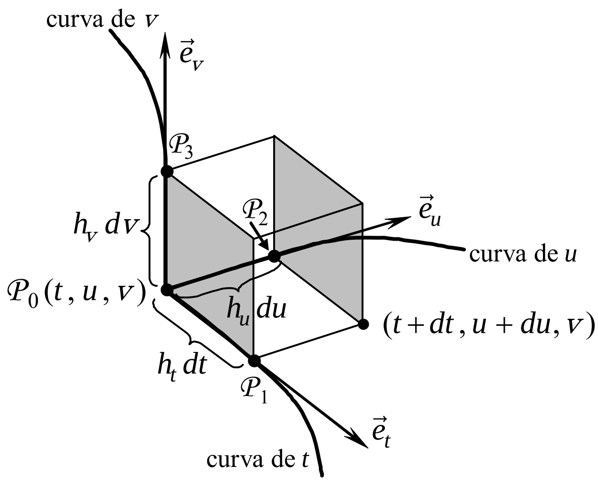
Nota: Uma outra maneira de se obter tal expressão do gradiente em coordenadas curvilíneas é a seguinte:

$$\begin{aligned}(\nabla f)_t &= \vec{e}_t \cdot \nabla f = \frac{1}{h_t}\nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{e}_z\right)\\ &= \frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{1}{h_t}\frac{\partial f}{\partial t} \quad ,\end{aligned} \tag{A-16}$$

onde empregamos a regra da cadeia. De modo análogo obtêm-se $(\nabla f)_u = (\partial f/\partial u)/h_u$ e $(\nabla f)_v = (\partial f/\partial v)/h_v$.

Concluímos que o operador nabla tem a seguinte expressão:

$$\nabla = \frac{\vec{e}_t}{h_t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} \quad .$$



Para obter a expressão da divergência de um campo vetorial

$$\vec{F}(t,u,v) = \vec{e}_t\, F_t(t,u,v) + \vec{e}_u\, F_u(t,u,v) + \vec{e}_v\, F_v(t,u,v) \ ,$$

considere o elemento de volume dV, com um dos vértices no ponto $(t,\ u,\ v)$ e cujos lados são elementos de comprimento de arco das curvas coordenadas, como mostra a figura; de acordo com o teorema de Gauss, temos que

$$\nabla\cdot\vec{F}(t,u,v)\, dV = \left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}\right\}_{\substack{\text{superfície}\\ \text{de } dV}} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{dV}\left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}\right\}_{\substack{\text{superfície}\\ \text{de } dV}} \quad . \tag{A-17}$$

O fluxo de $\vec{F}$ na superfície de dV pode ser dividido em três partes, cada uma consistindo no fluxo em duas faces opostas de dV, sendo o elemento do fluxo em cada face tomado como o valor de $\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}$ no vértice da face — nas faces ortogonais a $\vec{e}_u$ usamos os vértices $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_2$, nas ortogonais a $\vec{e}_t$, $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$, nas ortogonais a $\vec{e}_v$, $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_3$. Assim, o fluxo nas faces hachuradas na figura é dado por

$$\frac{\left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}\right\}_{\text{parte hachurada}}}{dV} = \frac{\left[\vec{F}\cdot\vec{e}_u\, h_t\, dt\, h_v\, dv\right]_{\mathcal{P}_2} + \left[\vec{F}\cdot(-\vec{e}_u)\, h_t\, dt\, h_v\, dv\right]_{\mathcal{P}_0}}{h_t\, h_u\, h_v\, dt\, du\, dv}$$

$$= \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v\; dt\, du\, dv} \underbrace{\left\{ \left[F_u\, h_t\, h_v \right]_{(t,\,u+du,\,v)} - \left[F_u\, h_t\, h_v \right]_{(t,u,v)} \right\}}_{\frac{\partial}{\partial u}(F_u\, h_t\, h_v)\, du} dt\, dv$$

$$= \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v} \frac{\partial}{\partial u}(F_u\, h_t\, h_v) \ .$$

Expressões análogas a esta são obtidas para os outros dois pares de faces opostas:

$$\frac{1}{dV}\left\{ \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} \right\}_{\substack{\text{faces orto-} \\ \text{gonais a } \vec{e}_t}} = \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v} \frac{\partial}{\partial t}(F_t\, h_u\, h_v) \ ,$$

$$\frac{1}{dV}\left\{ \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} \right\}_{\substack{\text{faces orto-} \\ \text{gonais a } \vec{e}_v}} = \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v} \frac{\partial}{\partial v}(F_v\, h_t\, h_u) \ .$$

Adicionando-as, encontramos o resultado desejado:

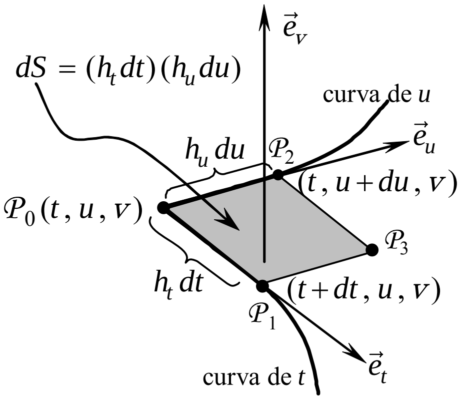
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v} \left[\frac{\partial}{\partial t}(F_t\, h_u\, h_v) + \frac{\partial}{\partial u}(F_u\, h_t\, h_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v\, h_t\, h_u) \right] \ . \qquad \text{(A-18)}$$

O laplaciano de $f(t,u,v)$ é facilmente calculado como segue:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\frac{1}{h_t} \frac{\partial f}{\partial t} \vec{e}_t + \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v \right)$$

$$= \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{h_t} \frac{\partial f}{\partial t} h_u\, h_v \right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} h_t\, h_v \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} h_t\, h_u \right) \right]$$

Por fim, calculemos em coordenadas curvilíneas o rotacional do mesmo campo vetorial que empregamos acima no cálculo da divergência. A figura mostra um elemento de área dS da superfície coordenada $v =$ const., com um dos vértices no ponto (t,u,v) e cujos lados são elementos de comprimento de arco ao longo de curvas coordenadas (que são, no caso, as curvas de t e de u, contidas naquela superfície); de acordo com o teorema de Stokes, temos que:



$$dS\; \vec{e}_v \cdot \nabla \times \vec{F}(t,u,v) = \left\{ \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} \right\}_{\substack{\text{borda} \\ \text{de } dS}} \quad \Rightarrow \quad \left(\nabla \times \vec{F} \right)_v = \frac{1}{h_t\, dt\, h_u\, du} \left\{ \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} \right\}_{\substack{\text{borda} \\ \text{de } dS}} \ .$$

A circulação de $\vec{F}$ na borda de dS pode ser dividida em duas partes, cada uma consistindo na circulação em dois lados opostos de dS, sendo o elemento de circulação em cada lado tomado como o valor de $\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$ na extremidade do lado: $\mathcal{P}_0$ no lado $\overrightarrow{\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1}$ e $\mathcal{P}_2$ no lado $\overrightarrow{\mathcal{P}_3\mathcal{P}_2}$ bem como $\mathcal{P}_0$ no lado $\overrightarrow{\mathcal{P}_2\mathcal{P}_0}$ e $\mathcal{P}_1$ no lado $\overrightarrow{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3}$ (lados orientados positivamente em relação à normal $\vec{e}_v$). Assim, a circulação na borda de *dS* é

$$\left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}\right\}_{\substack{\text{borda}\\ \text{de } dS}} = \left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}\right\}_{\overrightarrow{\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1}} + \left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}\right\}_{\overrightarrow{\mathcal{P}_3\mathcal{P}_2}} + \left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}\right\}_{\overrightarrow{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3}} + \left\{\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}\right\}_{\overrightarrow{\mathcal{P}_2\mathcal{P}_0}}$$

$$= \left[\vec{F}\cdot\vec{e}_t\, h_t\, dt\right]_{\mathcal{P}_0} + \left[\vec{F}\cdot(-\vec{e}_t)\, h_t\, dt\right]_{\mathcal{P}_2} + \left[\vec{F}\cdot\vec{e}_u\, h_u\, du\right]_{\mathcal{P}_1} + \left[\vec{F}\cdot(-\vec{e}_u)\, h_u\, du\right]_{\mathcal{P}_0}$$

$$= \underbrace{\left[\left(F_t\, h_t\right)_{(t,u,v)} - \left(F_t\, h_t\right)_{(t,u+du,v)}\right]}_{-\frac{\partial}{\partial u}(F_t\, h_t)\, du} dt + \underbrace{\left[\left(F_u\, h_u\right)_{(t+dt,u,v)} - \left(F_u\, h_u\right)_{(t,u,v)}\right]}_{\frac{\partial}{\partial t}(F_u\, h_u)\, dt} du$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(F_u\, h_u\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(F_t\, h_t\right)\right] dt\, du\ .$$

Substituindo, obtemos

$$\vec{e}_v\left(\nabla\times\vec{F}\right)_v = \frac{\vec{e}_v}{h_t\, dt\, h_u\, du}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(F_u\, h_u\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(F_t\, h_t\right)\right] dt\, du = \frac{\vec{e}_v}{h_t\, h_u}\begin{vmatrix}\partial/\partial t & \partial/\partial u\\ F_t\, h_t & F_u\, h_u\end{vmatrix}\ .$$

De modo análogo encontramos

$$\vec{e}_t\left(\nabla\times\vec{F}\right)_t = \frac{\vec{e}_t}{h_u\, h_v}\begin{vmatrix}\partial/\partial u & \partial/\partial v\\ F_u\, h_u & F_v\, h_v\end{vmatrix}\ ;\quad \vec{e}_u\left(\nabla\times\vec{F}\right)_u = \frac{\vec{e}_u}{h_t\, h_v}\begin{vmatrix}\partial/\partial v & \partial/\partial t\\ F_v\, h_v & F_t\, h_t\end{vmatrix}\ .$$

Note que a ordem das colunas nos determinantes é determinada pela ordem dos versores no 2º membro das fórmulas $\vec{e}_v = \vec{e}_t\times\vec{e}_u$, $\vec{e}_t = \vec{e}_u\times\vec{e}_v$ e $\vec{e}_u = \vec{e}_v\times\vec{e}_t$.

O rotacional é, então, dado por

$$\nabla\times\vec{F} = \vec{e}_t\left(\nabla\times\vec{F}\right)_t + \vec{e}_u\left(\nabla\times\vec{F}\right)_u + \vec{e}_v\left(\nabla\times\vec{F}\right)_v$$

$$= \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v}\left\{ h_t\,\vec{e}_t\begin{vmatrix}\partial/\partial u & \partial/\partial v\\ F_u\, h_u & F_v\, h_v\end{vmatrix} - h_u\,\vec{e}_u\begin{vmatrix}\partial/\partial t & \partial/\partial v\\ F_t\, h_t & F_v\, h_v\end{vmatrix} + h_v\,\vec{e}_v\begin{vmatrix}\partial/\partial t & \partial/\partial u\\ F_t\, h_t & F_u\, h_u\end{vmatrix}\right\},$$

ou

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_t\, h_u\, h_v}\begin{vmatrix} h_t\,\vec{e}_t & h_u\,\vec{e}_u & h_v\,\vec{e}_v\\ \dfrac{\partial}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v}\\ h_t\, F_t & h_u\, F_u & h_v\, F_v\end{vmatrix}\ . \qquad \text{(A-19)}$$

Exemplo – Gradiente, divergência, laplaciano e rotacional em coordenadas esféricas:

Considere o campo escalar $f(r,\theta,\varphi)$ e o campo vetorial $\vec{F}(r,\theta,\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi$. Tendo em conta que $h_r = 1$, $h_\theta = r$ e $h_\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, temos que:

$$\nabla f = \frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{F} &= \frac{1}{h_r\,h_\theta\,h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r\,h_\theta\,h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\,h_r\,h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi\,h_r\,h_\theta)\right]\\ &= \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,F_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,F_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\,F_\varphi)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,F_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}\,\theta\,F_\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{h_r\,h_\theta\,h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}h_\theta\,h_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}h_r\,h_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}h_r\,h_\theta\right)\right]\\ &= \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}r\right)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_r\,h_\theta\,h_\varphi}\begin{vmatrix} h_r\,\vec{e}_r & h_\theta\,\vec{e}_\theta & h_\varphi\,\vec{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ h_r\,F_r & h_\theta\,F_\theta & h_\varphi\,F_\varphi\end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\,\vec{e}_\theta & r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_r & r\,F_\theta & r\,\mathrm{sen}\,\theta\,F_\varphi\end{vmatrix}$$

Para dar um exemplo concreto do cálculo do rotacional, considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F} = \underbrace{(r\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi)}_{F_r}\,\vec{e}_r + \underbrace{(r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi)}_{F_\theta}\,\vec{e}_\theta + \underbrace{(r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\varphi)}_{F_\varphi}\vec{e}_\varphi \quad ;$$

temos que

$$r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\nabla\times\vec{F} =$$

$$= \vec{e}_r\left[\frac{\partial(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,F_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial\varphi}\right] + r\,\vec{e}_\theta\left[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,F_\varphi)}{\partial r}\right] + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{e}_\varphi\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right] .$$

Efetuando as contas chegamos ao resultado

$$\nabla\times\vec{F} = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \quad .$$

É instrutivo substituir nesta equação as expressões dos versores esféricos em termos dos versores cartesianos(*) $\nabla\times\vec{F}=\vec{e}_z=\nabla\times(\,x\,\vec{e}_y\,)$, assim se obtendo o rotacional em coordenadas cartesianas, nas quais, podemos então notar que o campo vetorial considerado é $\vec{F}=x\,\vec{e}_y$ (de fato, substitua nesta equação $x=r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$ e $\vec{e}_y=\vec{e}_r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi+\vec{e}_\theta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi+\vec{e}_\varphi\cos\varphi$ e obtenha a expressão original do campo em coordenadas esféricas).

Exercício do uso de coordenadas curvilíneas

Exercício 1: Considere as coordenadas cilíndricas parabólicas (u,v,z), definidas pela seguinte lei de transformação entre as coordenadas cartesianas e elas:

$$x=(u^2-v^2)/2,\quad y=u\,v\,,\quad z=z\qquad[\,u\,,v\,,z\in\mathbb{R}\,]\ .$$

a) Determine os fatores de escala e os versores.

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial x}{\partial u}=u & \dfrac{\partial x}{\partial v}=-v & \dfrac{\partial x}{\partial z}=0\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}=v & \dfrac{\partial y}{\partial v}=u & \dfrac{\partial y}{\partial z}=0\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u}=0 & \dfrac{\partial z}{\partial v}=0 & \dfrac{\partial z}{\partial z}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{e}_x\dfrac{\partial x}{\partial u}+\vec{e}_y\dfrac{\partial y}{\partial u}+\vec{e}_z\dfrac{\partial z}{\partial u}=u\,\vec{e}_x+v\,\vec{e}_y\\[2ex] \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{e}_x\dfrac{\partial x}{\partial v}+\vec{e}_y\dfrac{\partial y}{\partial v}+\vec{e}_z\dfrac{\partial z}{\partial v}=-v\,\vec{e}_x+u\,\vec{e}_y\\[2ex] \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z}=\vec{e}_x\dfrac{\partial x}{\partial z}+\vec{e}_y\dfrac{\partial y}{\partial z}+\vec{e}_z\dfrac{\partial z}{\partial z}=\vec{e}_z\end{array}\right.$$

$$h_u=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|=\sqrt{u^2+v^2}\quad\text{e}\quad\vec{e}_u=\frac{1}{h_u}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{u\,\vec{e}_x+v\,\vec{e}_y}{\sqrt{u^2+v^2}}\qquad\blacksquare$$

$$h_v=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{u^2+v^2}\quad\text{e}\quad\vec{e}_v=\frac{1}{h_v}\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\frac{-v\,\vec{e}_x+u\,\vec{e}_y}{\sqrt{u^2+v^2}}\qquad\blacksquare$$

$$h_z=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=1\quad\text{e}\quad\vec{e}_z=\frac{1}{h_z}\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}=\vec{e}_z\qquad\blacksquare$$

b) Mostre que o sistema é ortogonal.

$$\vec{e}_u\cdot\vec{e}_v=\frac{-u\,v+v\,u}{u^2+v^2}=0\ ,\quad\vec{e}_u\cdot\vec{e}_z=0\ ,\quad\vec{e}_v\cdot\vec{e}_z=0\qquad\blacksquare$$

(*) Relações entre os versores esféricos e cartesianos:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{e}_r=\vec{e}_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi+\vec{e}_y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi+\vec{e}_z\cos\theta\\ \vec{e}_\theta=\vec{e}_x\cos\theta\cos\varphi+\vec{e}_y\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi-\vec{e}_z\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \vec{e}_\varphi=-\vec{e}_x\,\mathrm{sen}\,\varphi+\vec{e}_y\cos\varphi\end{array}\right\rangle\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{e}_x=\vec{e}_r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi+\vec{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi-\vec{e}_\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\\ \vec{e}_y=\vec{e}_r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi+\vec{e}_\theta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi+\vec{e}_\varphi\cos\varphi\\ \vec{e}_z=\vec{e}_r\cos\theta-\vec{e}_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\end{array}\right.$$

c) Expresse o campo vetorial $\vec{A} = z\vec{e}_x + 2x\vec{e}_y - 3y\vec{e}_z$ *nesse sistema.*

$$\vec{A} = z\vec{e}_x + (u^2 - v^2)\vec{e}_y - 3uv\vec{e}_z \qquad (*)$$

$$A_u = \vec{A}\cdot\vec{e}_u = \frac{zu + (u^2 - v^2)v}{\sqrt{u^2+v^2}}\ ,\quad A_v = \vec{A}\cdot\vec{e}_v = \frac{-zv + (u^2 - v^2)u}{\sqrt{u^2+v^2}}\ ,\quad A_z = \vec{A}\cdot\vec{e}_z = -3uv$$

$$\vec{A}(u,v,z) = A_u\vec{e}_u + A_v\vec{e}_v + A_z\vec{e}_z = \frac{zu + (u^2 - v^2)v}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{e}_u + \frac{-zv + (u^2 - v^2)u}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{e}_v - 3uv\vec{e}_z \quad \blacksquare$$

d) Expresse os versores cartesianos em termos dos versores curvilíneos.

