CAPÍTULO 3 - LIMITE E CONTINUIDADE

3.1- Noção Intuitiva

A idéia de limite é fácil de ser captada intuitivamente. Por exemplo, imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente porque está sendo aquecida. Se *x* é o comprimento do lado, a área da placa é dada por $A = x^2$. Evidentemente, quanto mais x se avizinha de 3, a área *A* tende a 9 . Expressamos isto dizendo que quando x se aproxima de 3, x^2 se aproxima de 9 como um limite. Simbolicamente escrevemos:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

onde a notação "$x \to 3$" indica *x* tende a *3* e "lim" significa o limite de.
Generalizando, se *f* é uma função e a é um número, entende-se a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

como " o limite de *f(x)* quando *x* tende a *a* é *L*", isto é, *f(x)* se aproxima do número *L* quando *x* tende a *a*.

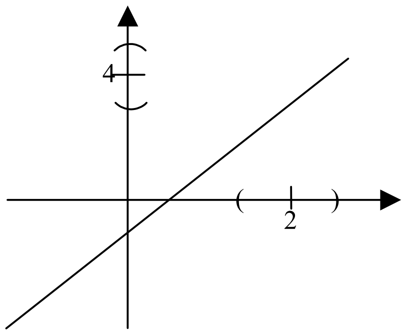
Exemplo 1: Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad Df = \{ x \in R / x \neq 2 \}.$

Se $x \neq 2 \to f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2$

$\therefore$ Se $x \neq 2 \to f(x) = x + 2$

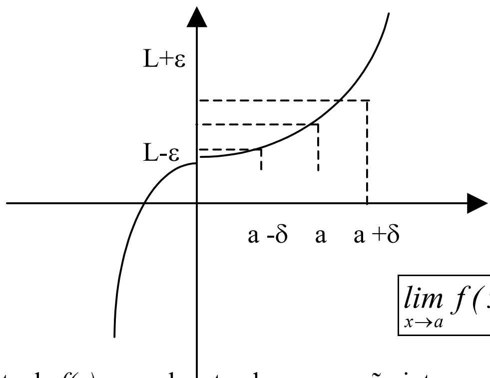
x	f(x)
1	3
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99

x	f(x)
3	5
2,5	4,5
2,1	4,1
2,01	4,01



Note que para todo $x \in V(2, \delta) \to f(x) \in V(4, \varepsilon)$ podemos dizer que o limite *de f(x)* quando *x* tende para *2* é igual a *4* e podemos escrever: $\boxed{\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4}$

De modo geral se $y = f(x)$ definida em um domínio *D* do qual a é ponto de acumulação.



$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Na determinação do limite de *f(x)*, quando *x* tende para *a*, não interessa como *f* está definido em *a* (nem mesmo se *f* está realmente definido). A única coisa que interessa é como *f* está definido para valores de *x* na vizinhança de *a*. De fato podemos distinguir três casos possíveis como segue:

Suponha que $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$. Então exatamente um dos três casos é válido:

Caso 1- *f* está definido em *a* e *f(a)=L*.
Caso 2- *f* não está definido em *a*.
Caso 3- *f* está definido em *a* e *f(a)≠a*

3.2- Definição Formal de Limite

Sendo $f(x)$ definida em um domínio D do qual a é ponto de acumulação dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende para a, e se indica por:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ / $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

A função f é definida em um intervalo aberto qualquer que contenha a, excluindo o valor de a

Exemplos:

Usando a definição de limite, mostre que:

1) $\lim_{x \to 1}(5x + 4) = 9$

$$|(5x+4) - 9| < \varepsilon$$
$$|5x - 5| < \varepsilon$$
$$|5.(x-1)| < \varepsilon$$
$$|5|.|(x-1)| < \varepsilon$$
$$5.|x-1| < \varepsilon$$
$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$$
$$|x-1| < \delta$$
$$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

2) $\lim_{x \to -2}(3x + 1) = -5$

$$|3x + 1 - (-5)| < \varepsilon$$
$$|3x + 1 + 5| < \varepsilon$$
$$|3.(x+2)| < \varepsilon$$
$$|3|.|(x+2)| < \varepsilon$$
$$|x+2| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$|x-(-2)| < \delta$$
$$|x+2| < \delta$$
$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow$ Se $f(x) = x \to y = x$ (Função Identidade)

