

Tensões de Flexão nas Vigas

Introdução:

Observamos anteriormente como cargas atuando sobre uma viga criam ações internas (ou tensões resultantes).

As cargas que atuam numa viga a fazem fletir (ou curvar), e assim deformar o seu eixo em uma curva. Como, exemplo considere a viga engastada AB da Figura 1 submetida a uma carga P em sua extremidade livre.

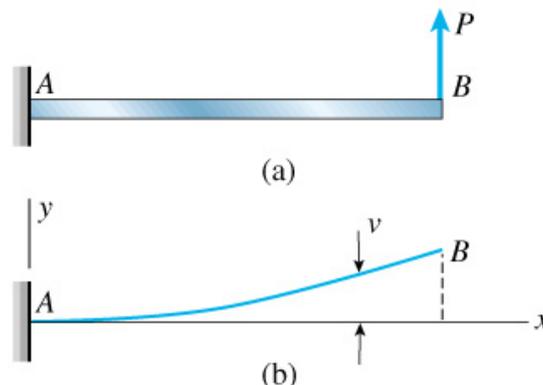


Figura 1 - Flexão em uma viga engastada: (a) Viga com carregamento (b) Curva de deflexão. (Gere, 2003)

Vigas consideradas no nosso estudo de flexão

- 1- Todas as forças aplicadas a uma viga serão consideradas sem a ocorrência de choque ou impacto.
- 2- Todas as vigas serão consideradas estáveis sob a ação das forças aplicadas.
- 3- As vigas serão consideradas como simétricas em relação ao plano xy , ou seja, o eixo y é um eixo de simetria da seção transversal.
- 4- Todas as cargas atuam no plano xy , conseqüentemente a deflexão da viga ocorre neste mesmo plano, conhecido como plano de flexão.

Não esquecer!!

A deflexão da viga em qualquer ponto ao longo de seu eixo é o deslocamento desse ponto em relação à sua posição original, medida na direção de y .

Flexão Pura e Flexão Não-Uniforme

Flexão Pura - Referente à flexão na viga submetida a um momento fletor constante.

Ocorre nas regiões onde a força de cisalhamento é zero, pois $V=dM/dx$

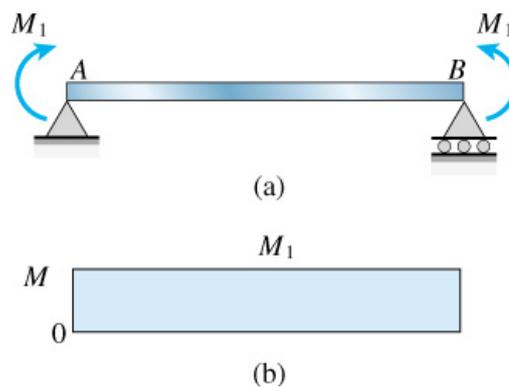


Figura 2- Viga simples em flexão pura ($M=M_1$)

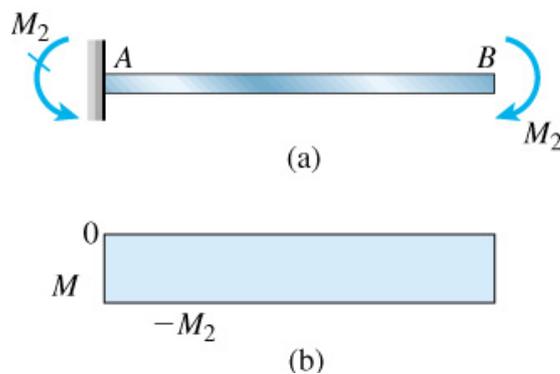


Figura 3- Viga engastada em flexão Pura ($M=-M_2$)

Flexão Não-Uniforme – Flexão na presença de forças de cisalhamento, o que significa que o momento fletor varia quando nos movemos ao longo do eixo da viga. Veja a Figura 4.

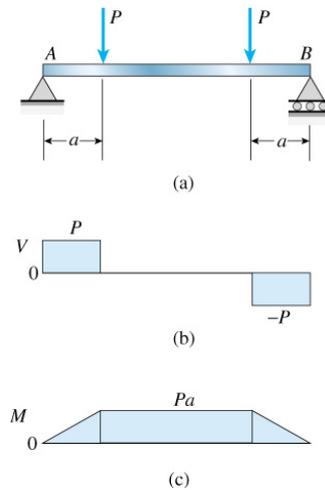


Figura 4 – Viga com região central em flexão pura e extremidades em flexão não-uniforme. (Gere,2003).

Curvatura de uma viga

Quando cargas são aplicadas a uma viga, seu eixo longitudinal é deformado em uma curva, como ilustrado anteriormente. As tensões e deformações resultantes estão diretamente relacionadas à **curvatura** da curva de deflexão. Ilustração do conceito de curvatura. Veja Figura 5.