Já deduzimos que $\begin{cases} u\vec{e}_x + v\vec{e}_y = \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_u & \text{(I)} \\ -v\vec{e}_x + u\vec{e}_y = \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_v & \text{(II)} \end{cases}$

Fazendo $(\mathrm{I})\times u - (\mathrm{II})\times v$ e $(\mathrm{I})\times v + (\mathrm{II})\times u$, obtemos

$$\vec{e}_x = \frac{u\vec{e}_u - v\vec{e}_v}{\sqrt{u^2+v^2}} \quad \text{e} \quad \vec{e}_y = \frac{v\vec{e}_u + u\vec{e}_v}{\sqrt{u^2+v^2}} \quad \blacksquare \qquad (\#)$$

e) Expresse a velocidade de uma partícula neste sistema.

$$\left.\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial x}{\partial z}\dot{z} = u\dot{u} - v\dot{v} \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial y}{\partial z}\dot{z} = v\dot{u} + u\dot{v} \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial z}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial z}{\partial z}\dot{z} = \dot{z}\ \text{(óbvio)} \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \quad \vec{V} = (u\dot{u} - v\dot{v})\vec{e}_x + (v\dot{u} + u\dot{v})\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \qquad (\dagger)$$

O vetor $\vec{V}$ na Eq. (†) está expresso na mesma forma do vetor $\vec{A}$ dado no item *(c)* pela Eq. (∗); logo, podemos prosseguir segundo o método daquele item:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (\vec{V}\cdot\vec{e}_u)\vec{e}_u + (\vec{V}\cdot\vec{e}_v)\vec{e}_v + (\vec{V}\cdot\vec{e}_z)\vec{e}_z \\ &= \frac{(u\dot{u} - v\dot{v})u + (v\dot{u} + u\dot{v})v}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{e}_u + \frac{(u\dot{u} - v\dot{v})(-v) + (v\dot{u} + u\dot{v})u}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{e}_v + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \frac{(u^2+v^2)\dot{u}}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{e}_u + \frac{(u^2+v^2)\dot{v}}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{e}_v + \dot{z}\vec{e}_z = \sqrt{u^2+v^2}\,(\dot{u}\vec{e}_u + \dot{v}\vec{e}_v) + \dot{z}\vec{e}_z \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Um segundo modo de obter esse resultado consiste em substituir na Eq. (†) as expressões dos versores cartesianos em termos dos versores curvilíneos obtidas no item *(d)*, dadas pela Eq. (#).

f) Determine o quadrado do elemento de comprimento de arco.

$$ds^2 \;=\; h_u^2 du^2 + h_v^2 dv^2 + h_z^2 dz^2 \;=\; (u^2+v^2)\,du^2 + (u^2+v^2)\,dv^2 + dz^2 \quad \blacksquare$$

g) Determine o elemento de volume e o jacobiano da transformação para as coordenadas curvilíneas.

$$dV \;=\; h_u\, h_v\, h_z\, du\, dv\, dz \;=\; (u^2+v^2)\, du\, dv\, dz \quad \blacksquare$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} \;=\; h_u\, h_v\, h_z \;=\; u^2+v^2 \quad \blacksquare$$

h) Expresse o gradiente, a divergência, o laplaciano e o rotacional no sistema curvilíneo dado.

Sejam $f(u,v,z)$ e $\vec{B}(u,v,z)$ campos escalar e vetorial respectivamente. Temos que

$$\nabla f = \frac{\vec{e}_u}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\vec{e}_z}{h_z}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\vec{e}_u}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial v} + \vec{e}_z\frac{\partial f}{\partial z} \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= \frac{1}{h_u h_v h_z}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(B_u h_v h_z\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B_v h_u h_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B_z h_u h_v\right)\right] \\
&= \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(B_u\sqrt{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B_v\sqrt{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B_z\,(u^2+v^2)\right)\right] \\
&= \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(B_u\sqrt{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B_v\sqrt{u^2+v^2}\right)\right] + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para obter a expressão do laplaciano, tendo em conta que $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$, podemos usar a expressão acima do $\nabla \cdot \vec{B}$ com $\vec{B} = \nabla f$, ou seja, substituir nela, no lugar de B_u, B_v e B_z, os já calculados componentes de ∇f:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left((\nabla f)_u\sqrt{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left((\nabla f)_u\sqrt{u^2+v^2}\right)\right] + \frac{\partial(\nabla f)_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f/\partial u}{\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f/\partial v}{\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{u^2+v^2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(É claro que também podemos empregar diretamente a expressão

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_z}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{h_v h_z}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{h_z h_u}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h_u h_v}{h_z}\frac{\partial f}{\partial z}\right]\right\}$$

do laplaciano para nela substituir os fatores de escala já calculados e obter o mesmo resultado.)

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{h_u h_v h_z}\begin{vmatrix} h_u\,\vec{e}_u & h_v\,\vec{e}_v & h_z\,\vec{e}_z \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial z \\ h_u\,B_u & h_v\,B_v & h_z\,B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_u & \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_v & \vec{e}_z \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial z \\ \sqrt{u^2+v^2}\,B_u & \sqrt{u^2+v^2}\,B_v & B_z \end{vmatrix}$$

i) Usando as expressões da divergência e do rotacional obtidas no item (h), calcule $\nabla\cdot\vec{A}$ e $\nabla\times\vec{A}$, onde $\vec{A}(\vec{r})$ é o campo vetorial dado no item (c). Faça os cálculos também em coordenadas cartesianas, obtendo, obviamente, o mesmo resultado.

$$\vec{A} \;=\; z\,\vec{e}_x + 2x\vec{e}_y - 3y\,\vec{e}_z \;=\; \frac{z\,u + (u^2-v^2)\,v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{e}_u + \frac{-z\,v + (u^2-v^2)\,u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{e}_v - 3u\,v\,\vec{e}_z \;.$$

DIVERGÊNCIA:

$$\nabla\cdot\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) + \frac{\partial}{\partial z}(-3y) = 0 \quad \blacksquare$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(u,v,z) = (u^2+v^2)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\Big(A_u\sqrt{u^2+v^2}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(A_v\sqrt{u^2+v^2}\Big)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= (u^2+v^2)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\Big(z\,u + (u^2-v^2)\,v\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(-z\,v + (u^2-v^2)\,u\Big)\right] + \frac{\partial(-3uv)}{\partial z}$$

$$= (u^2+v^2)^{-1}\Big[\big(z+2uv\big) + \big(-z-2uv\big)\Big] + 0 \;=\; 0 \quad \blacksquare$$

ROTACIONAL:

$$\nabla\times\vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & 2x & -3y \end{vmatrix} = \vec{e}_x\,(-3) + \vec{e}_y\,(1) + \vec{e}_z\,(2) \quad \blacksquare$$

$$\nabla\times\vec{A}(u,v,z) = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_u & \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_v & \vec{e}_z \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial z \\ \sqrt{u^2+v^2}\,A_u & \sqrt{u^2+v^2}\,A_v & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_u & \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_v & \vec{e}_z \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial z \\ zu + (u^2-v^2)\,v & -z\,v + (u^2-v^2)\,u & -3u\,v \end{vmatrix}$$

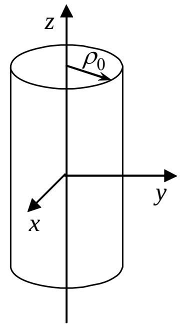
$$= (u^2+v^2)^{-1}\left[\underbrace{\sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_u}_{u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y}\big(-3u+v\big) + \underbrace{\sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_v}_{-v\,\vec{e}_x + u\,\vec{e}_y}\big(u+3v\big) + \vec{e}_z\,\Big(3u^2 - v^2 - u^2 + 3v^2\Big)\right]$$

$$= (u^2+v^2)^{-1}\left[\vec{e}_x\left(\underbrace{-3u^2 + vu - uv - 3v^2}_{-3\,(u^2+v^2)}\right) + \vec{e}_y\left(\underbrace{-3uv + v^2 + u^2 + 3uv}_{u^2+v^2}\right) + \vec{e}_z\left(\underbrace{2u^2 + 2v^2}_{2\,(u^2+v^2)}\right)\right]$$

$$= -3\,\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\,\vec{e}_z \quad \blacksquare$$

Exercício 2: Escolha um sistema de coordenadas apropriado e calcule dS e $\overrightarrow{dS}$ para cada superfície:

superfície cilíndrica

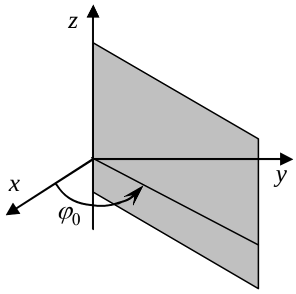


Coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z)

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{e}_\rho$$

$$dS = h_\varphi\,d\varphi\,h_z\,dz = \rho\,d\varphi\,dz$$

porção de plano



Coord. cilíndricas (ρ,φ,z)

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{e}_\varphi$$

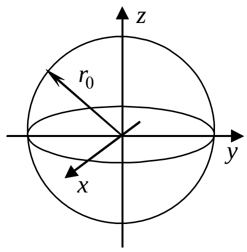
$$dS = h_\rho\,d\rho\,h_z\,dz = d\rho\,dz$$

Coord. esféricas (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{e}_\varphi$$

$$dS = h_r\,dr\,h_\theta\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

superfície esférica

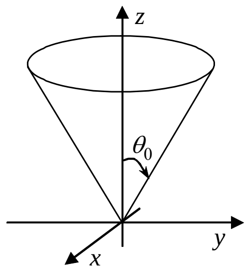


Coordenadas esféricas (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{e}_r$$

$$dS = h_\theta\,d\theta\,h_\varphi\,d\varphi = r_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi$$

superfície cônica



Coordenadas esféricas (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{e}_\theta$$

$$dS = h_r\,dr\,h_\varphi\,d\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,dr\,d\varphi$$

Exercício 3: No sistema de coordenadas curvilíneas u_1, u_2 e u_3, cujos fatores de escala são h_1, h_2 e h_3, respectivamente, obtenha a expressão da energia cinética de uma partícula em termos dos momentos canônicos $p_i = \partial T / \partial \dot{u}_i$ (potencial independente das velocidades).

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}m\,\frac{\sum_{i=1}^{3} h_i^2\,du_i^2}{dt^2} = \frac{1}{2}m\sum_i h_i^2\dot{u}_i^2 \quad .$$

Por outro lado, temos que

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{u}_i} \sum_j h_j^2 \dot{u}_j^2 = \frac{1}{2} m \sum_j h_j^2 \frac{\partial \dot{u}_j^2}{\partial \dot{u}_i} = \frac{1}{2} m \sum_j h_j^2 \, 2\dot{u}_j \underbrace{\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial \dot{u}_i}}_{\begin{cases} 0 \text{ se } j \neq i \\ 1 \text{ se } j = i \end{cases}} = m h_i^2 \, \dot{u}_i \;\Rightarrow\; \dot{u}_i = p_i / m h_i^2 .$$

Logo,

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i h_i^2 \,(p_i / m h_i^2)^2 = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 / h_i^2 \quad .$$

Por exemplo, em coordenadas esféricas, temos que

$$T = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_r^2}{h_r^2} + \frac{p_\theta^2}{h_\theta^2} + \frac{p_\varphi^2}{h_\varphi^2} \right) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) \quad .$$

Nota: O aluno que não se sente confortável com as operações com diferenciais acima, imagine-as realizadas *antes* de se tomar o limite:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \lim_{\Delta t \to \infty} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{(\Delta s)^2}{(\Delta t)^2} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{3} h_i^2 (\Delta u_i)^2}{(\Delta t)^2} = \lim_{\Delta t \to \infty} \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \left(\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta u_i}{\Delta t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \dot{u}_i^2 \quad .$$

Exercício 4: No sistema de coordenadas esféricas, mostre que

$$(\vec{r} \times \nabla)^2 \psi = r^2 \nabla^2 \psi - r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \left[\text{i.e., } (\vec{r} \times \nabla)^2 \psi = r^2 (\nabla^2 \psi - \nabla_r^2 \psi) = \nabla_\Omega^2 \psi \right] ,$$

onde, entre os colchetes acima, fizemos uso da seguinte notação para o laplaciano:

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) = \nabla_r^2 \psi + \frac{1}{r^2} \nabla_\Omega^2 \psi \quad ,$$

com

$$\nabla_r^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \text{e} \qquad \nabla_\Omega^2 \psi \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad .$$

Temos que

$$\vec{r} \times \nabla = r \vec{e}_r \times \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad ;$$

logo;

$$(\vec{r} \times \nabla)^2 = \left(\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$= \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \vec{e}_\varphi \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}}_{\vec{0}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - \vec{e}_\varphi \cdot \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}}_{-\vec{e}_r} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &- \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}}_{\substack{-\vec{e}_r \operatorname{sen}\theta \\ -\vec{e}_\theta \cos\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \right) + \frac{\vec{e}_\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi \cos\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_\theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{aligned} \right\} \boxed{\text{Vide a nota (*) ao final}}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 0 + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad ,$$

donde

$$\left(\vec{r} \times \nabla \right)^2 \psi = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \nabla^2_\Omega \psi \quad \blacksquare$$

Esta fórmula é usada, por exemplo, para se obter, na Mecânica Quântica, o operador associado ao momento angular quadrático a partir dos operadores associados à posição, $\hat{\vec{r}} = \vec{r}$, e ao momento linear, $\hat{\vec{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$:

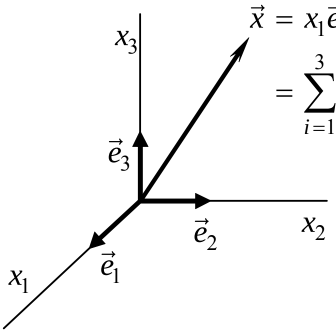
$$\widehat{L^2} = \left(\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \right)^2 = \left(\vec{r} \times (-\mathrm{i}\hbar\nabla) \right)^2 = -\hbar^2 \left(\vec{r} \times \nabla \right)^2 = -\hbar^2 \nabla^2_\Omega \psi \quad .$$

(*) Das expressões dos versores $\vec{e}_\theta$ e $\vec{e}_\varphi$ em componentes cartesianos obtidos na p. 76, o estudante pode facilmente deduzir que $\partial \vec{e}_\theta / \partial \theta = -\vec{e}_r$, $\partial \vec{e}_\theta / \partial \theta = \vec{e}_\varphi \cos\theta$, $\partial \vec{e}_\varphi / \partial \theta = \vec{0}$ e $\partial \vec{e}_\varphi / \partial \varphi = -\vec{e}_r \operatorname{sen}\theta - \vec{e}_\theta \cos\theta$.

Apêndice B – A convenção de Einstein para somatórios

Einstein teve uma idéia que, não obstante a sua simplicidade, simplifica consideravelmente a notação de expressões que envolvem somatórios. Juntamente com o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita apresentados abaixo, os cálculos são consideravelmente reduzidos. Antes de estudar, por exemplo, o Cálculo Tensorial, onde esses instrumentos mostram toda a sua praticidade, é necessário que o aluno aprenda a utilizá-los com destreza. Esse é o objetivo desta seção. Já aqui, demonstrando fórmulas da Análise Vetorial e do Cálculo Matricial, o aluno constatará a importância das técnicas apresentadas.

a) Representação vetorial na base canônica do $\mathbb{R}^3$



$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i$$

A base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é ortonormal:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \ ,$$

onde

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \qquad \text{(B-1)}$$

é o *delta de Kronecker*.

b) Produto escalar

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\sum_i x_i\,\vec{e}_i) \cdot (\sum_j y_j\,\vec{e}_j) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, \delta_{ij} = \sum_i x_i\,[\sum_j \underbrace{y_j\,\delta_{ij}}_{\substack{\neq 0 \text{ só} \\ \text{se } j=i}}]$$

$$= \sum_i x_i\,[y_i\,\underbrace{\delta_{ii}}_{1}] = \sum_i x_i\, y_i \quad . \qquad \text{(B-2)}$$

c) A convenção de Einstein para somatórios

Índices repetidos indicam um somatório, com os mesmos variando de 1 a, no nosso caso, 3; por exemplo, $\vec{x} = x_i\,\vec{e}_i = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3$. Nesta equação, dizemos que i é *índice de somatório* ou *mudo*, pois a sua variação indica as expressões que são somadas, podendo, obviamente, ser substituído por qualquer outro que não esteja sendo utilizado, ou seja, $\vec{x} = x_i\,\vec{e}_i = x_j\,\vec{e}_j$. Tal índice também é chamado de *ligado*, pois não é livre para apresentar qualquer um dos três valores possíveis; pelo contrário, estando ligado a um somatório, é condicionado a variar de 1 a 3 para gerar os termos que são somados.