$\boxed{\lim_{x \to a} x = a}$ P1

$| x-a | < \varepsilon \to | x-a | < \delta$

$\varepsilon = \delta$

$\Rightarrow$ Se $f(x) = k \to y = k$

$\boxed{\lim_{x \to a} k = k}$ P2

3.2.1- Propriedades dos Limites de Funções

Até agora, temos estimado os limites das funções por intuição, com auxílio do gráfico da função, com o uso de álgebra elementar, ou pelo uso direto da definição de limites em termos de ε e δ. Na prática, entretanto, os limites são usualmente achados pelo uso de certas propriedades, que vamos estabelecer agora:

Propriedades Básicas de Limites

Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ e k é uma constante

1) $\lim_{x \to a} x = a$

2) $\lim\limits_{x \to a} k = k$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$

4) $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x) = L.M$

5) $\lim\limits_{x \to a} c.f(x) = c. \lim\limits_{x \to a} f(x)$ onde c é uma constante qualquer

6) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M} \quad \left(\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0 \right)$

7) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) \right]^n = L^n$ (n é um inteiro positivo qualquer)

8) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ se $L>0$ e n é um inteiro positivo, ou se $L<=0$ e n é um inteiro positivo ímpar

9) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) \right]^{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = L^M$

10) $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) \right] = \log_b L$

11) $\lim\limits_{x \to a} sen(f(x)) = sen \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) \right] = sen\, L$

12) $\lim\limits_{x \to a} | f(x) | = | \lim\limits_{x \to a} f(x) | = | L |$

13) Se h é uma função tal que $h(x)=f(x)$ é válido para todos os valores de x pertencent6es a algum intervalo ao redor de a, excluindo o valore de $x=a$, então
$\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Observação: Demonstração das propriedades em sala de aula.

Exercícios:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{5x - 1}$

$$\frac{\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 2x}}{\lim\limits_{x \to 2} 5x - 1} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 2x}}{\lim\limits_{x \to 2} 5x - \lim\limits_{x \to 2} 1} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 2x}}{5 \lim\limits_{x \to 2} x - 1} = \frac{\sqrt{2^2 + 2.2}}{5.2 - 1} = \frac{\sqrt{4+4}}{10-1} = \frac{\sqrt{8}}{9}$$

2) Seja $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ e $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$, ache cada limite

a- $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$

b- $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) - g(x)]$

c- $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{f(x).g(x)}$

3) Avalie cada limite e indique quais das propriedades de 1 a 13

a- $\lim\limits_{x \to -1} [5 - 3x - x^2]$

b- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$

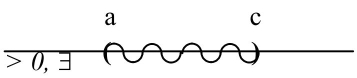
c- $\lim\limits_{t \to 1/2} \dfrac{t^2 + 1}{1 + \sqrt{2t + 8}}$

d- $\lim\limits_{x \to 5/2} \dfrac{4x^2 - 25}{2x - 5}$

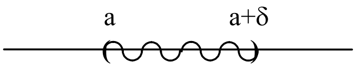
e- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(1/\sqrt{x}\right) - 1}{1 - x}$

3.3- Limites Laterais

Limite à direita:

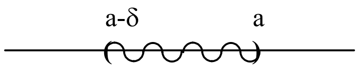
Seja f uma função definida em um intervalo *(a, c)* 

e L um número real, a afirmação $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, significa que para todo $\varepsilon > 0, \exists$ pre *que* $0 < x - a < \delta$ $\rightarrow$ $a < x < a + \delta \rightarrow$



Limite à esquerda:

Seja f uma função definida no intervalo *(c, a)* e L um número real, a afirmação $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, significa que para todo $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, |f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $-\delta < x - a < 0$ $\rightarrow$ $a - \delta < x < a$



3.3.1- Teorema

O limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e é igual a L se e somente se ambos os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existem e tem o mesmo valor comum *L*.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Exemplos:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = ? \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = (2.1 - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = (1)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{são iguais} \therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

2) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x > 2 \\ -2x + 4 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = ? \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{são diferentes} \therefore \lim_{x \to 2} f(x) = \text{não existe}$$