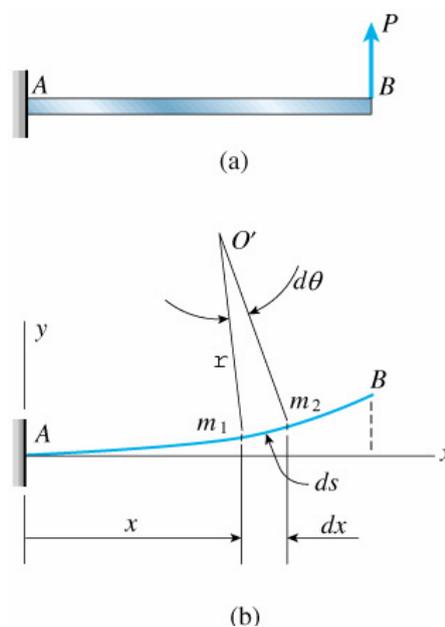


Figura 5 – Curvatura da viga fletida: (a) Viga com carregamento e (b) Curva de deflexão.

O' - Centro de curvatura interseção das normais às tangentes às curvas de deflexão (normal à própria curva).

mIO' - Raio de curvatura (ρ)

κ - Curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura. Assim,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad (1)$$

É uma medida de quão intensamente a viga é flexionada.

Carga pequena na viga \rightarrow Viga praticamente reta \rightarrow Raio de curvatura grande \rightarrow Curvatura pequena e vice-versa.

A partir da geometria do triângulo $O'm_1m_2$ obtemos:

$$\rho d\theta = ds \quad (2)$$

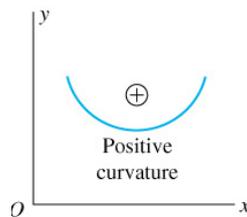
onde $d\theta$ é o ângulo infinitesimal entre as normais medido em radianos e ds é a distância infinitesimal ao longo da curva m_1 e m_2 , Combinando a eq.(2) com (1) tem-se

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3)$$

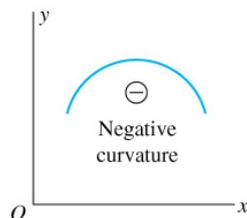
Sob as condições especiais de pequenas deflexões tem-se que:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (4)$$

Convenção de sinais para a curvatura – Apresenta-se na Figura 6



(a)



(b)

Figura 6- Convenção de sinal para a curvatura

Deformações longitudinais em vigas

As deformações longitudinais em uma viga podem ser encontradas analisando-se a curvatura da viga e as deformações associadas. Vamos analisar uma parte AB de uma viga em flexão pura submetida a momentos fletores positivos M como mostra a Figura 7.

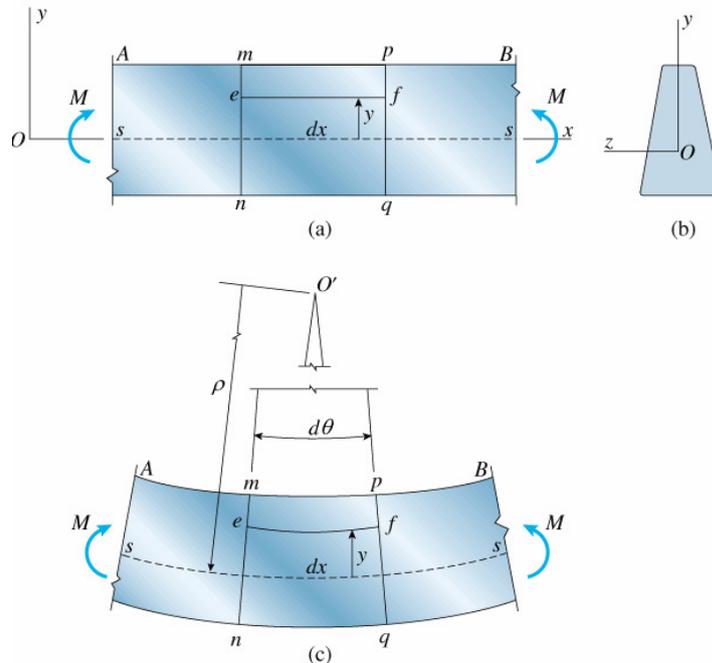


Figura 7- Deformações em uma viga em flexão pura: (a) vista lateral da viga, (b) seção transversal da viga e (c) Viga deformada.

Hipótese fundamental da teoria da flexão: As seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão.

Essa conclusão é válida para vigas de qualquer material, seja ele elástico ou inelástico, linear ou não-linear. As propriedades dos materiais, assim como as dimensões, devem ser simétricas em relação ao plano de flexão.