Observe o uso dessa convenção no caso de produtos escalares:

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i\,\vec{e}_i \cdot y_j\,\vec{e}_j = x_i\, y_j\,\delta_{ij} = x_i\, y_i$ ou $x_j\, y_j$
- $\vec{x} \cdot \vec{e}_i = x_j\,\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = x_j\,\delta_{ij} = x_i$
- $|\vec{x}|^2 = x_i x_i = x_i^2$ (o que justifica admitir o índice i em x_i^2 repetido e indicando um somatório)

Note o procedimento para realizar somatórios envolvendo o delta de Kronecker: *se o índice k de δ_{kl} aparecer repetido (indicando um somatório), suprimimos esse delta de Kronecker e fazemos o outro índice k igual a l (assim efetuando tal somatório).* Exemplos: $\delta_{kl}\, A_{kij} = A_{lij}$,

$A_{ij}\, A_{jk}\, \delta_{kl} = A_{ij}\, A_{jl}\,, \quad \delta_{kl}\, \delta_{km} = \delta_{lm}$.

Um outro exemplo que bem elucida a convenção do somatório é o formado pela expressão

$$a_{ij}\, x_j \qquad (i = 1,2,3 \quad \text{e} \quad j = 1,2,3,4) \quad ,$$

que representa as três expressões lineares seguintes:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4 \end{cases}$$

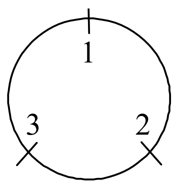
O índice j é o do somatório (mudo). Quanto ao índice i, ele pode ter qualquer dos valores $i = 1,2,3$ e identifica cada uma das três expressões, sendo por isso chamado de *índice livre ou identificador*.

Já a forma quadrática $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, x_j$, com 9 termos, é denotada por $a_{ij}\, x_i\, x_j$.

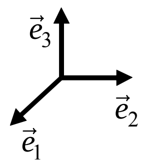
Quando um índice repetido não indicar um somatório, isso deverá ser dito explicitamente. Por exemplo, se $\vec{V}_i$ for o autovetor correspondente ao i-ésimo autovalor λ_i da matriz A, então $A\vec{V}_i = \lambda_i\, \vec{V}_i$ (sem somatório em i). Duas outras formas usadas para indicar que não há somatório num índice repetido consistem em colocá-lo entre parênteses $\left[\, A\vec{V}_{(i)} = \lambda_{(i)}\, \vec{V}_{(i)} \,\right]$ ou pô-lo maiúsculo $\left[\, A\vec{V}_I = \lambda_I\, \vec{V}_I \,\right]$.

d) <u>Produto</u> <u>vetorial</u>

i) Uma *permutação par (ímpar)* da tríade 1-2-3 é outra tríade dos mesmos algarismos que, para ser restaurada à tríade 1-2-3, é necessário um número par (ímpar) de transposições de algarismos adjacentes. Assim, 1-2-3, 2-3-1 e 3-1-2 são as permutações pares de 1-2-3; já 2-1-3, 1-3-2 e 3-2-1 são as permutações ímpares. [Outro modo de obter as tríades assim classificadas consiste em lê-las ao longo da circunferência à direita: no sentido horário obtemos as tríades pares e no anti-horário, as ímpares.]



ii) Observe que $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k$ ou $-\vec{e}_k$, caso i-j-k seja uma permutação par ou ímpar de 1-2-3, respectivamente:



$$\begin{cases} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \end{cases} \qquad \text{(vale a regra da mão direita)}$$

Agora, considere a seguinte definição:

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-}j\text{-}k \text{ for uma permutação par de 1-2-3} \\ -1 & \text{se } i\text{-}j\text{-}k \text{ for uma permutação ímpar de 1-2-3} \\ 0 & \text{se dois ou mais índices forem iguais} \end{cases} \tag{B-3}$$

ou seja, $\mathcal{E}_{123} = \mathcal{E}_{231} = \mathcal{E}_{312} = 1$, $\mathcal{E}_{132} = \mathcal{E}_{213} = \mathcal{E}_{321} = -1$, $\mathcal{E}_{122} = \mathcal{E}_{131} = \mathcal{E}_{332} = 0$, etc. Tal é o chamado *símbolo de permutação* ou *de Levi-Civita*. Observe que

$$\mathcal{E}_{ijk} = (-1)^P \ , \tag{B-4}$$

onde P é o número de transposições de índices adjacentes em $\mathcal{E}_{ijk}$ que os põem na ordem 1-2-3.

Observe que, de acordo com o item (d-ii), temos que:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \mathcal{E}_{ijk}\, \vec{e}_k \ . \tag{B-5}$$

De fato, se $i = j$ então essa equação é claramente verdadeira (ambos membros se anulam). Já quando $i \neq j$, o somatório no membro direito apresenta apenas um termo não nulo, aquele em que $k \neq i$ e $k \neq j$; ele é então reduzido a $+\vec{e}_k$ ou $-\vec{e}_k$, dependendo, respectivamente, de os índices de $\mathcal{E}_{ijk}$ formarem uma permutação par ou ímpar de 1-2-3.

iii) O produto vetorial de vetores genéricos $\vec{x} = x_i\, \vec{e}_i$ e $\vec{y} = y_j\, \vec{e}_j$ é dado por

$$\vec{x} \times \vec{y} = x_i\, \vec{e}_i \times y_j\, \vec{e}_j = x_i\, y_j\, \vec{e}_i \times \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \times \vec{y} = x_i\, y_j\, \mathcal{E}_{ijk}\, \vec{e}_k \ . \tag{B-6}$$

Verifique esta fórmula atribuindo os valores 1, 2 e 3 aos índices. Temos também que

$$\begin{aligned} \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \ \Rightarrow\ z_m = \vec{z} \cdot \vec{e}_m = x_i\, y_j\, \mathcal{E}_{ijk}\, \vec{e}_k \cdot \vec{e}_m = x_i\, y_j\, \mathcal{E}_{ijk}\, \delta_{km} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad z_m = (\vec{x} \times \vec{y})_m = \mathcal{E}_{ijm}\, x_i\, y_j \ . \end{aligned} \tag{B-7}$$

Uma outra maneira de deduzir essas expressões do produto vetorial $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ e do seu componente z_m consiste em primeiramente verificar que

$$\mathcal{E}_{ijk} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k \ , \tag{B-8}$$

através da qual obtemos

$$z_m = \vec{z} \cdot \vec{e}_m = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{e}_m = x_i \vec{e}_i \times y_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_m = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_m\, x_i\, y_j = \mathcal{E}_{ijm}\, x_i\, y_j \ ,$$

ou

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = z_m\, \vec{e}_m = \mathcal{E}_{ijm}\, x_i\, y_j\, \vec{e}_m \ . \tag{B-9}$$

e) Operações diferenciais (coordenadas cartesianas)

Sendo $\vec{r} = x_i\, \vec{e}_i$ o vetor posição, podemos denotar o campo escalar $\phi(\vec{r})$ e o vetorial $\vec{V}(\vec{r})$ respectivamente por $\phi(x_i)$ e $\vec{V}(x_i)$ bem como o operador $\partial / \partial x_i$ por ∂_i para escrever de uma forma sucinta o seguinte:

$\nabla = \vec{e}_i\, \partial_i$ .... operador nabla
$\nabla\phi = \vec{e}_i\, \partial_i \phi$ .... gradiente de ϕ
$\nabla \cdot \vec{V} = \partial_i V_i$ .... divergência de $\vec{V}$
$\nabla^2 \phi = \partial_i \partial_i \phi$ .... laplaciano de ϕ

$\nabla^2\vec{V} = \vec{e}_i\,\partial_j\partial_j\,V_i$ .... laplaciano de $\vec{V}$

$\nabla\times\vec{V} = \mathcal{E}_{ijk}\,\partial_i V_j\,\vec{e}_k$ .... rotacional de $\vec{V}$

$(\nabla\times\vec{V})_k = \mathcal{E}_{ijk}\,\partial_i V_j$ .... k-ésimo componente de $\nabla\times\vec{V}$

f) Identidades envolvendo o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita

Partindo das definições do delta de Kronecker e do símbolo de Levi-Civita, podemos demonstrar que

$$\delta_{ii} = 3 \quad , \qquad \delta_{ij}\,\delta_{ik} = \delta_{jk} \quad , \qquad \delta_{ij}\,\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3 \tag{B-10}$$

$$\underbrace{\mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}_{kij} = \mathcal{E}_{jki}}_{\text{permutações pares de } i\text{-}j\text{-}k} = \underbrace{-\mathcal{E}_{jik} = -\mathcal{E}_{kji} = -\mathcal{E}_{ikj}}_{\text{permutações ímpares de } i\text{-}j\text{-}k} \tag{B-11}$$

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{ijk} = 6 \tag{B-12}$$

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{ijl} = 2\,\delta_{kl} \tag{B-13}$$

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl} \tag{B-14}$$

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{B-15}$$

As identidades nas Eqs. (B-10) e (B-11) são conseqüências diretas das definições do delta de Kronecker e do símbolo de Levi-Civita bem como da convenção do somatório, fáceis de serem verificadas. Para verificar as demais, usamos o fato de que, da última identidade acima, obtemos as três anteriores; observe:

Fazendo $n = k$ na última, obtemos a penúltima:

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{il}\,\delta_{jm}\,\underbrace{\delta_{kk}}_{3} + \underbrace{\delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\delta_{km}}_{\delta_{im}\,\delta_{jl}} + \underbrace{\delta_{im}\,\delta_{jk}\,\delta_{kl}}_{\delta_{im}\,\delta_{jl}} - \underbrace{\delta_{il}\,\delta_{jk}\,\delta_{km}}_{\delta_{il}\,\delta_{jm}} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\,\underbrace{\delta_{kk}}_{3}$$

$$- \underbrace{\delta_{ik}\,\delta_{jm}\,\delta_{kl}}_{\delta_{il}\,\delta_{jm}} = (3-2)\,\delta_{il}\,\delta_{jm} + (2-3)\,\delta_{im}\,\delta_{jl} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl} \quad .$$

Fazendo $j = m$ na penúltima, obtemos a antepenúltima:

$$\mathcal{E}_{imk}\,\mathcal{E}_{lmk} = \delta_{il}\,\underbrace{\delta_{mm}}_{3} - \underbrace{\delta_{im}\,\delta_{ml}}_{\delta_{il}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{mki}\,\mathcal{E}_{mkl} = 2\,\delta_{il} \quad ,$$

que é a Eq. (B-13), mas com m, k e i no lugar de i, j e k, respectivamente.

Fazendo $k = l$ na antepenúltima, obtemos a anterior:

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{ijk} = 2\,\underbrace{\delta_{kk}}_{3} = 6 \quad .$$

Resta demonstrar, portanto, apenas a última identidade, o que é feito por exaustão, isto é, verificando-se todas as possibilidades.

g) <u>Demonstração de identidades vetoriais</u>

A Eq. (B-14) é muito útil na demonstração de algumas identidades vetoriais. Antes de exemplificar o seu uso, confira os resultados simples seguintes:

$$\text{(i)}\ \ \partial_i x_j = \delta_{ij} \qquad \text{(ii)}\ \ \nabla\cdot\vec{r} = \partial_i x_i = 3 \qquad \text{(iii)}\ \ \partial_i r = x_i / r \quad \left(r = |\vec{r}| = \sqrt{x_j\, x_j} \right) \qquad \text{(B-16)}$$

EXEMPLO 1:
Para um vetor $\vec{\omega}$ constante: $\nabla\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \partial_k(\vec{\omega}\times\vec{r})_k = \partial_k(\mathcal{E}_{ijk}\,\omega_i x_j) = \mathcal{E}_{ijk}\,\omega_i \underbrace{\partial_k x_j}_{\delta_{kj}} = \underbrace{\mathcal{E}_{ijj}}_{0}\,\omega_i = 0$

EXEMPLO 2:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \mathcal{E}_{ijk}\, a_i\, b_j\, \vec{e}_k \times c_l \vec{e}_l = \mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{klm}\, a_i\, b_j\, c_l\, \vec{e}_m = (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\, a_i\, b_j\, c_l\, \vec{e}_m$$
$$= a_l\, b_m\, c_l\, \vec{e}_m - a_m\, b_l\, c_l\, \vec{e}_m = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a} \qquad \text{(B-17)}$$

EXEMPLO 3: Se $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ forem vetores constantes, então

$$\nabla(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\times\vec{r}) = \vec{e}_i\,\partial_i[\alpha_j\,(\vec{\beta}\times\vec{r})_j] = \vec{e}_i\,\partial_i[\alpha_j\,\mathcal{E}_{jkl}\,\beta_k\, x_l] = \vec{e}_i\,\mathcal{E}_{jkl}\,\alpha_j\,\beta_k \underbrace{\partial_i x_l}_{\delta_{il}} = \vec{e}_i\,\mathcal{E}_{jki}\,\alpha_j\,\beta_k = \vec{\alpha}\times\vec{\beta}$$

EXEMPLO 4:

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{e}_i\partial_i \cdot \mathcal{E}_{jkl}\, A_j\, B_k\, \vec{e}_l = \mathcal{E}_{jkl}\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_l\,\partial_i(A_j\, B_k) = \mathcal{E}_{jkl}\,\delta_{il}\,(B_k\,\partial_i A_j + A_j\,\partial_i B_k)$$
$$= \mathcal{E}_{jki}\, B_k\,\partial_i A_j + \mathcal{E}_{jki}\, A_j\,\partial_i B_k = B_k\,\mathcal{E}_{ijk}\,\partial_i A_j - A_j\,\mathcal{E}_{ikj}\,\partial_i B_k$$
$$= B_k\,(\nabla\times\vec{A})_k - A_j\,(\nabla\times\vec{B})_j = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \quad ,$$

ou, num modo um pouco mais curto,

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \partial_i\,(\vec{A}\times\vec{B})_i = \partial_i\,\mathcal{E}_{ijk}\, A_j\, B_k = \mathcal{E}_{ijk}\,(B_k\,\partial_i\, A_j + A_j\,\partial_i\, B_k)$$
$$= (\mathcal{E}_{ijk}\,\partial_i\, A_j)\, B_k - (\mathcal{E}_{ikj}\,\partial_i\, B_k)\, A_j = (\nabla\times\vec{A})_k\, B_k - (\nabla\times\vec{B})_j\, A_j$$
$$= \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \qquad \text{(B-18)}$$

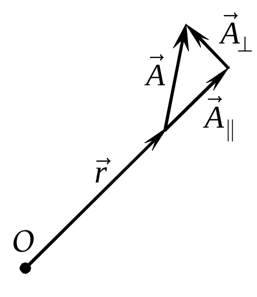
EXEMPLO 5:

$$\mathcal{E}_{ijk}\,(\vec{A}\times\vec{B})_k = \mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}_{lmk} A_l B_m = (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\, A_l B_m = A_i B_j - A_j B_i \qquad \text{(B-19)}$$

Em particular, substituindo $\vec{A}$ por ∇:

$$\mathcal{E}_{ijk}\,(\nabla\times\vec{B})_k = \partial_i B_j - \partial_j B_i \quad . \qquad \text{(B-20)}$$

EXEMPLO 6: Seja $\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}$ um campo vetorial decomposto em dois componentes vetoriais, um paralelo e outro perpendicular ao versor radial $\vec{e}_r = \vec{r}\,/\,r$; temos que



$$(\vec{A}\cdot\nabla)\,\vec{e}_r = A_i\,\partial_i\left(\frac{x_j\,\vec{e}_j}{r}\right) = \vec{e}_j\,A_i\,\frac{r\,\partial_i x_j - x_j\,\partial_i r}{r^2} = \vec{e}_j\,A_i\,\frac{r\,\delta_{ij} - x_j\,x_i/r}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\vec{e}_j\,A_i\,\delta_{ij} - \frac{A_i\,x_i}{r}\frac{x_j\,\vec{e}_j}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(\vec{e}_j\,A_j - \vec{A}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r}{r} = \frac{\vec{A}_\perp}{r}$$