<u>Exercícios:</u>

1- Nos problemas de a até c trace o gráfico das funções dadas, ache os limites laterais das funções dadas quando x tende para a pela direita e pela esquerda e determine o limite da função quando x tende para a (se o limite existe)

a) $f(x)=\begin{cases}5+x \text{ se } x\le 3\\ 9-x \text{ se } x>3\end{cases};a=3$

b) $f(x)=\begin{cases}2-x \text{ se } x>1\\ x^2 \text{ se } x\le 1\end{cases};a=1$

c) $S(x)=5+|6x-3|,a=\dfrac{1}{2}$

2- Explique porque freqüentemente achamos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ apenas pelo cálculo do valor de f no ponto a. Dê um exemplo para mostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ pode não ocorrer

3.4- Continuidade das Funções

Mencionamos anteriormente que quando o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, a função f é contínua em a. De agora em diante consideraremos isto uma definição oficial.

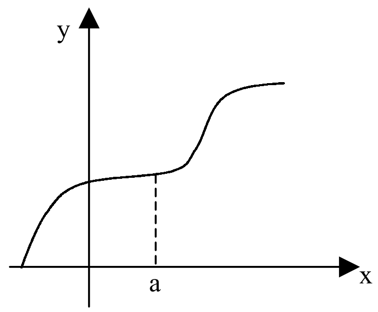
Definição 1: Dizemos que a função f é contínua em um número a se e somente se as seguintes condições forem válidas.

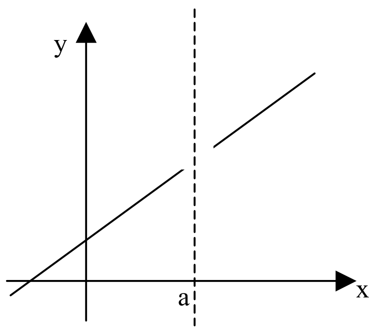
Condições:

$\exists\ f(a)$

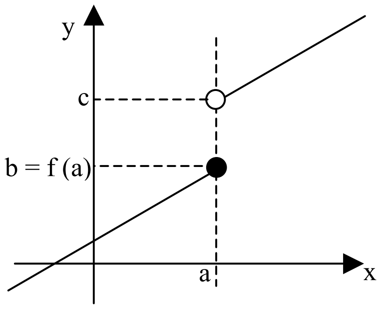
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

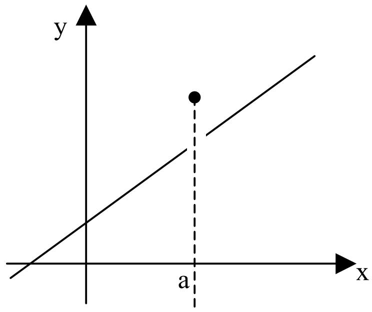
$f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$





$\nexists$ f(a)





$\exists\ f(a)$ OK!

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \not\exists \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c \end{cases} \therefore \neq$

$\exists\ f(a)$ OK!

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ OK!

$f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Exercícios:

1) Verificar se $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 + x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua para x = 1 :

i) $f(1) = 2$ OK!

ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 - 1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2 \end{cases}$

São iguais $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ OK!

iii) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ OK!

Resposta: É contínua

2) Verificar se $f(x) = x^2 - 3$ é contínua para $x = 0$:

$f(0) = -3$ OK!

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3$ OK!

$f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Resposta: Como as condições 1 e 3 da definição 1 foram satisfeitas, concluímos que f é contínua em 0

3) Verifique se a função *f* definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1} & se\ x \neq 1 \\ 3 \quad se\ x = -1 \end{cases}$ é contínua para o número -1

Observações Importantes: Se os dois limites laterais $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existem e têm o mesmo valor, é claro que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e que todos os três limites têm o mesmo valor. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, os dois limites laterais $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existem e todos os três limites são iguais. Consequentemente, se os dois limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existem, mas têm valores diferentes, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não pode existir.