As linhas longitudinais na parte inferior da viga são alongadas (tracionadas), enquanto aquelas na parte superior são diminuídas (comprimidas).

Superfície Neutra ss : é uma superfície em algum lugar entre o topo e a base da viga em que as linhas longitudinais não mudam de comprimento.

Linha neutra: é a interseção da superfície neutra com qualquer plano de seção transversal. O eixo z é a linha neutra da seção transversal ilustrada na Figura 7.b.

Cálculo das deformações normais ε_x

Para obter as deformações normais, considere uma linha longitudinal ef localizada entre os planos mn e pq . O comprimento L_l da linha ef depois que a flexão ocorre é:

$$L_l = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho} dx \quad (5)$$

O comprimento original da linha ef é dx , segue que seu alongamento é $L_l - dx$, ou $-y dx/\rho$. A deformação longitudinal é dada por:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (6)$$

onde κ é a curvatura.

Casos:

Ponto acima da superfície neutra - $y > 0$, $\kappa > 0 \Rightarrow \varepsilon_x < 0 \Rightarrow$ Encurtamento

Ponto abaixo da superfície neutra - $y < 0$, $\kappa > 0 \Rightarrow \varepsilon_x > 0 \Rightarrow$ Alongamento

As deformações em uma viga em flexão pura variam linearmente com a distância em relação à superfície neutra, independentemente da forma da curva de tensão-deformação do material.

Tensões normais em vigas (Materiais Elásticos Lineares)

A relação tensão deformação mais comum encontrada na engenharia é a equação do material linear e elástico. Para tais materiais, substituímos a lei de Hooke para tensões uniaxiais ($\sigma = E\varepsilon$) na eq. (6) e obtemos

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y \quad (7)$$

A eq. (7) mostra que a tensão normal varia linearmente com a distância y da superfície neutra. Note a distribuição de tensão na Figura 8.

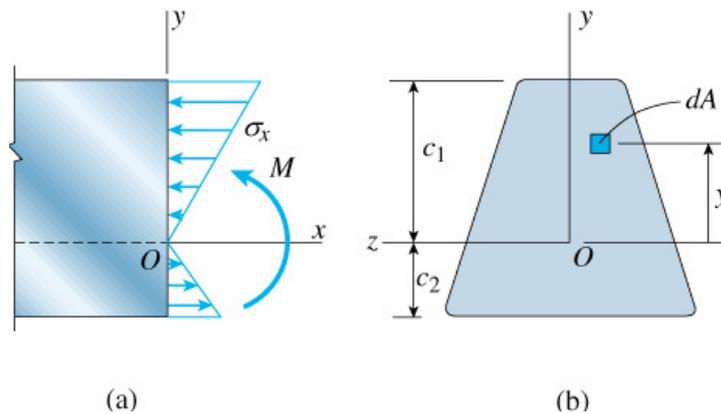


Figura 8- Tensões normais em uma viga de material elástico linear: (a) vista lateral da viga mostrando a distribuição das tensões normais e (b) seção transversal da viga mostrando o eixo z como a linha neutra da seção transversal.

Observações sobre a Figura 8:

$M > 0$; $\kappa > 0$; $\sigma_x < 0$ (compressão) acima da superfície neutra; $\sigma_x > 0$ (tração) abaixo da superfície neutra.

Localização da Linha Neutra

Analisando a Figura 8.

Força agindo sobre o elemento $dA \rightarrow \sigma_x dA$ (compressão) se $y > 0$

Quando a viga está submetida à flexão pura, a força axial é zero. Assim tem-se que a força resultante na direção x é zero e assim a primeira equação da estática é

$$\int_A \sigma_x dA = - \int_A E \kappa y dA = 0 \quad (8)$$

$$E, \kappa \neq 0 \quad \therefore \int_A y dA = \bar{y} A = 0 \quad (9)$$

Onde \bar{y} é a distância de uma linha base (o eixo neutro) ao centróide da área A e $\bar{y} A = 0$.

Como A não é nula, \bar{y} deve ser igual a zero. Desta forma, a distância do eixo neutro ao centróide da área deve ser nula, e então o eixo neutro deve passar pelo centróide da seção transversal da viga. O eixo neutro pode ser determinado para qualquer viga, basta determinar o centróide da área da seção transversal.