A relação $\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}_{ijl} = 2\delta_{kl}$ também surge nas demonstrações algumas vezes. Por exemplo, se $\vec{\omega}$ for um vetor constante, então

$$\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{e}_k\mathcal{E}_{kij}\partial_i(\vec{\omega}\times\vec{r})_j = \vec{e}_k\mathcal{E}_{kij}\partial_i(\mathcal{E}_{jlm}\omega_l x_m) = \vec{e}_k\mathcal{E}_{kij}\mathcal{E}_{jlm}\omega_l\underbrace{\partial_i x_m}_{\delta_{im}}$$

$$= \vec{e}_k\omega_l\mathcal{E}_{kij}\mathcal{E}_{jli} = \vec{e}_k\omega_l\underbrace{\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}_{ijl}}_{2\delta_{kl}} = 2\vec{e}_k\omega_k = 2\vec{\omega}$$

h) <u>Matrizes</u> <u>e</u> <u>determinantes</u>

NOTAÇÃO PARA MATRIZES E OPERAÇÕES ELEMENTARES

Uma matriz A pode ser denotada através dos elementos que a compõem, a_{ij} : $A = (a_{ij})$. Objetivando introduzir a notação *indicial* (i.e., através de índices) das matrizes, citemos algumas definições que o aluno certamente já aprendeu: para matrizes *A, B, C* $\cdots$, temos que

- Se $C = A \pm B \;\;\Rightarrow\;\; c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ (B-21)
- Se $C = AB \;\;\Rightarrow\;\; c_{ij} = a_{ik}\,b_{kj}$ (note a convenção do somatório) (B-22)
- Se A^T for a matriz transposta de A então $a_{ij}^T = a_{ji}$ (B-23)

DETERMINANTES

- Definição de determinante:

O *determinante* de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $N\times N$, denotado por $\det A$, ou $|a_{ij}|$, ou ainda por a, a letra pura, sem índices, empregada na notação dos elementos de $A = (a_{ij})$, é, por definição, a soma de todos os termos que podem ser formados do seguinte modo: De cada linha {coluna}, tome um elemento que não seja da mesma coluna {linha} de algum elemento já tomado, forme o produto $a_{1\,j_1}\,a_{2\,j_2}\cdots a_{N\,j_N}$ $\{a_{i_1 1}\,a_{i_2 2}\cdots a_{i_N N}\}$ ($j_1, j_2,\cdots j_N$ distintos $\{i_1,i_2,\cdots i_N$ distintos}) de tais elementos e multiplique-o por +1 ou –1, conforme $j_1 - j_2 - \cdots - j_N$ { $i_1 - i_2 - \cdots - i_N$ } seja uma permutação par ou ímpar, respectivamente, de $1-2-\cdots-N$ (i.e, multiplique aquele produto por $\mathcal{E}_{j_1\,j_2\cdots\,j_N}$ $\{\mathcal{E}_{i_1\,i_2\cdots i_N}\}$). Matematicamente, essa definição é assim expressa:

$$a \equiv \mathcal{E}_{j_1\,j_2\cdots\,j_N}\,a_{1\,j_1}\,a_{2\,j_2}\cdots a_{N\,j_N} \qquad \{a \equiv \mathcal{E}_{i_1\,i_2\cdots i_N}\,a_{i_1 1}\,a_{i_2 2}\cdots a_{i_N N}\}\;. \tag{B-24}$$

Nesse somatório de N índices $j_1, j_2,\cdots, j_N$, existem $N!$ termos, em conformidade com a definição. De fato, o elemento a ser tomado da primeira linha pode estar em N colunas, o da segunda pode estar em $N-1$ colunas, $\cdots$, o da *n*-ésima coluna só pode estar em uma coluna, havendo, portanto, $N(N-1)(N-2)\cdots(2)(1) = N!$ modos de formar cada termo que compõe a soma que define o determinante.

• Propriedades dos determinantes

As seguintes propriedades dos determinantes são demonstradas no Apêndice:

P1) $\det A = \det A^T$

P2) Se A tem uma linha {coluna} de zeros então $\det A = 0$

P3) Se A é triangular então $\det A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

P4) $\det(AB) = (\det A)\,(\det B)$

P5) Se B é obtida de A pela multiplicação de uma linha {coluna} por r então $\det B = r \det A$

P6) Se B é obtida de A trocando-se duas linhas {colunas} então $\det B = -\det A$

P7) Se B é obtida de A substituindo-se uma linha {coluna} pela soma de um múltiplo desta com um múltiplo de outra então $\det B = \det A$.

• O desenvolvimento de Laplace:

Definamos $\tilde{\mathcal{E}}_{j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N}$ como o símbolo de Levi-Civita cujos $N-1$ índices (note a ausência do índice j_I) podem tomar todos os valores de 1 a N, exceto o já tomado por j_I, e que recebe o valor +1 ou –1, conforme seus índices formem uma permutação par ou ímpar de $1-2-\cdots-j_{I-1}-j_{I+1}-\cdots N$ (a seqüência ordenada dos $N-1$ primeiros números naturais, excluindo-se valor de j_I). Não é difícil concluir que

$$\mathcal{E}_{j_I j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N} = (-1)^{j_I - 1} \tilde{\mathcal{E}}_{j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N} \quad , \tag{B-25}$$

uma vez que, para colocar os índices de $\mathcal{E}$ e $\tilde{\mathcal{E}}$ em sua ordem normal (de acordo com os seus valores), o índice j_I de $\mathcal{E}_{j_I j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N}$ (ausente em $\tilde{\mathcal{E}}_{j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N}$), para ocupar sua posição normal, requer $j_I - 1$ transposições adjacentes [por exemplo, para $N = 5$, temos que, se $\mathcal{E}_{43521} = (-1)^m \tilde{\mathcal{E}}_{3521}$, então $(-1)^{4-1} \underbrace{\mathcal{E}_{12345}}_{+1} = (-1)^m \underbrace{\tilde{\mathcal{E}}_{1235}}_{+1}$; logo, $m = 4-1$].

Por outro lado, temos que

$$\mathcal{E}_{j_1 j_2 \cdots j_N} = (-1)^{I-1} \mathcal{E}_{j_I j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N} \quad , \tag{B-26}$$

pois, para transformar o símbolo de Levi-Civita do primeiro membro, no qual o índice j_I figura na sua posição normal (a I-ésima), naquele do segundo membro, em que j_I ocupa a primeira posição, são necessárias $I-1$ transposições adjacentes. Logo, substituindo a Eq. (B-25) na Eq. (B-26), obtemos

$$\mathcal{E}_{j_1 j_2 \cdots j_N} = (-1)^{I+j_I} \tilde{\mathcal{E}}_{j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N} \quad . \tag{B-27}$$

Essa equação permite escrever a Eq. (B-24) na forma conhecida como a *fórmula de desenvolvimento de determinantes de Laplace:*

$$a = a_{I j_I} A_{I j_I} \ \text{(sem somatório em } I\text{)} \quad , \tag{B-28}$$

onde

$$A_{I\,j_I} \equiv (-1)^{I+j_I}\,\tilde{\varepsilon}_{j_1 j_2 \cdots j_{I-1} j_{I+1} \cdots j_N}\, a_{1 j_1}\, a_{2 j_2} \cdots a_{I-1\, j_{I-1}}\, a_{I+1\, j_{I+1}} \cdots a_{N\, j_N} \tag{B-29}$$

é o chamado *co-fator do elemento* $a_{I\,j_I}$, que é igual a $(-1)^{I+j_I}$ vezes o determinante da matriz que se obtém de *A* retirando-se a linha e a coluna que contém o elemento $a_{I\,j_I}$. Na Eq. (B-28) podemos trocar o índice mudo j_I por simplesmente *j* :

$$a = a_{I\,j}\, A_{I\,j} \text{ , para qualquer linha } I \text{ (sem somatório em } I\text{) .} \tag{B-30}$$

Dizemos que o determinante desenvolvido segundo essa fórmula se dá ao longo da linha *I* (qualquer uma). A fórmula de desenvolvimento ao longo de uma coluna, digamos a *J*-ésima coluna, é deduzida de modo análogo, sendo dada por

$$a = a_{i\,J}\, A_{i\,J} \text{ , para qualquer coluna } J \text{ (sem somatório em } J\text{) .} \tag{B-31}$$

Nessas duas fórmulas, vale a pena realçar que

$$\boxed{\begin{array}{l} A_{ij} \text{ [co-fator do elemento } a_{ij}\text{]} = (-1)^{i+j} \times \text{determinante da matriz} \\ \text{que se obtém de } A \text{ retirando-se a linha e a coluna contendo } a_{ij} \end{array}} \tag{B-32}$$

• $a_{kj}\, A_{lj} = a\,\delta_{kl} \qquad \{a_{ik}\, A_{il} = a\,\delta_{kl}\}$ (B-33)

Se $k = l$, é fácil ver que temos acima o desenvolvimento de Laplace ao longo da *k*-ésima linha {coluna}. Se $k \neq l$, mostramos no Apêndice que o primeiro membro é nulo por fornecer o determinante de uma matriz com duas linhas {colunas} iguais: a que se obtém de *A* substituindo-se a *k*-ésima linha {coluna} pela *l*-ésima linha {coluna}.

• $\varepsilon_{k_1 k_2 \cdots k_N}\, a_{i_1 k_1}\, a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_N k_N} \equiv a\,\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}$ ou $\varepsilon_{k_1 k_2 \cdots k_N}\, a_{k_1 j_1}\, a_{k_2 j_2} \cdots a_{k_N j_N} \equiv a\,\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}$ (B-34)

De fato, se $k_1 - k_2 - \cdots - k_N = 1 - 2 - \cdots - N$, ela se reduz à definição de determinante *a* dada na Eq. (B-24). Se $k_1 - k_2 - \cdots - k_N$ = permutação de $1 - 2 - \cdots - N$, ambos membros fornecem $(-1)^P a$, onde *P* é o número de transposições que restaura $k_1 - k_2 - \cdots - k_N$ à ordem normal $1 - 2 - \cdots - N$. Por fim, se dois ou mais dos índices $k_1 - k_2 - \cdots - k_N$ são iguais, os dois membros daquela fórmula se anulam. Observe alguns exemplos considerando-se $N = 3$, caso em que a segunda fórmula acima pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_{ijk}\, a_{il}\, a_{jm}\, a_{kn} = a\,\varepsilon_{lmn} \quad . \tag{B-35}$$

Para *l*-*m*-*n* = 2-3-1 (permutação par de 1-2-3): $\varepsilon_{ijk} a_{i2} a_{j3} a_{k1} = \varepsilon_{kij} a_{k1} a_{i2} a_{j3} = a$

Para *l*-*m*-*n* = 2-1-3 (permutação ímpar de 1-2-3): $\varepsilon_{ijk} a_{i2} a_{j1} a_{k3} = -\varepsilon_{jik} a_{j1} a_{i2} a_{k3} = -a$

Para *l*-*m*-*n* = 1-1-3 (valores repetidos): $\varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j1} a_{k3} = \varepsilon_{113}\, a = 0$

No terceiro exemplo, o 1º membro é, de fato, nulo; ele é o determinante de uma matriz com duas colunas iguais (a obtida da matriz *A* substituindo-se a segunda coluna pela primeira).

MATRIZES INVERSAS

Os elementos a_{kj}^{-1} da inversa $A^{-1} = (a_{kj}^{-1})$ de A são dados pela seguinte fórmula:

$$a_{kj}^{-1} = A_{jk} / a \quad . \tag{B-36}$$

É fácil verificar isso, usando a última fórmula de determinantes vista acima:

$$A A^{-1} = (a_{ik}\, a_{kj}^{-1}) = (\underbrace{a_{ik}\, A_{jk}}_{a\,\delta_{ij}} / a\,) = (\delta_{ij}) : \text{matriz identidade.}$$

i) Demonstração de diversas fórmulas

- $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot D) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$: (B-37)

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B})_k\cdot(\vec{C}\times\vec{D})_k = \varepsilon_{ijk}A_iB_j\,\varepsilon_{lmk}C_lD_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_iB_jC_lD_m =$$
$$= A_lB_mC_lD_m - A_mB_lC_lD_m = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot D) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

- $\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \nabla\phi\cdot\vec{A} + \phi\nabla\cdot\vec{A}$: (B-38)

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \partial_i(\phi A_i) = A_i\partial_i\phi + \phi\,\partial_iA_i = \vec{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{A}$$

- $\nabla\times(\phi\vec{A}) = \nabla\phi\times\vec{A} + \phi\nabla\times\vec{A}$: (B-39)

$$\nabla\times(\phi\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\partial_i(\phi A_j)\vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\,(A_j\partial_i\phi + \phi\,\partial_iA_j)\vec{e}_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}(\partial_i\phi)A_j\vec{e}_k + \phi\,\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j\vec{e}_k = \nabla\phi\times\vec{A} + \phi\nabla\times\vec{A}$$

- $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$: (B-40)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = A_i\,(\vec{B}\times\vec{C})_i = A_i\,\varepsilon_{jki}\,B_j\,C_k = \begin{cases} C_k\,\varepsilon_{ijk}\,A_i\,B_j = C_k\,(\vec{A}\times\vec{B})_k = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \\ \text{ou} \\ B_j\,\varepsilon_{kij}\,C_k\,A_i = B_j\,(\vec{C}\times\vec{A})_j = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) \end{cases}$$

- $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = \begin{cases} \vec{C}\,[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})] - \vec{D}\,[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})] \\ \vec{B}\,[\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})] - \vec{A}\,[\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})] \end{cases}$: (B-41)

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = \varepsilon_{ijk}\,(\vec{A}\times\vec{B})_i(\vec{C}\times\vec{D})_j\,\vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmi}A_lB_m\varepsilon_{npj}C_nD_p\vec{e}_k =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmi}}_{\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}}\;\varepsilon_{npj}A_lB_mC_nD_p\vec{e}_k = \varepsilon_{npl}A_lB_kC_nD_p\vec{e}_k - \varepsilon_{npm}A_kB_mC_nD_p\vec{e}_k \\ \text{ou} \\ \underbrace{\varepsilon_{jki}\varepsilon_{npj}}_{\delta_{kn}\delta_{ip}-\delta_{kp}\delta_{in}}\;\varepsilon_{lmi}A_lB_mC_nD_p\vec{e}_k = \varepsilon_{lmp}A_lB_mC_kD_p\vec{e}_k - \varepsilon_{lmn}A_lB_mC_nD_k\vec{e}_k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{B_k\vec{e}_k}_{\vec{B}} A_l \underbrace{\mathcal{E}_{npl} C_n D_p}_{(\vec{C}\times\vec{D})_l} - \underbrace{A_k\vec{e}_k}_{\vec{A}} B_m \underbrace{\mathcal{E}_{npm} C_n D_p}_{(\vec{C}\times\vec{D})_m} = \vec{B}[\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})] - \vec{A}[\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})] \\ \text{ou} \\ \underbrace{C_k\vec{e}_k}_{\vec{C}} A_l \underbrace{\mathcal{E}_{lmp} B_m D_p}_{(\vec{B}\times\vec{D})_l} - \underbrace{D_k\vec{e}_k}_{\vec{D}} A_l \underbrace{\mathcal{E}_{lmn} B_m C_n}_{(\vec{B}\times\vec{C})_l} = \vec{C}[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})] - \vec{D}[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})] \end{cases}$$

• $Q \equiv A_{ij} S_{ij} = 0$ se $A_{ji} = -A_{ij}$ e $S_{ji} = S_{ij}$ (i.e., se A_{ij} e S_{ij} apresentarem anti-simetria e simetria, respectivamente, nos índices *i* e *j*):

$$Q = A_{ij} S_{ij} = (-A_{ji}) S_{ji} = -A_{ji} S_{ji} = -Q \quad \Rightarrow \quad 2Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 0$$

O resultado depende apenas da anti-simetria de A_{ij} e da simetria de S_{ij} nos dois índices sobre os quais o somatório é realizado, podendo, por exemplo, haver outros índices em *A* e *S* (e.g., $Q_{kl} \equiv A_{ijk} S_{ijl} = 0$) ou, ainda, somatórios sobre esses outros índices (e.g., $Q_l \equiv A_{ijk} S_{ijkl} = 0$):

$$Q_l \equiv A_{ijk} S_{ijkl} = (-A_{jik}) S_{jikl} = -A_{jik} S_{jikl} = -Q_l \quad \Rightarrow \quad 2Q_l = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_l = 0$$

• $\nabla \times \nabla\phi = \vec{0}$: (B-42)

$$Q_k \equiv (\nabla \times \nabla\phi)\cdot\vec{e}_k = \mathcal{E}_{ijk}\partial_i(\partial_j\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\nabla\phi = Q_k\vec{e}_k = \vec{0} \ ,$$

pois $\mathcal{E}_{ijk}$ é anti-simétrico e $\partial_i\partial_j\phi$ é simétrico nos índices *i* e *j*.

• $\nabla\cdot\nabla\times\vec{V} = 0$: (B-43)

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{V} = \partial_l\vec{e}_l\cdot\mathcal{E}_{ijk}\partial_i V_j\vec{e}_k = \mathcal{E}_{ijk}\delta_{kl}\partial_i\partial_l V_j = \mathcal{E}_{ijk}\partial_i\partial_k V_j = 0 \ ,$$

pois, nos índices *i* e *k*, $\mathcal{E}_{ijk}$ é anti-simétrico e $\partial_i\partial_k V_j$ é simétrico.