Exercícios

1- Em cada exemplo, (a) trace o gráfico da função, (b) ache os limites laterais da função quando $x \to a^-$ e quando $x \to a^+$, (c) determine o limite da função quando $x\to a$ (se ele existe) e (d) diga se a função é contínua no valor a

1- $f(x) = \begin{cases} 2x + 1\ se\ x < 3 \\ 10 - x\ se\ x \geq 3 \end{cases} \quad ; a = 3$

2- $f(x) = \begin{cases} |x - 2|\ se\ x \neq 2 \\ 1\ se\ x = 2 \end{cases} \quad ; a = 2$

3- $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & se\ x \le 1 \\ 1+x^2 & se\ x > 1 \end{cases} \quad ; a=1$

3.4.1- Propriedades das Funções Contínuas

Suponha que *f* e *g* sejam duas funções contínuas no número *a*. Então tanto *f(a)* como *g(a)* são definidas, e consequentemente *(f+g)(a)=f(a)+g(a)* é definida.
1- Se *f* e *g* são contínuas em *a*, então *f+g*, *f-g* e *f.g* também o são.
2- Se *f* e *g* são contínuas em a e *g(a)≠0*, então *f/g* é contínua em a.
3- Se g é contínua em *a* e *f* é contínua em *g(a)*, então $f \circ g$ é contínua em *a*.
4- Uma função polinomial é contínua em todos os números.
5- Uma função racional é contínua em todo número no qual está definida.

Exercícios
1- Use as propriedades básicas de função contínua para determinar em quais números as funções dadas são contínuas. Trace o gráfico das funções.

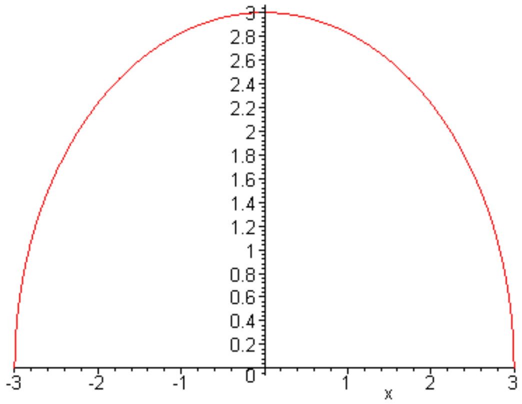
1- $f(x)=x+|x|$

2- $f(x)=|x^2|$

3- $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

3.4.2- Continuidade em um intervalo

Dizer que uma função f é contínua em um intervalo aberto I significa, por definição, que f é contínua em todos os números no intervalo I. Por exemplo, a função $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ é contínua no intervalo aberto (-3,3)



Da mesma forma, dizer que uma função *f* é contínua em um intervalo fechado *[a,b]* significa, por definição que *f* é contínua no intervalo aberto *(a,b)* e que satisfaz as seguintes condições de continuidade nos pontos finais *a* e *b*:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

Por exemplo, a função $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ é contínua no intervalo fechado [-3,3]

3.5- Limite de Função Composta

Sejam *f* e *g* duas funções tais que Im*f* C D_g. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x\to p} g(f(x))$$

Supondo que $\lim\limits_{x\to p} f(x)=a$ é razoável esperar que

$\lim\limits_{x\to p} g(u)=\lim\limits_{u\to a} g(u)$ sendo *u=f(x)*

Os casos que interessarão ao curso são aqueles em que *g* ou é contínua em *a* ou não está definida em *a*. O quadro que apresentamos a seguir mostra como iremos trabalhar com o limite de função composta no cálculo de limites.

$$\lim_{x \to p} F(x) = ?$$

Suponhamos que existam funções *g(u)* e *u=f(x)*, onde *g* ou é contínua em *a* ou não está definida em *a*, tais que *F(x)=g(u)* onde *u=f(x)*, x ∈ D*f*, $\lim_{x \to p} f(x) = a$ ($u \to a$ para $x \to p$) e que $\lim_{u \to a} g(u)$ exista. Então

$$\lim_{x \to p} F(x) = \lim_{u \to a} g(u)$$

Exercícios

1- Calcule os limites

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$

c) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x + 2} - 1}{x + 1}$

d) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{3x + 5} - 2}{x^2 - 1}$

2) Seja f definida em R. Suponha que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

3) Seja f definida em R e seja p um real dado. Suponha que $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L$ calcule

a) $\lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(p + 3h) - f(p)}{h}$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(p - h) - f(p)}{h}$

3.6- Limite das Funções Algébricas Racionais Inteiras (Polinomiais)

$$F(x) = a_0 . x^n + a_1 . x^{n-1} + ... + a_n$$

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

3.7- Limite das Funções Racionais Fracionárias

$$F(x)=\frac{Q(x)}{g(x)}$$

$$Q(x)=a_0.x^n+a_1.x^{n-1}+\ldots+a_n$$

$$g(x)=b_0.x^m+b_1.x^{m-1}+\ldots+b_m$$

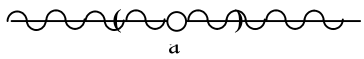
$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{g(x)}=\frac{Q(a)}{g(a)}$$