Importante:

- 1- A linha neutra passa através do centróide da área da seção transversal quando o material segue a lei de Hooke e não existem forças axiais agindo na seção transversal.
- 2- A origem O das coordenadas (Figura 8.b) está localizada no centróide da área da seção transversal

Relação Momento-Curvatura

A segunda condição de equilíbrio do problema da Figura 8 é que a soma de todos os momentos em relação ao eixo z deve ser nula. De acordo com a Figura 8.a tem-se

$$\sum M_z = 0, \quad M + \int_A (\sigma_x dA)y = 0 \Rightarrow M = - \int_A (\sigma_x dA)y \quad (10)$$

Substituindo-se a eq. (7) em (10) tem-se:

$$M = - \int_A (-E\kappa y dA)y \Rightarrow M = E\kappa \int_A y^2 dA \quad (11)$$

A eq. (11) relaciona a curvatura da viga ao momento fletor. A eq. (11) pode ser escrita da seguinte forma:

$$M = E\kappa I \quad (12)$$

Onde $I = \int_A y^2 dA$ é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z que passa pelo centróide, quando y é medido a partir de tal eixo. A eq. (12) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$\kappa = \frac{I}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (13)$$

Conhecida como a **equação momento curvatura**. Nota-se que a curvatura é diretamente proporcional ao momento fletor M e inversamente proporcional ao produto EI que é chamado rigidez de flexão da viga.

Quanto maior a rigidez a flexão, menor será a curvatura para um dado momento fletor.

A convenção de sinais para momentos fletores comparada com a convenção de sinais para curvatura apresenta-se na Figura 9.

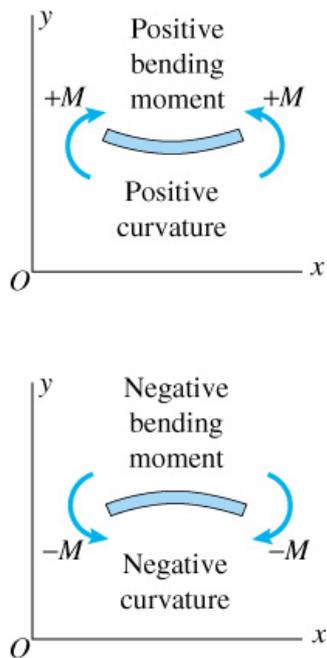


Figura 9 – Relações entre sinais de momentos fletores e sinais de curvaturas

Fórmula de flexão

Substituindo-se a expressão (13) em (7) tem-se

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (14)$$

Essa equação é chamada de fórmula e flexão. Tensões calculadas a partir da fórmula de flexão são chamadas de tensões fletoras ou tensões de flexão.

A expressão (14) mostra que as tensões são diretamente proporcionais aos momentos fletores e que aumenta linearmente com o aumento de y . Nota-se que momentos fletores positivos causam tensões de compressão na viga na parte superior acima da linha neutra e causam tensões de tração na parte inferior, pois o y é negativo e também se pode visualizar este resultado na prática. Caso os momentos sejam negativos, as tensões terão sinais invertidos como mostra a Figura 10.

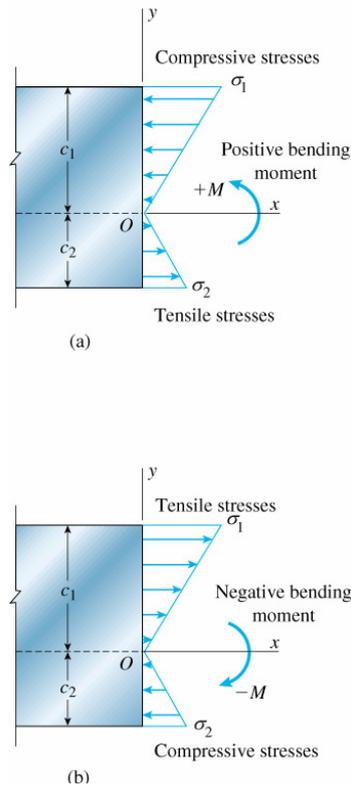


Figura 10 – Relações entre os sinais dos momentos fletores e as direções das tensões normais: (a) momento fletor positivo e (b) momento fletor negativo.

Tensões Máximas na Seção Transversal

As tensões máximas de flexão ocorrem nos pontos mais distantes da seção. Denota-se c_1 e c_2 a distância da linha neutra para os elementos extremos como mostra a Figura 10. As tensões normais máximas correspondentes σ_1 e σ_2 , provenientes da fórmula de flexão na eq. (14) são:

$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1} \text{ e } \sigma_2 = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2} \quad (15)$$

Em que,

$$S_1 = \frac{I}{c_1} \text{ e } S_2 = \frac{I}{c_2} \quad (16)$$

S_1 e S_2 – *Módulos de Seção* da área da seção transversal.

Dimensões de S_1 e S_2 : (Comprimento)³

Vantagens:

As vantagens de se expressar as tensões máximas em termos de módulo de seção vêm do fato de que cada módulo de seção combina as propriedades relevantes da seção transversal da viga em um valor singular. Esse valor pode ser listado em tabelas e manuais como uma propriedade da viga, o que é mais conveniente para projetistas.