• $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})$: (B-44)

$$\begin{aligned} \nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \mathcal{E}_{ijk}\partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_j\vec{e}_k &= \vec{e}_k\mathcal{E}_{ijk}\partial_i(\mathcal{E}_{lmj}A_l B_m) = \vec{e}_k\mathcal{E}_{jki}\mathcal{E}_{lmj}(B_m\partial_i A_l + A_l\partial_i B_m) \\ &= \vec{e}_k(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(B_m\partial_i A_l + A_l\partial_i B_m) \\ &= \vec{e}_k\delta_{kl}\delta_{im}B_m\partial_i A_l - \vec{e}_k\delta_{km}\delta_{il}B_m\partial_i A_l + \vec{e}_k\delta_{kl}\delta_{im}A_l\partial_i B_m - \vec{e}_k\delta_{km}\delta_{il}A_l\partial_i B_m \\ &= B_i\partial_i A_k\vec{e}_k - \vec{e}_k B_k\partial_l A_l + \vec{e}_k A_k\partial_m B_m - A_i\partial_i B_k\vec{e}_k \\ &= (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \end{aligned}$$

• $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$: (B-45)

$$\begin{aligned} &(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) \\ &= A_i\partial_i B_j\vec{e}_j + B_i\partial_i A_j\vec{e}_j + \mathcal{E}_{ijk}A_i(\nabla\times\vec{B})_j\vec{e}_k + \mathcal{E}_{ijk}B_i(\nabla\times\vec{A})_j\vec{e}_k \\ &= A_i\partial_i B_j\vec{e}_j + B_i\partial_i A_j\vec{e}_j + \mathcal{E}_{ijk}A_i\mathcal{E}_{lmj}\partial_l B_m\vec{e}_k + \mathcal{E}_{ijk}B_i\mathcal{E}_{lmj}\partial_l A_m\vec{e}_k \\ &= A_i\partial_i B_j\vec{e}_j + B_i\partial_i A_j\vec{e}_j + (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})A_i\partial_l B_m\vec{e}_k + (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})B_i\partial_l A_m\vec{e}_k \\ &= \cancel{A_i\partial_i B_j\vec{e}_j} + \cancel{B_i\partial_i A_j\vec{e}_j} + A_m\partial_k B_m\vec{e}_k - \cancel{A_l\partial_l B_k\vec{e}_k} + B_m\partial_k A_m\vec{e}_k - \cancel{B_l\partial_l A_k\vec{e}_k} \end{aligned}$$

$$= \vec{e}_k (A_m \partial_k B_m + B_m \partial_k A_m) = \vec{e}_k \partial_k (A_m B_m) = \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

- $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, onde $\nabla^2 \vec{A} \equiv \vec{e}_i \nabla^2 A_i = \vec{e}_i \partial_j \partial_j A_i$: (B-46)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \mathcal{E}_{ijk} \partial_i (\nabla \times \vec{A})_j \vec{e}_k = \mathcal{E}_{ijk} \partial_i \mathcal{E}_{lmj} \partial_l A_m \vec{e}_k = \mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}_{lmj} \partial_i \partial_l A_m \vec{e}_k \\ &= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) \partial_i \partial_l A_m \vec{e}_k = \partial_m \partial_k A_m \vec{e}_k - \partial_l \partial_l A_k \vec{e}_k = \\ &= \vec{e}_k \partial_k \partial_m A_m - \vec{e}_k \partial_l \partial_l A_k = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{aligned}$$

- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$: (B-47)

  Considerando matrizes 3×3, temos que

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \mathcal{E}_{ijk} (AB)_{i1} (AB)_{j2} (AB)_{k3} = \mathcal{E}_{ijk} a_{il} b_{l1} a_{jm} b_{m2} a_{kn} b_{n3} \\ &= \underbrace{\mathcal{E}_{ijk} a_{il} a_{jm} a_{kn}}_{\mathcal{E}_{lmn} \det A} b_{l1} b_{m2} b_{n3} = (\det A) \mathcal{E}_{lmn} b_{l1} b_{m2} b_{n3} = (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

Nesta última demonstração usamos a fórmula na Eq. (B-35).

- Regra de Cramer: a solução do sistema linear $a_{ij} x_j = b_i$ é dada por $x_j = (A_{jk} b_k)/a$: (B-48)

$$a_{kl} x_l = b_k \xrightarrow{\times A_{jk}} \underbrace{A_{kj} a_{kl}}_{a \delta_{jl}} x_l = a x_j = A_{kj} b_k \quad \Rightarrow \quad x_j = (A_{kj} b_k)/a \quad \blacksquare$$

onde usamos a Eq. (B-33). Note que $A_{kj} b_k$ é o determinante [desenvolvido, segundo a fórmula de Laplace, ao longo da *j*-ésima coluna, de acordo com a Eq. (B-30)] da matriz que se obtém da matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ substituindo-se a *j*-ésima coluna pelos $b_1, b_2, \cdots$:

$$A_{kj} b_k = \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & b_N & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j\text{-ésima} \\ \text{coluna} \end{array}$$

- Façamos novamente o Exercício 3 da Seç. 12-1, demonstrando a identidade

$$(\vec{r} \times \nabla)^2 \psi = r^2 \nabla^2 \psi - r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad :$$

$$(\vec{r} \times \nabla)^2 \psi = (\vec{r} \times \nabla)_k (\vec{r} \times \nabla)_k \psi = \mathcal{E}_{ijk} x_i \partial_j \mathcal{E}_{lmk} x_l \partial_m \psi = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_i \partial_j (x_l \partial_m \psi)$$

$$= x_i \partial_j (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \psi = x_i [\underbrace{(\partial_j x_i)}_{\delta_{ji}} \partial_j + x_i \partial_j \partial_j - \underbrace{(\partial_j x_j)}_{3} \partial_i - x_j \partial_j \partial_i] \psi$$

$$= (x_i \partial_i + x_i x_i \partial_j \partial_j - 3 x_i \partial_i - x_i x_j \partial_j \partial_i) \psi = (x_i x_i \partial_j \partial_j - 2 x_i \partial_i - x_i x_j \partial_j \partial_i) \psi$$

$$= r^2\,\nabla^2\psi - 2\,\vec{r}\cdot\nabla\psi - x_i x_j \partial_j \partial_i \psi = r^2\,\nabla^2\psi - 2r\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \qquad \text{(QED)} \;\; ,$$

onde, na última linha, usamos o fato de que

$$\vec{r}\cdot\nabla\psi = \vec{r}\cdot\left(\vec{e}_r\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\theta}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) = r\,\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

e também que

$$x_i x_j \partial_j \partial_i \psi \;=\; x_i \vec{r}\cdot\nabla(\partial_i\psi) \;\overset{(*)}{=}\; \vec{r}\cdot x_i\partial_i(\nabla\psi) = \vec{r}\cdot(\vec{r}\cdot\nabla)\nabla\psi = \vec{r}\cdot r\,\frac{\partial}{\partial r}(\nabla\psi)$$

$$\overset{(\dagger)}{=}\; r\,\vec{r}\cdot\left(\nabla\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\nabla\psi + \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = r\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \;\cancel{-\;\frac{\vec{r}}{r}\cdot\nabla\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r}} \;=\; r^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

Os detalhes das passagens marcadas com (∗) e (†) são os seguintes:

(∗) $\nabla(\partial_i\psi) = \vec{e}_j\partial_j(\partial_i\psi) = \partial_i(\vec{e}_j\partial_j\psi) = \partial_i(\nabla\psi)$

(†) $$\frac{\partial}{\partial r}\nabla\psi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\vec{e}_r\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) = \vec{e}_r\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\nabla\psi + \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$= \nabla\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\nabla\psi + \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

j) <u>Gradiente, divergência, laplaciano e rotacional em coordenadas curvilíneas</u>

Este assunto, já desenvolvido na Seç. 12-1(c), o é novamente aqui, mas agora fazendo uso dos conhecimentos recém-adquiridos nesta Seç. 12-2.

Sejam u_i $(i = 1,2,3)$ coordenadas curvilíneas *ortogonais* e $\vec{e}_i$ os versores correspondentes (ortogonais). Estes, de acordo com a Eq. (A-8), são dados por

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \quad , \qquad \text{onde} \qquad h_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right| \qquad (i = 1,2,3) \;\; .$$

Nessa fórmula *não* há somatório, embora o índice *i* esteja repetido. Por causa disso, nesta seção adotaremos a convenção do somatório com a seguinte ressalva:

> <u>Ressalva</u>: O índice do fator de escala não participa da convenção do somatório de Einstein, embora participe do somatório que o tem como índice. Mais precisamente: *O índice do fator de escala não é levado em conta para se constatar se é repetido, isto é, se é ligado a um somatório, mas participa do somatório a que esteja ligado*. Assim, na fórmula do versor curvilíneo, acima, *i* não está repetido (o *i* de h_i não conta), não sendo ligado a soma alguma. Mas, no termo $(\vec{e}_i/h_i)\,\partial f/\partial u_i$, *i* está repetido (aparece em $\vec{e}_i$ e u_i), sendo, por conseguinte, um índice ligado; esse termo é igual a $(\vec{e}_1/h_1)\,\partial f/\partial u_1$ + $(\vec{e}_2/h_2)\,\partial f/\partial u_2$ + $(\vec{e}_3/h_3)\,\partial f/\partial u_3$.

Bem, comecemos com a dedução do gradiente de um campo escalar f em coordenadas curvilíneas. O seu i-ésimo componente é calculado como segue:

$$(\nabla f\,)_i \;=\; \vec{e}_i \cdot \nabla f \;\overset{(1)}{=}\; \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \;\overset{(2)}{=}\; \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} \quad ,$$

onde x_j são as coordenadas cartesianas. Na passagem indicada por (1), realizamos o produto escalar empregando os componentes cartesianos $(\partial x_j / \partial u_i)/h_i$ e $\partial f / \partial x_j$ de $\vec{e}_i$ e ∇f, respectivamente. Na passagem (2), usamos a regra da cadeia. Logo, substituindo esse resultado na equação $\nabla f = \vec{e}_i\,(\nabla f\,)_i$, obtemos o mesmo resultado na Eq. (A-15).

$$\nabla f = \frac{\vec{e}_i}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} \qquad \text{ou} \qquad \nabla f = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} \quad . \tag{B-49}$$

Essa demonstração é similar à apresentada na Eq. (A-16).

Antes de deduzir a expressão da divergência de um campo vetorial $\vec{F}$ em coordenadas curvilíneas, são necessárias duas fórmulas. A primeira obtém-se simplesmente calculando ∇u_j usando a Eq. (B-49):

$$\nabla u_j = \frac{\vec{e}_i}{h_i}\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial u_i}}_{\delta_{ij}} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla u_j = \frac{\vec{e}_j}{h_j} \quad . \tag{B-50}$$

A dedução da segunda consiste em, partindo da Eq. (B-5), a qual também vale para os versores curvilíneos ortogonais considerados (que, por convenção, seguem a regra da mão direita), primeiramente escrever um dos versores em termos dos outros dois e, depois, substituir esses dois pelas expressões que a Eq. (B-50) fornece:

$$\mathcal{E}_{ijk}\,\vec{e}_k = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \quad \overset{\times\mathcal{E}_{ijl}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\overbrace{\mathcal{E}_{ijk}\,\mathcal{E}_{ijl}}^{2\delta_{kl}}\,\vec{e}_k}_{2\vec{e}_l} = \mathcal{E}_{ijl}\,\vec{e}_i \times \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_l = \frac{h_i\,h_j}{2}\mathcal{E}_{ijl}\,\nabla u_i \times \nabla u_j \quad . \tag{B-51}$$

Pois bem, agora podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{F} \;&=\; \nabla \cdot \left(F_l\,\vec{e}_l \right) \;\overset{(1)}{=}\; \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijl}\;\nabla \cdot \left(F_l\,h_i\,h_j\;\nabla u_i \times \nabla u_j \right) \\
&\overset{(2)}{=}\; \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijl}\left[\nabla\left(F_l\,h_i\,h_j \right) \cdot \nabla u_i \times \nabla u_j + F_l\,h_i\,h_j\;\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla u_i \times \nabla u_j \right)}_{0} \right] \\
&\overset{(3)}{=}\; \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijl}\,\frac{1}{h_k}\frac{\partial\left(F_l\,h_i\,h_j \right)}{\partial u_k}\,\vec{e}_k \cdot \frac{\vec{e}_i}{h_i} \times \frac{\vec{e}_j}{h_j} \quad .
\end{aligned}$$

Expliquemos os principais detalhes das passagens enumeradas acima. Na passagem (1), usamos a Eq. (B-51). Na (2), primeiramente usamos a identidade vetorial na Eq. (B-38) e, depois, aquelas nas Eqs. (B-18) e (B-42) para justificar que o último termo entre colchetes é nulo:

$$\nabla \cdot \left(\nabla u_i \times \nabla u_j \right) = \nabla u_j \cdot \underbrace{\nabla \times \nabla u_i}_{\vec{0}} - \nabla u_i \cdot \underbrace{\nabla \times \nabla u_j}_{\vec{0}} = 0 \quad .$$

Na passagem (3), usamos a expressão de $\nabla\left(F_l\, h_i\, h_j \right)$ dada pela Eq. (B-49) e as de ∇u_i e ∇u_j dadas pela Eq. (B-50).

Bem, continuamos os cálculos reconhecendo que $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \mathcal{E}_{kij}$ e escrevendo

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\, \mathcal{E}_{ijl}\, \frac{1}{h_i\, h_j\, h_k}\, \frac{\partial\left(F_l\, h_i\, h_j \right)}{\partial u_k} = \mathcal{E}_{ijk}\, \mathcal{E}_{ijl}\, S_{klij} \quad , \tag{B-52}$$

onde

$$S_{klij} \equiv \frac{1}{2}\, \frac{1}{h_i\, h_j\, h_k}\, \frac{\partial\left(F_l\, h_i\, h_j \right)}{\partial u_k} \quad . \tag{B-53}$$

Usando a Eq. (B-57) deduzida na Nota (ii) ao final desta seção, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2\left(S_{1123} + S_{2213} + S_{3312} \right) =$$

$$\frac{1}{h_2\, h_3\, h_1}\, \frac{\partial\left(F_1\, h_2\, h_3 \right)}{\partial u_1} + \frac{1}{h_1\, h_3\, h_2}\, \frac{\partial\left(F_2\, h_1\, h_3 \right)}{\partial u_2} + \frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\, \frac{\partial\left(F_3\, h_1\, h_2 \right)}{\partial u_3} \quad ,$$

ou, finalmente,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\left[\frac{\partial\left(F_1\, h_2\, h_3 \right)}{\partial u_1} + \frac{\partial\left(F_2\, h_1\, h_3 \right)}{\partial u_2} + \frac{\partial\left(F_3\, h_1\, h_2 \right)}{\partial u_3} \right] \quad , \tag{B-54}$$

a mesma expressão na Eq. (A-18).

Para calcular o laplaciano de *f*, basta usar o fato de que ele é a divergência do campo $\vec{F} = \nabla f$:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \underbrace{\nabla f}_{\vec{F}} = \nabla \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}}_{F_1}\vec{e}_1 + \underbrace{\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}}_{F_2}\vec{e}_2 + \underbrace{\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}}_{F_3}\vec{e}_3 \right) \quad ;$$

logo, substituindo $F_1 = (\partial f / \partial u_1)/h_1$, etc, na Eq. (B-54), obtemos

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2\, h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1\, h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1\, h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \quad . \tag{B-55}$$

Por fim, o rotacional é calculado como segue:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \left(F_l\, \vec{e}_l \right) = \nabla \times \left(F_l\, h_l\, \nabla u_l \right) = \nabla\left(F_l\, h_l \right) \times \nabla u_l + F_l\, h_l\, \underbrace{\nabla \times \nabla u_l}_{\vec{0}}$$

$$= \frac{1}{h_i}\frac{\partial (F_l\, h_l)}{\partial u_i}\, \vec{e}_i \times \frac{\vec{e}_l}{h_l} = \frac{1}{h_i\, h_l}\frac{\partial (F_l\, h_l)}{\partial u_i}\, \mathcal{E}_{ilm}\, \vec{e}_m = \frac{1}{h_m\, h_i\, h_l}\, \mathcal{E}_{mil}\, (h_m\, \vec{e}_m)(\partial / \partial u_i)(F_l\, h_l)$$

$$\equiv \left(h_m\, h_i\, h_l \right)^{-1} \mathcal{E}_{mil}\, a_{1m}\, a_{2i}\, a_{3l}$$

onde $a_{1m} \equiv h_m \vec{e}_m$, $a_{2i} \equiv \partial / \partial u_i$ e $a_{3l} \equiv F_l \, h_l$. Logo, notando que $h_m \, h_i \, h_l = h_1 \, h_2 \, h_3$ se m, i e l forem distintos (que é caso devido à presença de $\mathcal{E}_{mil}$) e usando a Eq. (B-24), obtemos, formalmente, o resultado

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 \, h_2 \, h_3} \mathcal{E}_{mil} \, a_{1m} \, a_{2i} \, a_{3l} = \frac{1}{h_1 \, h_2 \, h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \partial / \partial u_1 & \partial / \partial u_2 & \partial / \partial u_3 \\ F_1 \, h_1 & F_2 \, h_2 & F_3 \, h_3 \end{vmatrix} , \qquad \text{(B-56)}$$

a mesma expressão na Eq. (A-19).