$*\ Se\ Q(a)=0\ e\ g(a)\neq 0$

$$\frac{0}{n^o}=0$$

$*\ Se\ Q(a)\neq 0\ e\ g(a)=0$

$$\frac{n^o}{0}$$



a função não está definida para $x = a$

$$\frac{n^o}{0}=\begin{cases}+\infty\\-\infty\\ não\ existe\end{cases}$$

$$\frac{n^o}{0}\to Calcule:$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{Q(x)}{g(x)}=\pm\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{Q(x)}{g(x)}=\pm\infty\end{cases}\to são\ iguais\ \therefore\ \lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{g(x)}=\pm\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{Q(x)}{g(x)}=\pm\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{Q(x)}{g(x)}=\mp\infty\end{cases}\to são\ diferentes\ \therefore\ \lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{g(x)}=não\ existe$$

<u>Exercícios</u>:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+2}{4x^2-9}=\dfrac{7}{-5}=-\dfrac{7}{5}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{5x+2}=\dfrac{0}{12}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x-2}=\dfrac{10}{0}=?$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{5x}{x-2}=\dfrac{10}{0^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{5x}{x-2}=\dfrac{10}{0^-}=-\infty\end{cases}\to\neq\ \therefore\ não\ existe$$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{(x-2)^2}=\dfrac{10}{0}=?$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{5x}{(x-2)^2}=\dfrac{10}{0^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{5x}{(x-2)^2}=\dfrac{10}{0^+}=+\infty\end{cases}\to=\ \therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{5x}{(x-2)^2}=+\infty$$

$$*Se\ Q(x) = g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \to \text{indeterminação} = \frac{\infty}{\infty}, etc.$$

Exercícios:

1) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} x + 2$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

2) $$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)}{(x^2 - 3x + 2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

$$= \frac{(2+2)}{(2-1)}$$

$$= 4$$

3) $$\lim_{z \to -2} \frac{z^4 + 3z^3 - 4z}{z^2 + 4z + 4} = \frac{0}{0}$$

(z+2)	-2	1	3	0	-4	0
(z-1)	1	1	1	-2	0	
		1	2	0		

$$z^2 + 2z = 0$$

$$\begin{cases} z = 0 \to z \\ z = -2 \to (z+2) \end{cases}$$

z

$$= (-2 - 1).(-2)$$

$$= 6$$

4) $$\lim_{x \to -1} \frac{t^3 + 1}{t + 1} = \frac{0}{0}$$

(t+1)	1	1	0	0	1	0
		1	-1	1	0	

$$(t + 1) . (t^2 - t + 1)$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{(t+1)}$$

$$= ((-1)^2 - (-1) + 1)$$

$$= 3$$

3.8- Limite das Funções Irracionais

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x+2-2}{x.\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x}{x.\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Outra maneira:
<u>Substituição de Variável</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{cases} x+2=t^2 \\ x=t^2-2 \\ x\to 0 \therefore t\to\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-2}$$

$$=\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{t-\sqrt{2}}{\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{1}{t+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

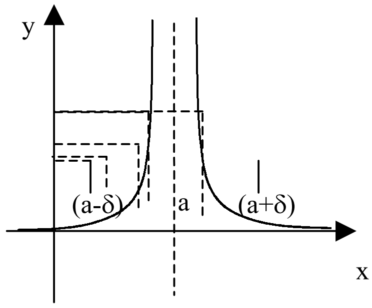
3.9- Limites Envolvendo Infinito

<u>Definições:</u>

1) Dizemos que um elemento c é finito quando $c \in R$ e dizemos que c é infinito quando c é um dos símbolos $+\infty$ ou $-\infty$.
Obs.: quando valer a frase do limite para b finito ou infinito, diremos que existe o limite e indicaremos por $\exists \lim_{x\to b} f(x)=\begin{cases} c \\ +\infty \end{cases}$. Em caso contrário diremos que não existe o limite e escreveremos $\nexists \lim_{x\to b} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to b+} f(x) \\ \lim_{x\to b-} f(x) \end{cases} \rangle \neq .$

2) Seja f definida em um intervalo $(c, +\infty)$. A afirmação $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, significa que a todo $\varepsilon > 0$ corresponde um número positivo N, tal que $|f(x)-L| < \varepsilon \quad \forall \quad x > N$.