Fórmulas para Seções Duplamente simétricas

Caso a seção transversal da viga é simétrica em relação ao eixo z e eixo y , então $c=c_1=c_2$ e as tensões máximas de tração e de compressão são numericamente iguais.

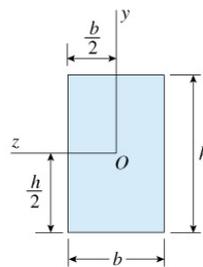
$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{Mc}{I} = -\frac{M}{S} \quad (17)$$

Em que

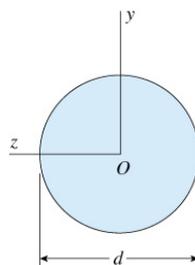
$$S = \frac{I}{c} \quad (18)$$

é o único módulo da seção transversal. Para uma viga de seção transversal retangular de largura b e altura h , como apresenta a Figura 11.a, o momento de inércia e o módulo da seção são:

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad S = \frac{bh^2}{6} \quad (19)$$



(a)



(b)

Figura 11 – Formas de seção transversal duplamente simétrica. (Gere, 2003)

Para uma viga de seção circular como apresenta a Figura 11.b essas propriedades são:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad S = \frac{\pi d^3}{32} \quad (20)$$

Propriedades das seções transversais das vigas

Momentos de inércia de diversas formas planas estão listados em vários manuais de engenharia e apêndices de livros. Para outras formas não listadas em tabelas, basta fazer uso das fórmulas descritas nos tópicos anteriores.

Limitações

As análises apresentadas nesta seção, são para flexões puras em vigas prismáticas composta de materiais homogêneos e elásticos lineares. Caso a viga esteja submetida a uma flexão não-uniforme a força de cisalhamento gerará um empenamento, ou seja, uma distorção fora do plano. Dessa forma, uma seção que era plana antes da flexão, não é mais plana depois da flexão.

Análises revelam que as tensões de flexão, não são significativamente alteradas pela presença das forças de cisalhamento e seu empenamento associado. Dessa forma, utiliza-se a teoria de flexão pura para calcular tensões normais em vigas submetidas a tensões de flexão não-uniforme.

A fórmula de flexão fornece resultados precisos apenas nas regiões da viga onde as distribuições de tensões não são perturbadas pela forma da viga ou por descontinuidades no carregamento.

A fórmula de flexão não é aplicada próximo dos apoios ou de carregamentos concentrados, pois essas irregularidades produzem tensões localizadas, ou concentrações de tensões que são muito maiores do que a tensão de flexão.

Um pouco de história

A teoria da viga começou com Galileu Galilei (1564-1642) que estudava o comportamento de vários tipos de vigas. Apesar de Galileu ter feito muitas descobertas importantes a respeito de vigas, não obteve a distribuição de tensões que utilizamos hoje em dia. Os progressos posteriores na teoria de vigas foram feitos por Mariote, Jacob Bernoulli, Euler, Parent, Saint-Venant e outros.

Exercícios:

1. Uma viga simples AB com um vão de comprimento $L=22\text{ ft}$ suporta um carregamento uniforme de intensidade $q=1,5\text{ k/ft}$ e uma carga concentrada $P=12\text{ k}$. O carregamento uniforme inclui uma margem para o peso da viga. A carga concentrada age em um ponto $9,0\text{ ft}$ da extremidade esquerda da viga como apresenta a Figura 12. A viga é feita de madeira laminada colada e tem uma seção transversal de largura $b=8,75\text{ in.}$ e altura $h=27\text{ in.}$ Determine as tensões de flexão máximas

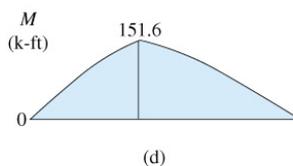
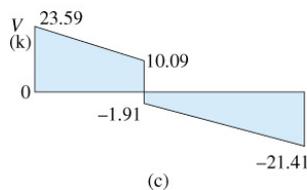
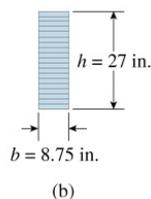
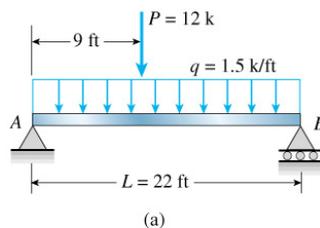


Figura 12 – Tensões em uma viga simples.