Notas:

i) Demonstração das propriedades dos determinantes
(ainda a ser feito)

ii) O somatório $\mathcal{E}_{ijk} \, \mathcal{E}_{ijl} \, S_{klij}$

Esse somatório aparece na Eq. (B-52), onde S_{klij} é qualquer grandeza simétrica nos índices i e j: $S_{klij} = S_{klji}$ [tal qual aquela definida na Eq. (B-53)]. Note que os quatro índices i, j, k e l são ligados; temos, assim, que efetuar um somatório quádruplo. Para resolver esse exercício, façamos as duas observações:

(O1) Somente os termos em que $i \neq j$ não se anulam, segundo a definição de $\mathcal{E}_{ijk}$.

(O2) Somente os termos em que $k = l$ não se anulam. De fato, considere $k \neq l$ e $i \neq j$ [consoante a observação (O1)]; então i ou j é igual a k ou l e, portanto, $\mathcal{E}_{ijk}$ ou $\mathcal{E}_{ijl}$ é nulo por apresentar índices iguais.

Logo, o somatório quádruplo que se deseja calcular resume-se na soma dos seguintes termos:

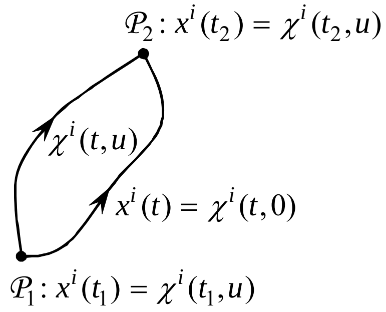
$$\overbrace{\left(\mathcal{E}_{231} \, \mathcal{E}_{231} \, S_{1123} + \mathcal{E}_{321} \, \mathcal{E}_{321} \, S_{1132} \right)}^{k\,=\,l\,=\,1} + \overbrace{\left(\mathcal{E}_{132} \, \mathcal{E}_{132} \, S_{2213} + \mathcal{E}_{312} \, \mathcal{E}_{312} \, S_{2231} \right)}^{k\,=\,l\,=\,2} + \overbrace{\left(\mathcal{E}_{123} \, \mathcal{E}_{123} \, S_{3312} + \mathcal{E}_{213} \, \mathcal{E}_{213} \, S_{3321} \right)}^{k\,=\,l\,=\,3}$$

$$= \left(S_{1123} + S_{1132} \right) + \left(S_{2213} + S_{2231} \right) + \left(S_{3312} + S_{3321} \right) \; .$$

Levando em conta a simetria de S_{klij}, obtemos, finalmente,

$$\mathcal{E}_{ijk} \, \mathcal{E}_{ijl} \, S_{klij} = 2 \left(S_{1123} + S_{2213} + S_{3312} \right) \quad \blacksquare \qquad \text{(B-57)}$$

Apêndice C – Algumas técnicas do Cálculo de Variações



a) <u>Equações de Euler-Lagrange</u>

O problema básico do Cálculo de Variações consiste na determinação da parametrização $x^i(t)$ da curva de V_N que passa pelos pontos $\mathcal{P}_1[x^i(t_1)]$ e $\mathcal{P}_2[x^i(t_2)]$ ao longo da qual seja extremo (i.e., máximo ou mínimo), ou *estacionário*, o valor da integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(t, x^i, \dot{x}^i)\, dt \tag{C-1}$$

em comparação com todos os valores dessa integral sobre as curvas que difiram infinitesimalmente da curva *extremante* $x^i(t)$ e que também passam por $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Para fins de referência, denominaremos a integral I e seu integrando $\mathscr{L}$ de *integral fundamental* e *função fundamental* (*), respectivamente. Para resolver o problema, construímos a seguinte família de curvas relacionadas pelo parâmetro infinitesimal u:

$$\chi^i(t,u) \equiv x^i(t) + u\,\xi^i(t) \quad , \tag{C-2}$$

onde $\xi^i(t)$ são N funções arbitrárias tais que

$$\xi^i(t_1) = \xi^i(t_2) = 0 \quad , \tag{C-3}$$

assim se garantindo que todas as curvas da família passem pelos pontos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. A derivada parcial $\partial\chi^i(t,u)/\partial t$, aqui denotada por $\dot{\chi}^i(t,u)$, é dada por

$$\dot{\chi}^i(t,u) = \dot{x}^i(t) + u\,\dot{\xi}^i(t) \quad . \tag{C-4}$$

A integral na Eq. (C-1) ao longo da curva $\chi^i(t,u)$ da família considerada, denotada por $I(u)$, tem a expressão

$$I(u) = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}[t, \chi^i(t,u), \dot{\chi}^i(t,u)]\, dt \quad .$$

Por construção, o valor extremo dessa integral ocorre ao longo da curva $\chi^i(t,0) = x^i(t)$ (aquela que na família está associada ao valor $u = 0$ do parâmetro); esta hipótese implica que

$$\frac{dI}{du}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \chi^i} \frac{\partial \chi^i}{\partial u} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\chi}^i} \frac{\partial \dot{\chi}^i}{\partial u} \right)_{u=0} dt = 0 \tag{C-5}$$

(note o uso da convenção do somatório, indicando que o Ap. B deve ser lido antes deste). Subs-

---

(*) Nos problemas físicos, as integrais fundamentais são construídas freqüentemente com base no princípio de Hamilton, vindo $\mathscr{L}$ a ser, nesses casos, a lagrangiana ou a densidade de lagrangiana do sistema.

tituindo nesta equação os resultados que se obtêm com a ajuda das Eqs. (C-2) e (C-4),

$$\left.\frac{\partial \chi^i}{\partial u}\right|_{u=0} = \xi^i \quad , \qquad \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \chi^i}(t,\chi^i,\dot{\chi}^i)\right|_{u=0} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i}(t,x^i,\dot{x}^i) \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial \dot{\chi}^i}{\partial u}\right|_{u=0} = \dot{\xi}^i \quad , \qquad \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\chi}^i}(t,\chi^i,\dot{\chi}^i)\right|_{u=0} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i}(t,x^i,\dot{x}^i) \quad ,$$

e integrando por partes o segundo termo do integrando, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i}\xi^i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i}\dot{\xi}^i \right)_{u=0} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i}\xi^i \, dt + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i}\xi^i \right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} \right)\xi^i \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) \right]\xi^i \, dt = 0 \ ,$$

onde o valor zero indicado é justificado pela Eq. (C-3). Como ξ^i são todos arbitrários e independentes um dos outros, concluímos que o termo entre colchetes na última integral é nulo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots N) \ . \tag{C-6}$$

Essas são as chamadas *equações de Euler-Lagrange*. Elas devem ser satisfeitas pelas funções $x^i(t)$ que especificam parametricamente a curva ao longo da qual o valor da integral fundamental é extremo.

Como exemplo, considere o problema de determinar as geodésicas (que são as curvas mais curtas entre dois pontos dados) numa superfície esférica de raio *R* centrada na origem. Em coordenadas esféricas, a integral a ser minimizada é a seguinte:

$$\int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} ds = \int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} \sqrt{R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2} = R\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta} \, d\theta \quad [\text{com } \dot{\varphi} \equiv d\varphi / d\theta] \ .$$

Esta é uma integral como a da Eq. (C-1), em que $t = \theta$, $x^1 = \varphi$ e $\mathscr{L}(t, x^1, \dot{x}^1) = \mathscr{L}(\theta, \varphi, \dot{\varphi}) \equiv \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta}$ (*). Consoante a Eq. (C-6), a geodésica $\varphi(\theta)$ deve satisfazer a equação

---

(*) Note que, embora o espaço formado pelos pontos de coordenadas (θ, φ) na superfície esférica seja bidimensional, a função fundamental não se apresenta na forma $\mathscr{L}(t, x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2) = \mathscr{L}(t, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$, pois as curvas não estão sendo representadas escrevendo-se as duas coordenadas em função de um parâmetro, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$, mas através da função $\varphi(\theta)$; nesse caso, na formação da função fundamental $\mathscr{L}(t, x^i, \dot{x}^i)$, temos apenas *i* = 1, com $x^1 = \varphi$ e a coordenada θ tomando o lugar do parâmetro *t*. O problema poderia ser resolvido com a função fundamental $\mathscr{L}(t, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$, i.e., com as duas coordenadas em função de um parâmetro *t* genérico, o que o tornaria mais complicado.

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}\right)-0 \quad = \quad 0 \ ,$$

ou

$$\frac{\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}=c_1 \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2=\frac{c_1^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta\,(\mathrm{sen}^2\,\theta-c_1^2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{|c_1|}{\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{\mathrm{sen}^2\,\theta-c_1^2}} \quad . \qquad \text{(C-7)}$$

No caso de a constante de integração c_1 ser nula, temos a geodésica $\varphi=\varphi_0$ = constante (um dos meridianos da superfície esférica).

No caso em que $c_1\neq 0$, a integração da equação acima torna-se mais fácil mediante a mudança de variável $u\equiv\cot\theta$; temos que

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{d\theta}=\frac{d\varphi}{du}(-\csc^2\theta)=-(1+\cot^2\theta)\frac{d\varphi}{du}=-(1+u^2)\frac{d\varphi}{du}$$

e

$$\mathrm{sen}\,\theta=\frac{1}{\csc\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad .$$

Logo, substituindo esses resultados na Eq. (C-7), obtemos

$$-(1+u^2)\frac{d\varphi}{du}=\frac{|c_1|}{\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\sqrt{\dfrac{1}{1+u^2}-c_1^2}}=\frac{|c_1|\,(1+u^2)}{\sqrt{1-c_1^2-c_1^2u^2}}=\frac{|c_1|\,(1+u^2)}{\sqrt{(1-c_1^2)\left(1-\dfrac{c_1^2}{1-c_1^2}u^2\right)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{du}=\underbrace{\frac{|c_1|}{\sqrt{1-c_1^2}}}_{\equiv 1/\rho}\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{c_1^2}{1-c_1^2}u^2}}=\frac{-(1/\rho)}{\sqrt{1-(u/\rho)^2}}=\frac{d}{du}\arccos\frac{u}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi=\arccos\frac{u}{\rho}+\alpha \quad (\alpha\text{: const. de integração}) \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{\rho}=\frac{\cot\theta}{\rho}=\cos(\varphi-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \cot\theta \ = \ \underbrace{\rho\cos\alpha}_{\equiv a}\cos\varphi+\underbrace{\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha}_{\equiv b}\,\mathrm{sen}\,\varphi \ = \ a\cos\varphi+b\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad (a\text{ e }b\text{: constantes arbitrárias}) \ .$$

Se fizermos $A\equiv aC$ e $B\equiv bC$, sendo C uma constante arbitrária, podemos dizer que a equação das geodésicas numa superfície esférica é dada por

$$C\cot\theta=A\cos\varphi+B\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad . \qquad \text{(C-8)}$$

Nesta forma incluem-se as geodésicas $\varphi=\varphi_0$ = const., correspondentes a $C=0$.

Se multiplicarmos a equação acima por $R\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtemos $Cz=Ax+By$, sendo (x,y,z) as coordenadas cartesianas de um ponto na superfície esférica de raio *R*. Ou seja, as geodésicas são interseções entre planos que passam pela origem e a superfície esférica; em outras palavras, são grandes círculos.

Nota: Para afirmar que a Eq. (C-8) representa um grande círculo *genérico*, devemos mostrar que as constantes que nela aparecem são arbitrárias. A constante *C* é arbitrária por definição; quanto a *A* e *B*, podemos mostrar que também são arbitrárias como segue: Temos que

$$|\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta| \le |\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta| < \sqrt{1+\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \quad \overset{\text{Eq. (C-7)}}{\Rightarrow} \quad |c_1|<1 \quad \Rightarrow \quad \rho \equiv |c_1|^{-1}\sqrt{1-c_1^2} \in [0,\infty) \ .$$

Além disso, α, por ser uma constante de integração, é arbitrária. Logo, podemos encarar ρ e α nas equações $a = \rho\cos\alpha$ e $b = \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha$, que definem a e b, como as coordenadas polares de um ponto genérico do $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas cartesianas são (a,b). Assim, sendo a e b constantes arbitrárias, então $A = aC$ e $B = bC$ também o são.

b) Problema variacional com vínculos

Este tópico é melhor apresentando por meio de "variações". Preliminarmente, portanto, expliquemos como empregá-las deduzindo novamente a Eq. (C-6):

Na Eq. (C-2), $u\,\xi^i(t)$ pode ser interpretado como uma variação infinitesimal δx^i [arbitrária, a menos da restrição de anular-se quando $t = t_1$ ou $t = t_2$] que, ao ser acrescida à curva extremante $x^i(t)$, produz uma curva arbitrária $x'^i(t)$ [que é a notação a ser aqui adotada para a curva $\chi^i(t,u)$ dada pela Eq. (C-2)] que passa pelos pontos $\mathcal{P}_1[x^i(t_1)]$ e $\mathcal{P}_2[x^i(t_2)]$:

$$\begin{cases} x^i(t) \xrightarrow{\text{variação de } \delta x^i(t)} x'^i(t) = x^i(t) + \delta x^i(t) & \text{(C-9a)} \\ \delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0 & \text{(C-9b)} \end{cases}$$

Como δx^i são variações das coordenadas em torno de suas expressões $x^i(t)$ para as quais I é estacionário, deve ser nula a variação δI decorrente dessas variações, dada pela diferença entre os valores da integral fundamental calculada com $x'^i(t)$ e com $x^i(t)$:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, x'^i, \dot{x}'^i)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, x^i, \dot{x}^i)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}\,dt = 0 \ , \tag{C-10}$$

onde

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, x'^i, \dot{x}'^i) - \mathcal{L}(t, x^i, \dot{x}^i) = \mathcal{L}(t, x^i + \delta x^i, \dot{x}^i + \delta\dot{x}^i) - \mathcal{L}(t, x^i, \dot{x}^i) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\delta\dot{x}^i \ , \tag{C-11}$$

sendo $\partial\mathcal{L}/\partial x^i$ e $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^i$ calculados com a curva extremante. Note que

$$\delta\dot{x}^i = \dot{x}'^i - \dot{x}^i = \frac{d}{dt}(x'^i - x^i) = \frac{d\,\delta x^i}{dt} \ , \tag{C-12}$$

cuja substituição na equação anterior fornece

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\frac{d\,\delta x^i}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\delta x^i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right)\delta x^i \ , \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right)\right]\delta x^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\delta x^i\right) \ . \end{aligned} \tag{C-13}$$

Substituindo, por sua vez, esse resultado na Eq. (C-10), obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathscr{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right]_{t=t_1}^{t_2}}_{0} = 0 \quad , \tag{C-14}$$

onde o segundo termo se anula por causa da Eq. (C-9b).

Finalmente, por serem todos os δx^i arbitrários e independentes um dos outros, o termo entre colchetes no integrando acima deve ser posto igual a zero. Concluímos, assim, que a Eq. (C-6) é válida quando avaliada com a parametrização extremante $x^i(t)$.

Podemos passar agora para o problema variacional com vínculos. Suponhamos que a curva extremante $x^i(t)$ de V_N há de ser encontrada entre as que satisfazem $K + L = M$ condições, denominadas *vínculos*, da forma

$$\phi_k(t, x^i, \dot{x}^i) = 0 \quad [\, k = 1, 2 \cdots K < N \,] \tag{C-15}$$

ou da forma *isoperimétrica* (*)

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_l(t, x^i, \dot{x}^i)\, dt = c_l = \text{ constante} \quad [\, l = K+1, \cdots, K+L \,] \quad . \tag{C-16}$$

Se, após multiplicarmos as K condições na Eq. (C-15) por funções $\lambda_k(t)$ ($k = 1, 2 \cdots K$), somá-las e integrar o resultado no intervalo $t \in [t_1, t_2]$,

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_k\, \phi_k(t, x^i, \dot{x}^i)\, dt \quad , \tag{C-17}$$

multiplicar por *constantes* λ_l ($l = K+1, \cdots, K+L$) as L condições na Eq. (C-16) e somá-las,

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_k\, \phi_k(t, x^i, \dot{x}^i)\, dt \; - c_k \lambda_k \tag{C-18}$$

e, então, adicionarmos membro a membro as Eqs. (C-17) e (C-18) resultantes dessas operações e a Eq. (C-1), obtemos

$$I \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}^{\star} dt \;-\; c_l \lambda_l \quad , \tag{C-19}$$

onde

$$\mathscr{L}^{\star}(t, x^i, \dot{x}^i, \lambda_m) \equiv \mathscr{L}(t, x^i, \dot{x}^i) + \lambda_m\, \phi_m(t, x^i, \dot{x}^i) \quad , \tag{C-20}$$

em que o índice de somatório m tem os valores $m = 1, 2, \cdots, K, K+1, \cdots, K+L = M$. Observe a nossa reserva dos índices i, k, l e m na enumeração de termos contendo as N coordenadas x^i, os

(*) Pois desse tipo é a condição prescrita no primeiro problema de extremo de que se tem notícia, o de se encontrar, dentre todas as curvas fechadas com um dado perímetro, a que delimita a maior área (o problema de Dido).