3) Seja f definida em uma vizinhança perfurada de a, a afirmação $f(x)$ se torna infinita quando x tende para a que se escreve: $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, significa que para todo número positivo N, corresponde um $\delta > 0 \,/\, f(x) > N$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$.



3.10- Limite das Funções Algébricas Racionais Inteiras (Polinomiais)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{a_0x^n}_{\text{grau mais alto}} + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} a_0x^n = \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$$

Exercícios

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3 + 4x^2 - 2x - 1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^2 + 3x - 2\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$

3.11- Limite das Funções Racionais Fracionárias

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0.x^m + b_1.x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0.x^n}{b_0.x^m}$$

Se :

$* \; n > m \Rightarrow +\infty ou - \infty$

$* \; n < m \Rightarrow 0$

$* \; n = m \Rightarrow \dfrac{a_0}{b_0}$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3 + 4x - 2}{2x^2 + 6x - 1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3}{2x^2} = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 + 5x + 2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{\infty} = 0$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 4}{4x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x - 4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^5}{4x^5} = \frac{3}{2}$$

Indeterminações:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$$

3.12- Seqüência e Limite de Seqüência

Uma seqüência ou sucessão de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de N. As seqüências que vão interessar ao curso são aquelas cujo domínio contém um subconjunto do tipo $\{n \in N / n \geq q\}$ onde q é um natural fixo; só consideraremos tais seqüências.

Exemplos:

1- Seja a seqüência de termo geral $a_n = 2^n$. Temos

$a_0 = 2^0, a_1 = 2^1, a_2 = 2^2, \ldots$

2- Seja a seqüência de termo geral $s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ temos

$s_1 = 1, s_2 = 1 + 2, s_3 = 1 + 2 + 3$ etc.

Sejam $m \leq n$ dois naturais. O símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

leia: somatório de a_k, para k variando de m até n e é usado para indicar a soma dos termos $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$

Definição: Consideremos uma seqüência de termo geral a_n e seja a um número real.

Definimos

(i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n < -\varepsilon$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, diremos que a seqüência de termo geral a_n converge para a ou, simplesmente, que a_n converge para a e escrevemos $a_n \to a$. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, diremos que a_n para $+\infty$ e escrevemos $a_n \to +\infty$. Observamos que as definições dadas aqui são exatamente as mesmas que demos quando tratamos com limite de uma função *f(x),* para $x \to +\infty$; deste modo, tudo aquilo que dissemos sobre os limites da forma $\lim_{n\to+\infty} f(x)$ aplica-se aqui.

Exercícios

1- Calcule os limites

a- $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n+1}$

b- $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 2}$

c- $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

2- Supondo que 0<b<1, calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n$

3- Suponha a>1. Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

4- Considere a seqüência de termo geral $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k$, $t\neq 0$ e $t\neq 1$. Verifique que $s_n = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$

3.13- Limite das Funções Transcendentais

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(ln(x^2+4)-ln(2x-1)\right)=\infty-\infty \to$ indeterminação

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(ln\dfrac{x^2+4}{2x-1}\right)$

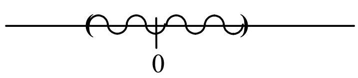
$= ln \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{2x-1}$

$= ln \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x}$

$=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=\dfrac{0}{0}\to$ indeterminação

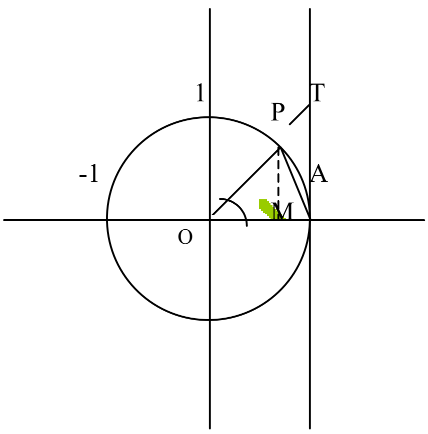
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen x}}{\text{x}}=1\to \text{lim. notável}$