Resposta: $\sigma_t = \sigma_2 = 1710\text{ psi}$, $\sigma_c = \sigma_1 = -1710\text{ psi}$

2. A viga ABC ilustrada na Figura 13 tem apoios simples A e B e uma extremidade suspensa de B até C . O comprimento do vão é $3,0\text{ m}$ e o comprimento da extremidade suspensa é de $1,5\text{ m}$. Um carregamento uniforme de intensidade $q=3,2\text{ kN/m}$ atua ao longo de todo o comprimento da viga ($4,5\text{ m}$). A viga tem uma seção transversal na forma de canal com largura $b=300\text{ mm}$ e altura $h=80\text{ mm}$, como mostra a Figura 14.a. A espessura da alma é $t = 12\text{ mm}$, e a espessura média nos flanges é a mesma. Com o propósito de calcular as propriedades da seção transversal, assuma que a seção transversal consiste de três retângulos, conforme ilustrado na Figura 14.b.

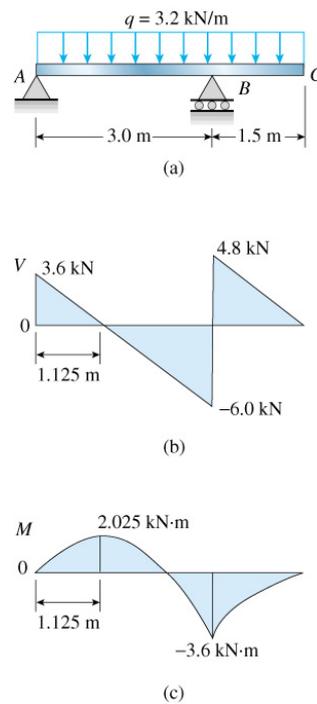


Figura 13 – Tensões em uma viga com segmento suspenso.

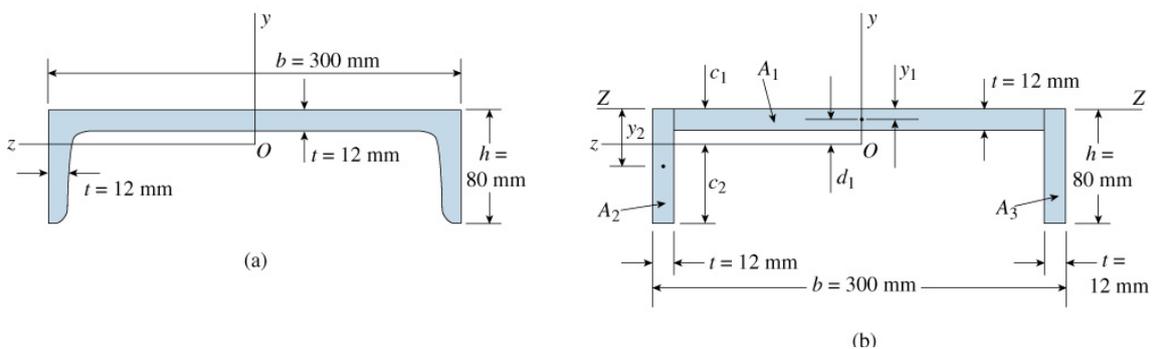


Figura 14 – Seção transversal da viga do exercício 2. (a) Forma real (b) forma idealizada utilizada para análise.

Resposta: $(\sigma_t)_{max} = 50,5\text{ MPa}$, $(\sigma_c)_{max} = -89,8\text{ MPa}$

Projetos de Vigas para Tensões de Flexão

O processo de projetar uma viga requer que muitos fatores sejam considerados, dentre os quais se citam:

- Tipo de estrutura
- Materiais a serem utilizados
- Cargas a que serão submetidos
- Condições do ambiente a serem encontradas
- Custos

Do ponto de vista da resistência

Escolher a forma e o tamanho de viga tal que as tensões na viga não excedam as tensões admissíveis.

Projeto de uma viga

1- Módulo de seção exigido

- Viga duplamente simétrica e as tensões admissíveis iguais para tração e compressão. O módulo de seção é:

$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} \quad (21)$$

- Caso a seção transversal não seja duplamente simétrica, ou caso suas tensões admissíveis sejam diferentes para a tração e para a compressão. Geralmente precisa-se determinar dois módulos de seção – Um baseado na tração e outro baseado na compressão.

Vigas são construídas de várias formas e tamanhos para adequar-se a um incontável número de aplicações.

Vigas de Tamanhos e Formas Padronizadas

As dimensões e as propriedades de diversos tipos de vigas são tabeladas em manuais de engenharia

Eficiência relativa de Várias Formas de Viga

Do ponto de vista da resistência, a viga mais eficiente é aquela em que o material está localizado tão longe quanto possível da linha neutra, maior será o módulo da seção, maior será a resistência ao momento fletor.