K vínculos na Eq. (C-15), os L vínculos na Eq. (C-16) e todos os $M = K + L$ vínculos, respectivamente. Mais explicitamente, o índice k deve variar de 1 a K, o índice l, de $K+1$ a $K+L = M$ e o índice m, de 1 a M. Por exemplo, os $\phi_m \big|_{m=1,\cdots,K}$ são os ϕ_k da Eq. (C-15) e os $\phi_m \big|_{m=K+1,\cdots,K+L}$ são os ϕ_l da Eq. (C-16).

Agora, aplicamos na Eq. (C-19) o processo de variação já estudado para determinar as $N+M$ funções incógnitas $x^i(t)$, $\lambda_k(t)$ e λ_l (estas L últimas são funções constantes) que tornam extremo o valor de $I = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt$. A variação das coordenadas deve ser aquela dada pela Eqs. (C-9a) e (C-9b); já a variação de λ_m pode ser

$$\lambda_k'(t) = \lambda_k + \delta\lambda_k(t) \qquad \text{e} \qquad \lambda_l' = \lambda_l + \delta\lambda_l \ , \tag{C-21}$$

não havendo necessidade de impor qualquer restrição quando $t = t_1$ ou t_2[(†)]. Assim, as coordenadas $x'^i(t)$ são arbitrárias, a menos de, quando $t = t_1$ ou t_2, coincidirem com as coordenadas de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, ao passo que são completamente arbitrárias as funções $\lambda_j'(t)$ e as constantes λ_k'. Como δx^i e $\delta\lambda_m$ são variações em torno das expressões $x^i(t)$, $\lambda_k(t)$ e λ_l (símbolos sem linha) para as quais I é estacionário, deve ser nula a variação δI decorrente daquelas variações, isto é,

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathscr{L}^{\star} dt - c_l \delta\lambda_l = 0 \ , \tag{C-22}$$

consoante a Eq. (C-19). Mas

$$\delta\mathscr{L}^{\star} = \frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \dot{x}^i}\delta \dot{x}^i + \frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \lambda_m}\delta\lambda_m = \left(\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta x^i + \frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \lambda_m}\delta\lambda_m + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\right),$$

onde este último termo (derivada total) surge da eliminação dos $\delta\dot{x}^i$, através da Eq. (C-12), do mesmo modo como se fez na Eq. (C-13). Substituindo esse resultado no integrando da equação anterior, tendo em conta que a contribuição do termo de derivada total é nula [cf. Eq. (C-14)] e que $\delta\lambda_m \big|_{m=K+1,\cdots,K+L} = \delta\lambda_l$ podem sair da integral por serem constantes, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \dot{x}^i}\right)}_{0}\delta x^i + \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \lambda_k}}_{0}\delta\lambda_k + \underbrace{\left[\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \lambda_l} - c_l\right]}_{0}\delta\lambda_l = 0 \ ,$$

onde indicamos três termos que são nulos porque, sendo coeficientes de grandezas arbitrárias e independentes, só com a nulidade deles o membro direito da equação se anula. Temos, portanto, as três equações

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots N) \ , \tag{C-23}$$

[(†)] E nem sendo mesmo possível no caso de λ_l', pois $\delta\lambda_l$ é a variação de uma função constante, independe do tempo, não havendo como restringir seus valores nos extremos do intervalo (t_1, t_2) e ainda deixá-la arbitrária

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \lambda_k} = \phi_k(t, x^i, \dot{x}^i) = 0 \quad [k = 1, 2 \cdots K] \ , \tag{C-24}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \lambda_l} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \phi_l(t, x^i, \dot{x}^i) = c_l \quad [l = K+1, \cdots K+L] \ . \tag{C-25}$$

Note que as Eqs. (C-24) e (C-25) são os vínculos do problema. Assim, as funções $x^i(t)$ resultantes da resolução do sistema de equações (C-23), (C-24) e (C-25) são exatamente as desejadas: tornam extremo o valor de $\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}^\star dt - c_k \lambda_k \right]$ e satisfazem os vínculos. A solução do problema provém, portanto, da resolução do sistema formado pelas equações de vínculo e pela equação de Euler-Lagrange com $\mathscr{L}^\star$ no lugar da função fundamental original $\mathscr{L}$.

Esse modo de resolver problemas variacionais com vínculos é conhecido como o *método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange*. Para exemplificar sua aplicação, considere o mesmo problema resolvido no item (a), o de determinar as geodésicas numa superfície esférica de raio *R*, agora, porém, usando as coordenadas cartesianas $z_i \ (i = 1, 2, 3)$ do espaço euclidiano tridimensional. Nessas coordenadas, o elemento de comprimento de arco é dado por $ds = \sqrt{z_i\, z_i} = \dot{s}\, dt$, com $\dot{s} = ds/dt = \sqrt{\dot{z}_i\, \dot{z}_i}$, ao longo da curva $z_i(t)$. Podemos, então, formular o problema como a minimização da integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt \ , \ \text{com } \mathscr{L}(t, z_i, \dot{z}_i) = \dot{s} = \sqrt{\dot{z}_i\, \dot{z}_i} \quad (i = 1, 2, 3) \ , \tag{C-26}$$

sob a condição [na forma da Eq. (C-15)]

$$\phi(z_i) = z_i\, z_i - R^2 = 0 \quad \text{(superfície esférica)} \ . \tag{C-27}$$

Nesse caso, de acordo com a Eq. (C-20), tomamos

$$\mathscr{L}^\star(t, z_i, \dot{z}_i, \lambda) \ \equiv \ \mathscr{L} + \lambda \phi \ = \ \sqrt{\dot{z}_i\, \dot{z}_i} + \lambda (z_i\, z_i - R^2) \qquad [\lambda = \lambda(t)]$$

e aplicamos a Eq. (C-23),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \dot{z}_k} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial z_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}_k}{\dot{s}} \right) - 2\lambda\, z_k = 0 \ .$$

Podemos escolher o parâmetro *t* como sendo o comprimento de arco s ; assim, $\dot{s} = 1$ e a equação acima toma a forma

$$\ddot{z}_k - 2\lambda(s)\, z_k(s) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \ ,$$

onde um ponto sobre a letra denota agora derivada em relação a *s*. Essas equações e a Eq. (C-27) são, na notação corriqueira $(z_1, z_2, z_3) = (x, y, z)$,

$$\ddot{x} - 2\lambda(s)\, x(s) = 0 \, , \quad \ddot{y} - 2\lambda(s)\, y(s) = 0 \, , \quad \ddot{z} - 2\lambda(s)\, z(s) = 0 \, , \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 . \tag{C-28}$$

Se nas duas primeiras dessas equações substituirmos a expressão $2\lambda(s) = \ddot{z}/z$ tirada da terceira, encontramos

$$\ddot{x} - \frac{\ddot{z}}{z}x = \frac{1}{z}(\ddot{x}z - \ddot{z}x) = \frac{1}{z}\frac{d}{ds}(\dot{x}z - x\dot{z}) = \frac{1}{z}\frac{d}{ds}\left[z^2\frac{d}{ds}\left(\frac{x}{z}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2\frac{d}{ds}\left(\frac{x}{z}\right) = C_1 = \text{const.}$$

e

$$\ddot{y} - \frac{\ddot{z}}{z}y = \frac{1}{z}(\ddot{y}z - \ddot{z}x) = \frac{1}{z}\frac{d}{ds}(\dot{y}z - y\dot{z}) = \frac{1}{z}\frac{d}{ds}\left[z^2\frac{d}{ds}\left(\frac{y}{z}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2\frac{d}{ds}\left(\frac{y}{z}\right) = C_2 = \text{const.}$$

Finalmente, dessas duas equações, obtemos

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{C_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{1}{C_2}\frac{d}{ds}\left(\frac{y}{z}\right) \overset{\text{integrando}}{\Rightarrow} \frac{1}{C_1}\frac{x}{z} = \frac{1}{C_2}\frac{y}{z} + C_3 \quad ,$$

ou, multiplicando por $C_1C_2\,z$,

$$A\,x + B\,y + C\,z = 0 \quad ,$$

onde $A \equiv C_2$, $B \equiv -C_1$ e $C \equiv -C_1C_2C_3$. Essa é a equação de um plano genérico pela origem; a interseção de tais planos com a superfície esférica dada pela quarta equação na Eq. (C-28) são grandes círculos, ao longo dos quais estão as geodésicas.

c) Extremo de integral múltipla sem vínculos

Trata-se da generalização do item (a) em que, em vez de um único parâmetro, existem J parâmetros t^j. Agora as coordenadas x^i de V_N passam a ser funções desses parâmetros, das coordenadas e das derivadas dessas coordenadas em relação àqueles parâmetros, $\mathscr{L}\,[t^j, x^i(t^j), \partial x^i/\partial t^j]$; além disso, a integral fundamental torna-se múltipla, de multiplicidade J (uma integral para cada parâmetro t^j):

$$I = \int_{\mathcal{D}} \mathscr{L}\,(t^j, x^i, \partial_j x^i)\, d^J t \qquad [\partial_j x^i \equiv \partial x^i/\partial t^j] \quad , \tag{C-29}$$

onde $(t^1, \cdots, t^j, \cdots, t^J) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^J$ e $d^J t$ é a notação para $dt^1 dt^2 \cdots dt^J$.

Atacamos esse problema como acima. Admitindo que a parametrização $x^i(t^j)$ é extremante, a esta acrescentamos variações $\delta x^i(t)$, arbitrárias a menos de serem nulas sobre a fronteira $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$, que resultam nas parametrizações $x'^i(t^j)$:

$$\begin{cases} x^i(t^j) \xrightarrow{\text{variação de } \delta x^i(t^j)} x'^i(t^j) = x^i(t^j) + \delta x^i(t^j) & \text{(C-30a)} \\ \delta x^i(\partial\mathcal{D}) = 0 & \text{(C-30b)} \end{cases}$$

Como $x^i(t^j)$ extrema I, é nula a variação δI, dada pela diferença entre os valores da integral fundamental calculada com $x'^i(t^j)$ e com $x^i(t^j)$:

$$\delta I = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(t^j, x'^i, \partial_j x'^i)\, d^J t - \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(t^j x^i, \partial_j x^i)\; d^J t = \int_{\mathcal{D}} \delta\mathcal{L}\, dt = 0 \quad , \tag{C-31}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(t^j, x'^i, \partial_j x'^i) - \mathcal{L}(t^j, x^i, \partial_j x^i) = \mathcal{L}[t^j, x^i + \delta x^i, \partial_j x^i + \delta(\partial_j x^i)] - \mathcal{L}(t^j, x^i, \partial_j x^i) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\delta(\partial_j x^i) \quad ,\end{aligned} \tag{C-32}$$

sendo $\partial\mathcal{L}/\partial x^i$ e $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_j x^i)$ calculados com a parametrização extremante $x^i(t^j)$. Note que

$$\delta(\partial_j x^i) = \partial_j x'^i - \partial_j x^i = \frac{\partial x'^i}{\partial t^j} - \frac{\partial x^i}{\partial t^j} = \frac{\partial(x'^i - x^i)}{\partial t^j} = \frac{\partial\,\delta x^i}{\partial t^j} \quad , \tag{C-33}$$

cuja substituição na equação anterior fornece

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\frac{\partial\,\delta x^i}{\partial t^j} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\delta x^i\right] - \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\right]\delta x^i \quad , \\ &= \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\right]\right\}\delta x^i + \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\delta x^i\right]\end{aligned} \tag{C-34}$$

Substituindo, por sua vez, esse resultado na Eq. (C-31), obtemos

$$\int_{\mathcal{D}} d^J t \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\right]\right\}\delta x^i + \int_{\mathcal{D}} d^J t\, \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\delta x^i\right] = 0 \quad . \tag{C-35}$$

Finalmente, tendo em conta que a segunda integral acima é nula (verificaremos isso logo adiante) e que todos os δx^i são arbitrários e independentes um dos outros, concluímos que devemos igualar a zero o termo entre colchetes na primeira integral e assim obter

$$\frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j x^i)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots N) \quad . \tag{C-36}$$

Essas N equações foram deduzidas da Eq. (C-31) avaliada com a parametrização extremante $x^i(t^j)$, a qual, portanto, deve necessariamente satisfazê-las.

A maneira de mostrar que a segunda integral na Eq. (C-35) é nula consiste em efetuar a integração em t^j para obter uma nova integral múltipla (de multiplicidade $J-1$) cujo integrando é o termo $[\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_j x^i)]\delta x^i$ avaliado em $\partial\mathcal{D}$, um integrando nulo, portanto, em vista da Eq. (C-30b). Esse procedimento de efetuar uma das integrais simples que compõe uma integral múltipla sobre certa região para transformá-la noutra sobre a fronteira dessa região é usado, por exemplo, nas demonstrações dos teoremas de Green e de Gauss da Análise Vetorial, a cujo estudo aconselhamos o estudante ainda não familiarizado antes de prosseguir(*). No nosso caso (sem usar a convenção do somatório), temos

---

(*) Por exemplo, consulte [1] W. Kaplan, Cálculo Avançado, Vol. I, Seçs. 5-5 e 5-11, Ed. Edgard Blücher Ltda, 1972; ou [2] R. E. Williamson et. al., Cálculo de Funções Vetoriais, Vol. 2, Seçs. 7-1 e 7-5, LTC Ed. S. A., 1975.

$$\int_{\mathcal{D}} d^J t \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_j x^i)} \delta x^i \right] = \sum_j \underbrace{\int dt^1 \cdots \int dt^{j-1} \int dt^{j+1} \cdots \int dt^J}_{\text{integral de multiplicidade } J-1 \text{ sobre } P_j(\mathcal{D})} \int_{f^j}^{g^j} dt^j \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_j x^i)} \delta x^i \right]$$

$$= \sum_j \int_{P_j(\mathcal{D})} d^{J-1} t \underbrace{\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_j x^i)} \delta x^i \right]_{t^j = f^j}^{g^j}}_{0\ (*)} = 0 \ . \qquad \text{(C-37)}$$

onde

- $P_j(\mathcal{D}) \equiv \left\{ (t^1, \cdots, t^{j-1}, t^{j+1}, \cdots, t^J), \text{ onde } (t^1, \cdots, t^{j-1}, t^j, t^{j+1}, \cdots, t^J) \in \mathcal{D} \right\} \subset \mathbb{R}^{J-1}$: a projeção de $\mathcal{D}$ no espaço descrito pelos $J-1$ eixos $t^1, \cdots, t^{j-1}, t^{j+1}, \cdots$ e t^J (todos menos o eixo t^j).

- f^j e g^j são funções definidas sobre $P_j(\mathcal{D})$ [i.e., $\text{Dom}(f^j) = \text{Dom}(g^j) = P_j(\mathcal{D})$] de modo que $\mathcal{D} = \left\{ (t^1, \cdots, t^{j-1}, t^j, t^{j+1}, \cdots, t^J), \text{ com } f^j \le t^j \le g^j \text{ e } (t^1, \cdots, t^{j-1}, t^{j+1}, \cdots, t^J) \in P_j(\mathcal{D}) \right\}$, ou seja, de modo que $\mathcal{D}$ esteja entre as hipersuperfícies(†) do $\mathbb{R}^J$ dadas por $t^j = f^j$ e $t^j = g^j$.

A nulidade do termo indicado com $(*)$ na Eq. (C-37) é justificada pelo fato de que $\delta x^i \big|_{t^j = f^j} = \delta x^i \big|_{t^j = g^j} = 0$, já que as hipersuperfícies $t^j = f^j$ e $t^j = g^j$ estão contidas na fronteira $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$, na qual, por hipótese, $\delta x^i(\partial\mathcal{D}) = 0$.

Admite-se que as funções f^j e g^j $(j = 1, \cdots, J)$ possam ser definidas conforme descritas acima para toda a região $\mathcal{D}$ ou, não sendo esse o caso, que exista uma partição de $\mathcal{D}$ em sub-regiões para as quais aquelas funções possam ser definidas.

Como exemplo, considere a corda vibrante. A função $y(x,t)$ [ordenada em função da abscissa e do tempo] que descreve a forma da corda de densidade linear ρ que vibra sob tensão τ com seus extremos em $x = 0$ e $x = l$ fixos é aquela que, segundo o princípio de Hamilton, torna mínimo o valor da integral (§)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \mathscr{L}\, dx\, dt \,, \qquad \text{onde } \mathscr{L}(t, x, y, \dot{y}, y') = \rho\, \dot{y}^2/2 - \tau\, y'^2/2 \ , \qquad \text{(C-38)}$$

sendo usadas as notações: $\dot{y} \equiv \partial y/\partial t$ e $y' \equiv \partial y/\partial x$. Temos um problema com uma função incógnita $(N = 1)$ e dois parâmetros $(J = 2)$, para o qual a Eq. (C-36) [com a substituição de notação $x^1 \to y$, $t^1 \to t$ e $t^2 \to x$] fornece

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(\tau y') - 0 = 0 \ \Rightarrow\ y'' = \frac{\rho}{\tau}\ddot{y} \ , \qquad \text{(C-39)}$$

(†) No $\mathbb{R}^J$, uma hipersuperfície é o lugar geométrico cujos pontos têm coordenadas que satisfazem uma única equação: $f(x^1, x^2 \cdots x^J) = 0$.