$\text{f(x)}=\dfrac{\text{sen x}}{\text{x}}=$ 

3.14- Limites Notáveis

1) $\boxed{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{sen\,u}{u}=1}$ **(1º Limite Fundamental)**

Demonstração:



$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{sen\,t}{t}$

$f(t)=\dfrac{sen\,t}{t}$

$t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{S_{OQP}=\dfrac{t}{2}}$

$\boxed{S_{\Delta OQP}=\dfrac{sen\,t}{2}}$ $\boxed{S_{\Delta OQQ'}=\dfrac{sen\,t}{2.cos\,t}}$

$*\dfrac{1}{2}\dfrac{sen\,t}{cos\,t}>\dfrac{t}{2}>\dfrac{sen\,t}{2} \qquad x(2)$

$\dfrac{sen\,t}{cos\,t}>t>sen\,t \qquad \div(sen\,t)$

$\dfrac{1}{cos\,t}>\dfrac{t}{sen\,t}>1 \qquad (inverte-se\ e\ troca-se\ os\ sinais)$

$1>\dfrac{sen\,t}{t}>cos\,t$

$$* \lim_{t\to 0} \frac{sen\, t}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} 1 > \lim_{t\to 0} \frac{sen\, t}{t} > \lim_{t\to 0} \cos t$$

$$1 > \lim_{t\to 0} \frac{sen\, t}{t} > 1$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{sen\, t}{t} = 1}$$

Exemplo:

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{5.sen\, 5x}{5x}$$

$$= 5.\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 5x}{5x}}_{=1}$$

$$= 5.1 = 5$$

2) $$\boxed{\lim_{u\to 0} (1+u)^{1/u} = e}$$ **(2º Limite Fundamental)**

Exemplos:

1) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

2) $$\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\tan x} = e$$

3) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{2/x}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}\right]^2$$

$$= e^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{k}{x}} = e^x}$$

4) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}}$$

5) $$\lim_{x\to 0} (1+2x)\frac{1}{x}$$

$$2x = y \Rightarrow x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

$$x = \frac{y}{2}$$

$$= \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{2}{y}} = e^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k}$$

3) $$\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u} = 1}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{sen\, u}{\cos u} \cdot \frac{1}{u} =$$

$$\underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{sen\, u}{u}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{1}{\cos u}}_{=1} = 1$$

4) $\boxed{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e}$

* Substituir: $\frac{1}{u}=y \Rightarrow u\to\infty \Rightarrow y\to 0$

$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e^{k}}$

<u>Exemplos:</u>

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ku}=e^{k}$$

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{k}{u}\right)^{u}=e^{k}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=e^{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=e^{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}=e^{15}$$

5) $\boxed{\lim_{u\to 0}=\frac{a^{u}-1}{u}=\ln a}$

* Substituir: $a^{u}-1=y \therefore a^{u}=y+1$

$u\to 0\Rightarrow y\to 0 \qquad u=\log_a(y+1)$

$$*\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\left[\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}\right]^{-1}=\left[\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\log_a(1+y)\right]$$

$$=\left[\lim_{y\to 0}\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}=\left[\log_a\underbrace{\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{=e}\right]^{-1}=[\log_a e]^{-1}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\frac{1}{\frac{\log_e e}{\log_e a}}=\frac{1}{\frac{1}{\log_e a}}$$

$=\log_e a$

$=\ln a$

6) $\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}=1}$

7) $\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{\log(1+u)}{u}=\log_a e}$

$$*\lim_{u\to 0}\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}=\log_a\lim_{u\to 0}(1+u)\frac{1}{u}=\log_a e$$

8) $\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1}$

Limites Notáveis

1) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{sen}\, u}{u} = 1$

2) $\lim\limits_{u\to 0} (1+u)^{1/u} = e$

3) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\tan u}{u} = 1$

4) $\lim\limits_{u\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u} = e$

5) $\lim\limits_{u\to 0} = \dfrac{a^{u}-1}{u} = \ln a$

6) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^{u}-1}{u} = 1$

7) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\log(1+u)}{u} = \log_a e$

8) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$

3.15- Assíntotas Horizontais e Verticais

Assíntotas são retas que tangenciam o gráfico de uma função, no infinito, e normalmente são paralelas aos eixos x e y. Estes próprios eixos podem ser assíntotas.