Para ilustrar, considere a seção transversal na forma retangular de largura b e altura h . O módulo de seção é:

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0,167Ah \quad (22)$$

A eq. (22) mostra que a seção transversal retangular de uma dada área torna-se mais eficiente quando a altura h é aumentada (e a largura b é diminuída para se manter a área constante). É claro que existe um limite prático se aumentar a altura, por que a viga torna-se instável lateralmente

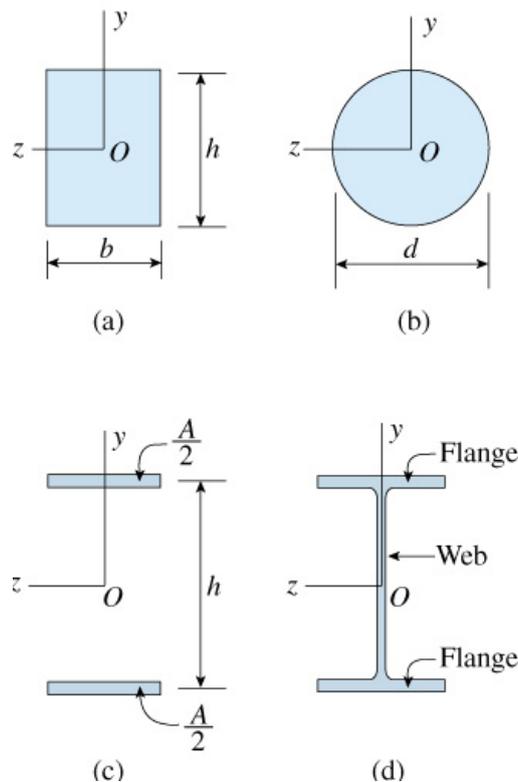


Figura 15 – Forma de seção transversal de vigas. (Gere, 2003)

Exercício:

- 1- Compare do ponto de vista da eficiência uma seção transversal circular sólida de diâmetro d como na Figura 15. b com uma seção transversal quadrada de mesma área. Dica: Ache a relação $\frac{S_{quadrado}}{S_{circulo}}$.

A forma ideal da seção transversal para ma viga com uma dada área de seção transversal A e altura h poderia ser obtida colocando metade da área a uma distância $h/2$ acima da linha neutra e a outra metade a uma distância $h/2$ abaixo da linha neutra, como apresentado na Figura 15.c.

Para essa forma ideal obtemos

$$I = 2 \left(\frac{A}{2} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4} \quad S = \frac{I}{h/2} = 0,5Ah \quad (23)$$

Esses limites teóricos são aproximados na prática por seções de flanges largos e seções em I , que têm a maior concentração de material nos flanges 15.c.

Assim, para vigas de flange largo padrão , o módulo da seção é aproximadamente

$$S \approx 0,35Ah \quad (24)$$

Que é muito maior que o módulo da seção de uma viga com seção transversal retangular com a mesma área e altura.

Por que? (Fica a seu cargo, responder esta pergunta)

Exercícios:

1. Uma viga de madeira simplesmente apoiada tem um vão com comprimento $L=12 \text{ ft}$ e é submetida a um carregamento uniforme $q=420 \text{ lb/ft}$ como apresenta a Figura 16. A tensão de flexão permitida é 1800 psi , a madeira pesa 35 lb/ft^3 , e a viga é apoiada lateralmente evitando flambagem e inclinação. Selecione um tamanho apropriado para a viga a partir das tabelas resumidas.

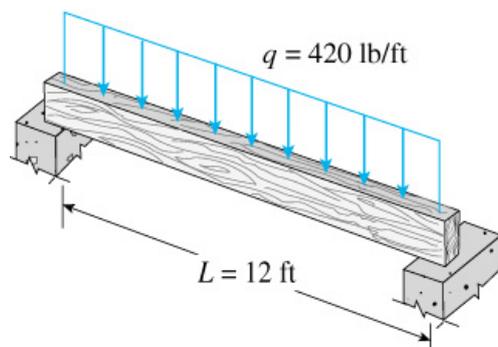


Figura 16 – Projeto de uma viga de madeira simplesmente apoiada.

Resposta: 3 x 12 in. suporta o carregamento dado.

- 2) Uma viga simples AB com um vão de comprimento igual a 21 ft deve suportar um carregamento uniforme $q = 2000\text{ lb/ft}$ distribuído ao longo da viga na forma ilustrada pela Figura 17. Considerando-se tanto o carregamento uniforme como o peso da viga, e também utilizando uma tensão de flexão admissível de 18.000 psi , selecione uma viga de aço estrutural com a forma de flange largo que suporte os carregamentos.