(§) Para uma referência, veja o exemplo que segue a Eq. (2.23) *in* F. W. Byron Jr. & R. W. Fuller, Mathematics of Classical and Quantum Physics, Dover Publications, 1992 (pp. 67-69 desta edição).

a conhecida equação da corda vibrante.

Observe que a formulação apresentada contempla a hipótese de que a região de integração $\mathcal{D}$ seja ilimitada ao longo de um ou mais eixos t^j; nesse caso, devemos exigir que $\delta x^i \to 0$ quando cada um desses parâmetros se tornar infinito: $t^j \to \infty$ (ou $-\infty$). Por exemplo, nos problemas eletromagnéticos em todo o espaço, as densidades de carga elétrica ρ e de corrente elétrica $\vec{J}$ são consideradas localizadas numa extensão finita do espaço para garantir que os potenciais tendam a zero no infinito. Em tais problemas, as equações de Maxwell resultam da minimização da seguinte integral múltipla [integral no tempo $t \in (t_1, t_2)$ e em todas as posições $\vec{r} = z_j\,\vec{e}_j$ do espaço]

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{L}\, d^3r\, dt \ , \qquad \text{onde } \mathscr{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \vec{J}\cdot\vec{A} - \rho\Phi \ . \tag{C-40}$$

Usando as conhecidas expressões dos campos elétrico $\vec{E} = E_k\vec{e}_k$ e magnético $\vec{B} = B_k\vec{e}_k$ em termos dos potenciais escalar Φ e vetor $\vec{A} = A_k\vec{e}_k$,

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad E_k = -\partial_k\Phi - \partial_0 A_k \quad (\partial_k\Phi \equiv \partial\Phi/\partial z_k\ ,\ \ \partial_0 A_k \equiv \partial A_k/\partial t) \tag{C-41}$$

e

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \quad \text{ou} \quad B_k = \mathcal{E}_{kji}\partial_j A_i \quad (\partial_j A_i \equiv \partial A_i/\partial z_j)\ , \tag{C-42}$$

[observe a notação empregada: $\partial_0 f$ é a derivada temporal e $\partial_j f$ é a derivada da grandeza f em relação à coordenada cartesiana z_j], podemos reescrever a expressão de $\mathscr{L}$ como segue:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{\varepsilon_0}{2}E_kE_k - \frac{1}{2\mu_0}B_kB_k + J_iA_i - \rho\Phi \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}(\partial_k\Phi + \partial_0A_k)(\partial_k\Phi + \partial_0A_k) - \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{E}_{kji}(\partial_jA_i)\mathcal{E}_{kml}(\partial_mA_l) + J_iA_i - \rho\Phi \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}(\partial_k\Phi + \partial_0A_k)(\partial_k\Phi + \partial_0A_k) - \frac{1}{2\mu_0}\Big[(\partial_jA_i)(\partial_jA_i) - (\partial_jA_i)(\partial_iA_j)\Big] + J_iA_i - \rho\Phi\ ,
\end{aligned} \tag{C-43}$$

onde usamos a fórmula $\mathcal{E}_{kji}\mathcal{E}_{kml} = \delta_{jm}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{im}$. Numa situação mais genérica que a presente (na equação acima, $\mathscr{L}$ não depende de t, z_j e $\partial_0\Phi$), vislumbramos que a dependência de $\mathscr{L}$ seria dada por

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\underbrace{t, z_j}_{t^j}, \underbrace{\Phi, A_i}_{x^i}, \underbrace{\partial_0\Phi, \partial_j\Phi, \partial_0A_i, \partial_jA_i}_{\partial_j x^i}) \ ,$$

onde confrontamos os argumentos de $\mathscr{L}$ com os usados no desenvolvimento da teoria para ver que os parâmetros t^j correspondem ao tempo e às coordenadas cartesianas do vetor posição, as coordenadas x^i correspondem aos componentes cartesianos dos potenciais (vistos como coordenadas no espaço de configurações) e $\partial_j x^i$ correspondem às derivadas espaciais e temporal dos potenciais.

Logo, a aplicação das Eqs. (C-36) (no caso, um total de quatro equações, correspondentes às grandezas que estabelecem a configuração do campo: Φ e os três componentes A_i) fornece

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\Phi)}+\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j\Phi)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi}=0 \tag{C-44}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_i)}+\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j A_i)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_i}=0 \quad . \tag{C-45}$$

Substituindo

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\Phi)}=0 \ , \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j\Phi)}=\varepsilon_0\,(\partial_j\Phi+\partial_0 A_j) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi}=-\rho$$

na Eq. (C-44), obtemos a equação de Maxwell que incorpora a lei de Coulomb:

$$0+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z_j}\underbrace{(\partial_j\Phi+\partial_0 A_j)}_{-E_j}+\rho \;=\; -\,\varepsilon_0\frac{\partial E_j}{\partial z_j}+\rho \;=\; -\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}+\rho \;=\; 0 \quad , \tag{C-46}$$

onde usamos a Eq. (C-41). Substituindo agora

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_i)}=\varepsilon_0\,(\partial_i\Phi+\partial_0 A_i)\ , \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_j A_i)}=-\frac{1}{\mu_0}(\partial_j A_i-\partial_i A_j) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_i}=J_i$$

na Eq. (C-45), obtemos a equação de Maxwell referente à lei de Ampère:

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\partial_i\Phi+\partial_0 A_i)}_{-E_i}-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z_j}\underbrace{(\partial_j A_i-\partial_i A_j)}_{\mathcal{E}_{kji}B_k}-J_i \;=\; -\,\varepsilon_0\frac{\partial E_i}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial}{\partial z_j}B_k}_{(\nabla\times\vec{B})_i}-J_i$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(\nabla\times\vec{B})_i}{\mu_0}=J_i+\varepsilon_0\frac{\partial E_i}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}=\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad ,$$

onde usamos as Eqs. (B-20) e (C-42): $\partial_j A_i-\partial_i A_j=\mathcal{E}_{kji}(\nabla\times\vec{A})_k=\mathcal{E}_{kji}B_k$.

Vemos, assim, que apenas as equações de Maxwell inomogênas resultam do problema variacional acima(*). Mas, para esse problema ser formulado, já se fez uso das equações de Maxwell homogêneas: elas fundamentam os potenciais nas Eqs. (C-41) e (C-42). Estas equações, de fato, harmonizam-se com as equações de Maxwell homogêneas, a que atesta a inexistência de pólos magnéticos e a que expressa a lei de Faraday:

$$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0 \quad ,$$

(*) A dedução variacional das equações de Maxwell homogêneas pode ser encontrada, por exemplo, nos §§ 17 e 26 do livro *The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, Fourth English edition, 1975)* de L. D. Landau e M. Lifshitz

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times\left(-\nabla\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\frac{\partial\,(\nabla\times\vec{A})}{\partial t}=-\underbrace{\nabla\times\nabla\Phi}_{\vec{0}}-\cancel{\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}+\cancel{\frac{\partial\,(\nabla\times\vec{A})}{\partial t}}=\vec{0}\quad .$$

d) <u>Extremo de integral múltipla com vínculos</u>

Consideremos, por fim, o problema de determinar as funções $x^i(t^j)$ $[\,i=1,\cdots N$ e $j=1,\cdots J\,]$ que extremam a integral fundamental

$$I=\int_{\mathcal{D}}\mathscr{L}(t^j,x^i,\partial_j x^i)\;d^Jt\qquad[\partial_j x^i\equiv\partial x^i/\partial t^j]\quad ,\tag{C-47}$$

sob condições do tipo

$$\phi_k(t^j,x^i,\partial_j x^i)=0\qquad[\,k=1,2\cdots K<N\,]\tag{C-48}$$

e também da forma *isoperimétrica*

$$\int_{\mathcal{D}}\phi_l(t^j,x^i,\partial_j x^i)\,dt=c_l=\text{ constante}\qquad[\,l=K+1,\cdots,K+L\,]\quad .\tag{C-49}$$

Como o procedimento a ser adotado é uma junção daqueles já apresentados nas Seçs. (b) e (c), faremos as passagens sem muita explicação. Multiplicamos a Eq. (C-48) por $\lambda_k(t)$ $(k=1,2\cdots K)$ e integramos em $\mathcal{D}$, multiplicamos Eq. (C-49) por constantes λ_l $(l=K+1,\cdots,$ $K+L)$, devendo ser observada a soma implícita nos índices repetidos, e adicionamos membro a membro as duas equações assim produzidas e a Eq. (C-47) para obter

$$I\;=\;\int_{\mathcal{D}}\mathscr{L}^{\star}\;d^Jt\;-\;c_l\lambda_l\quad ,\tag{C-50}$$

onde

$$\mathscr{L}^{\star}(t^j,x^i,\partial_j x^i,\lambda_m)\;\equiv\;\mathscr{L}(t^j,x^i,\partial_j x^i)+\lambda_m\,\phi_m(t^j,x^i,\partial_j x^i)\quad ,\tag{C-51}$$

em que o índice de somatório *m* tem os valores $m=1,2,\cdots,K,K+1,\cdots,K+L=M$.

Usando as Eqs. (C-9a,b) e (C-21) para definir δx^i e $\delta\lambda_m$ como variações em torno das expressões $x^i(t)$, $\lambda_k(t)$ e λ_l para as quais I é estacionário, vemos que deve ser nula a variação δI decorrente daquelas variações, a qual, de acordo com a Eq. (C-50), é dada por

$$\delta I=\int_{\mathcal{D}}\delta\mathscr{L}^{\star}\;d^Jt\;-c_l\,\delta\lambda_l\;=0\quad ,\tag{C-52}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}^{\star}&=\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial x^i}\delta x^i+\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial(\partial_j x^i)}\delta(\partial_j x^i)+\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial\lambda_m}\delta\lambda_m\\&=\left\{\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial(\partial_j x^i)}\right]\right\}\delta x^i+\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial\lambda_m}\delta\lambda_m+\frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial\mathscr{L}^{\star}}{\partial(\partial_j x^i)}\delta x^i\right]\quad ,\end{aligned}$$

na qual o último termo surge da eliminação dos $\delta(\partial_j x^i)$, através da Eq. (C-33), do mesmo modo como se fez na Eq. (C-34). Com esse resultado, a Eq. (C-52) torna-se

$$\int_{\mathcal{D}} d^J t \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial(\partial_j x^i)} \right] \right\}}_{0} \delta x^i + \int_{\mathcal{D}} d^J t \underbrace{\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \lambda_k}}_{0} \delta\lambda_k +$$

$$\underbrace{\left[\int_{\mathcal{D}} d^J t \frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \lambda_l} - c_l \right]}_{0} \delta\lambda_l + \int_{\mathcal{D}} d^J t \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial(\partial_j x^i)} \delta x^i \right] = 0 \quad .$$

Nesta equação, a última integral é da mesma forma que a segunda integral na Eq. (C-35) e, pelas razões já dadas, se anula. Também indicamos três termos que são nulos porque, sendo coeficientes de grandezas arbitrárias e independentes (as variações), só com a nulidade deles o membro direito da equação se anula. Temos, portanto, as três equações

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial(\partial_j x^i)} \right] = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N) \quad , \tag{C-53}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \lambda_k} = \phi(t^j, x^i, \partial_j x^i) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, K) \quad , \tag{C-54}$$

$$\int_{\mathcal{D}} d^J t \frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \lambda_l} = \int_{\mathcal{D}} d^J t\, \phi_l(t^j, x^i, \partial_j x^i) = c_l \qquad (l = J+1, \cdots, J+L) \quad . \tag{C-55}$$

Reconhecem-se os vínculos nas Eqs. (C-54) e (C-55). Logo, para se obter a solução $x^i(t^j)$ do problema, devemos resolver o sistema formado pelas equações de vínculo e pela equação de Euler-Lagrange com $\mathscr{L}^\star$ no lugar da função fundamental original $\mathscr{L}$.

Como exemplo, considere um sistema quântico onde as forças são conservativas, originárias do potencial $V(\vec{r})$. A conservação da energia exprime-se através da constância do valor esperado da hamiltoniana *em qualquer estado possível*: $\langle H \rangle = \int_{\mathcal{V}_\infty} \psi^*(\vec{r}) H \psi(\vec{r})\, dV$ = constante *para todo* ψ *possível*. Isto significa que, sob quaisquer variações do estado do sistema considerado ($\delta\psi$ e $\delta\psi^*$ arbitrários: vide nota ao final), $\langle H \rangle$ é estacionário: $\delta\langle H \rangle = 0$. Esta equação, lembrando que $H = \vec{P}^2/2m + V$, com $\vec{P} = -i\hbar\nabla$, desdobra-se na equação $\delta \int_{\mathcal{V}_\infty} \psi^* [(-\hbar^2/2m)\nabla^2 + V]\psi\, dV = 0$, ou

$$\delta \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathscr{L}\, dV = 0 \quad , \qquad \text{com } \mathscr{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \psi^* V \psi \quad . \tag{C-56}$$

Note que as derivadas segundas presentes no termo $\nabla^2\psi$ foram eliminadas, um passo necessário para que a forma da função fundamental se enquadre na formulação ($\mathscr{L}$ deve depender de derivadas das funções incógnitas que não excedam a primeira ordem). Conseguiu-se isso graças ao fato de que

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \psi^* \nabla^2 \psi \, dV = \int_{\mathcal{V}_\infty} [\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) - \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi] dV = \underbrace{\int_{\mathcal{S}_\infty} \psi^* \nabla \psi \cdot \overrightarrow{dS}}_{0} - \int_{\mathcal{V}_\infty} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi \, dV \ ,$$

onde aplicamos o teorema da divergência para obter uma integral de superfície que é nula desde que se admita que $\psi \to 0$ "suficientemente rápido" quando $|\vec{r}| \to \infty$.

Naturalmente, também devemos impor a condição de normalização

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \phi \, dV = 1 \ , \qquad \text{com} \ \ \phi = \psi^* \psi \ . \tag{C-57}$$

Ora, as Eqs. (C-56) e (C-57) definem um problema variacional do tipo que acabamos de estudar. Na aplicação da Eq. (C-53), a função $\mathscr{L}^\star$, de acordo com a Eq. (C-51) (com $-\lambda$ em vez de λ), deve ser

$$\mathscr{L} - \lambda \phi = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_j \psi^*\right)\left(\partial_j \psi\right) + \left(V - \lambda\right)\psi^* \psi = \mathscr{L}^\star\left(z_j, \psi, \psi^*, \partial_j \psi^*, \partial_j \psi, \lambda\right) \ ,$$

onde $\partial_j \psi \equiv \partial \psi / \partial z_j$, a derivada parcial de ψ em relação à coordenada cartesiana z_j. As funções incógnitas a serem determinadas de modo a satisfazer a Eq. (C-56) e o vínculo na Eq. (C-57) são $\psi(\vec{r})$ e $\psi^*(\vec{r})$ (vide nota ao final). A essas duas funções correspondem duas equação de Euler-Lagrange; a que corresponde a ψ^* é

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial(\partial_j \psi^*)} = (V - \lambda)\psi - \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j \psi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + V\psi = \lambda \psi \ , \tag{C-58}$$

ou seja, a função de onda deve satisfazer a equação de Schödinger independente do tempo. A segunda equação de Euler-Lagrange (correspondente a ψ), é a equação de Schödinger acima com ψ^* no lugar de ψ. Esta equação subtraída do conjugado complexo da Eq. (C-58) é a equação $(\lambda - \lambda^*)\psi^* = 0$, pela qual vemos que $\lambda - \lambda^* = 0$, i.e., λ é real.

Nota: Que não se estranhe a necessidade de se considerarem independentes as variações das duas funções ψ e ψ^*, pois uma função complexa equivale a duas funções reais, as suas partes real e imaginária, em termos das quais o problema pode ser resolvido: A substituição de $\psi = f + ig$ na expressão de $\mathscr{L}^\star$ deduzida acima fornece

$$\mathscr{L}^\star (z_j, f, g, \partial_j f, \partial_j g, \lambda) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[(\partial_j f)(\partial_j f) + (\partial_j g)(\partial_j g)\right] + (V - \lambda)(f^2 + g^2) \ ,$$

pela qual se vê claramente a existência de duas funções incógnitas no problema: f e g. As equações de Euler-Lagrange correspondentes são as também equações de Schödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 f + V f = \lambda f \qquad \text{e} \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 g + V g = \lambda g \ .$$

Efetuando a soma e a diferença dessas equações (antes multiplicando a segunda por i), obtemos as já deduzidas equações para ψ e ψ^* [Eq. (C-58) e o conjugado complexo desta].

Referências bibliográficas

J. L. Synge e A. Schild, *Tensor Calculus*, Dover Publications, Inc., New York, 1949.

M. R. Spiegel, *Análise Vetorial*, Coleção Schaum, Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1977.

I. S. Sokolnikoff, *Tensor Analysis*, *2nd Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

A. J. McConnell, *Applications of Tensor Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1957.

R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1975.

A. Einstein, *The Foundation of the General Theory of Relativity*, *The Principle of Relativity*, Cap. VII, Dover Publications, Inc., New York, 1952 (tradução em inglês do artigo na revista alemã *Annalen der Physik*, 49, 1916).