Assíntota Vertical

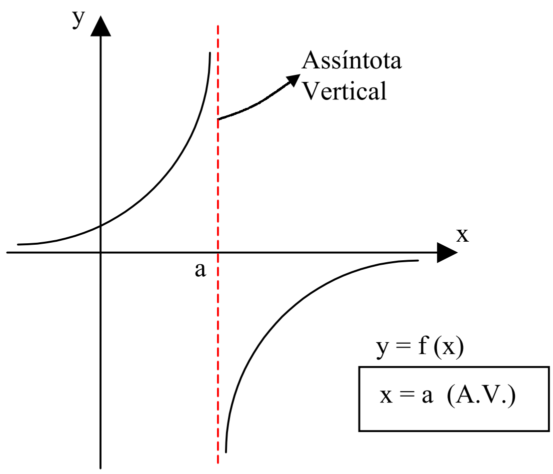
Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f se for verificada uma das seguintes condições:

1) $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x) = -\infty$

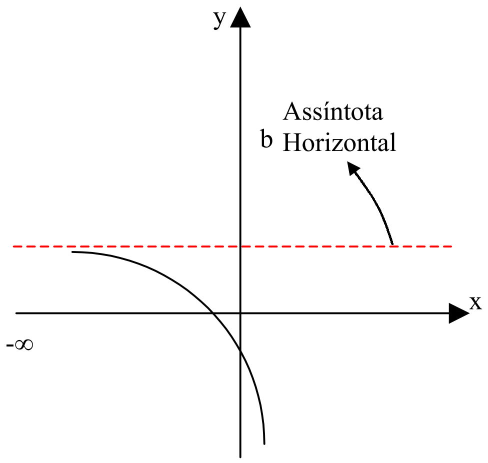


Assíntota Horizontal

Dizemos que a reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f se uma das condições abaixo for verificada:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$



$y = f(x)$

$Df = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\boxed{x = a \ \text{(A.V.)}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

$\boxed{y = b \ \text{(A.H.)}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

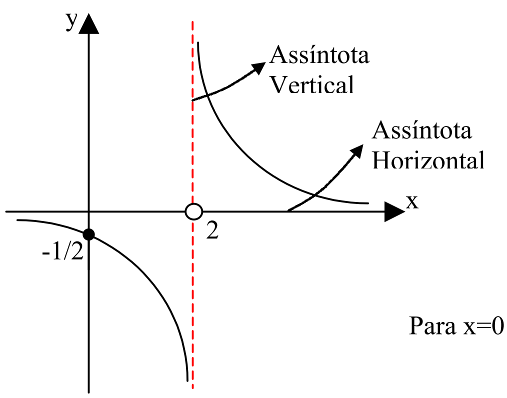
$\boxed{y = c \ \text{(A.H.)}}$

Assíntotas verticais envolvem limites infinitos, enquanto que assíntotas horizontais envolvem limites no infinito

Exercícios

1) Determinar as assíntotas e fazer um gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

$Df = \{x \in R \,/\, x \neq 2\}$



Para x=0 → y = -1/2

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$x = 2 \to$ A.V.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

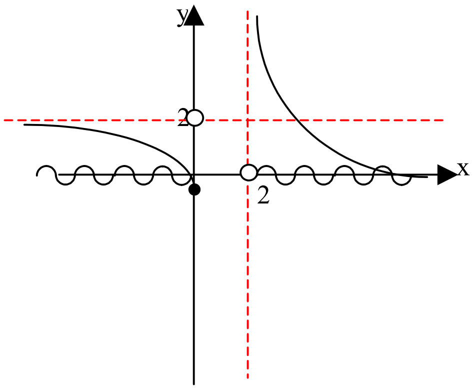
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

$y = 0 \to$ A.H.

2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}$

$Df=\{x\in R\,/\,\dfrac{4x}{x-2}\geq 0$

$Df=\{x\in R\,/\,x\leq 0 \text{ ou } x>2$



Para $x=0\to y=0$

$y=\sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x}{x-2}}=\sqrt{\dfrac{8}{0^+}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x}{x-2}}=\sqrt{4}=2$

$y=2\to$ A.H.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}=2$

3) Dada a função $f(x)=\dfrac{2x-6}{x-5}$, achar as assíntotas.

4) Seja $y=f(x)=\dfrac{4}{2x-3}$. Achar as assíntotas.