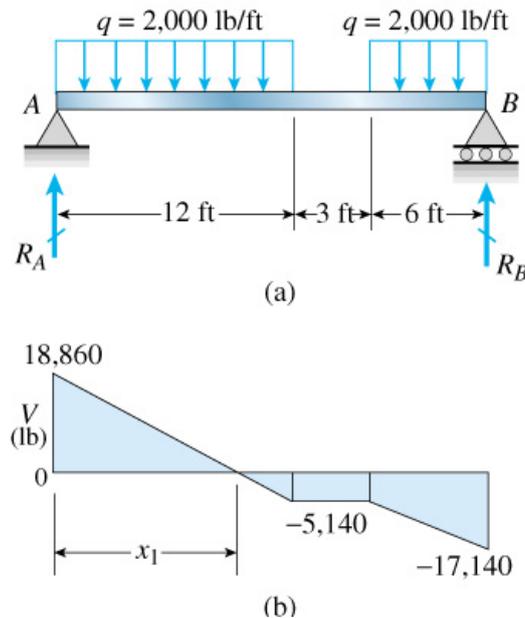


Figura 17 – Projeto de uma viga simples com cargas uniformes parciais. (Gere, 2003)

Resposta: W 12 x 50 com um módulo de seção $S = 64,7\text{ in}^3$ é satisfatória, caso o novo módulo de seção excedesse o módulo da viga W 12 x 50, uma nova viga com maior módulo de seção seria selecionada e o processo repetido.

Exercícios gerais.

3. Uma viga com extremidade engastada e a outra livre AB está submetida a um momento M_0 em sua extremidade livre como mostra a Figura 18. O comprimento da viga é $L=1,2\text{ m}$ e a deformação normal longitudinal na superfície superior é $0,0008$. A distância da superfície do topo da viga para a superfície neutra é 50 mm . Calcule o raio de curvatura ρ , a curvatura κ e a deflexão vertical δ , na extremidade da viga.

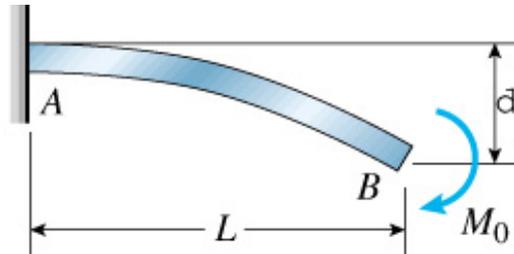


Figura 18 – Viga engastada e livre com um momento aplicado na extremidade.(Gere,2003).

Resposta: $\rho = 62,5\text{ m}$, $\delta = 11,5\text{ mm}$

4. Uma viga de madeira simplesmente apoiada AB com um vão de comprimento $L=3,75\text{ m}$ está submetida a um carregamento uniforme de intensidade $q=6,4\text{ kN/m}$ como apresenta a Figura 19. Calcule a tensão de flexão máxima σ_{max} no cabo devido ao carregamento q caso a viga tenha uma seção transversal retangular com largura $b=150\text{ mm}$ e altura $h=300\text{ mm}$.

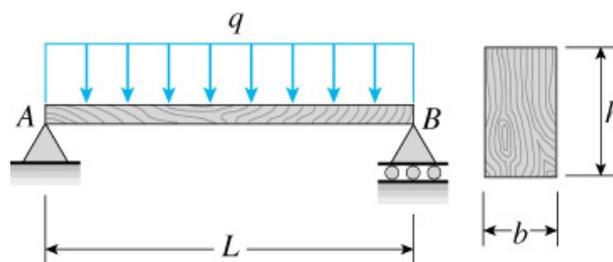


Figura 19 – Viga de madeira simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído. (Gere, 2003).

Resposta: $\sigma_{max} = 5,0\text{ MPa}$

5. Uma viga simples AB é carregada conforme ilustrado pela Figura 20. Calcule o módulo de seção S exigido se $\sigma_{adm} = 16000 \text{ psi}$, $L = 24 \text{ ft}$, $P = 2000 \text{ lb}$ e $q = 300 \text{ lb/ft}$. Selecione então uma viga em I adequada (em forma de S) da Tabela E.2, e recalcule S (módulo de seção) levando em consideração o peso da viga. Se necessário, selecione uma nova viga.

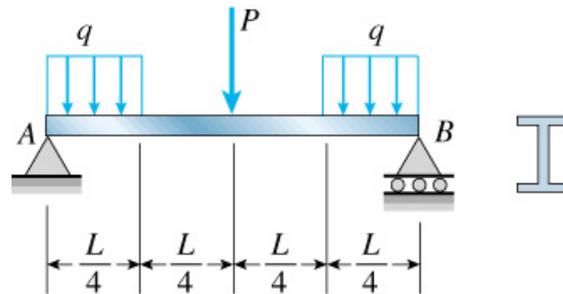


Figura 20 – Viga simplesmente apoiada. (Gere, 2003).

Resposta: $S \ 8 \times 18,4$

Referências Bibliográficas:

1. BEER, F.P. e JOHNSTON, JR., E.R. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Makron Books, 1995.
2. Gere, J. M. Mecânica dos Materiais, Editora Thomson Learning
3. HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos, 2000.

Observações:

- 1- O presente texto é baseado nas referências citadas.
- 2- Todas as figuras se encontram nas referências citadas.