$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Métodos Matemáticos II

1. Simplifique:

   (a) $\text{Re}\left[\dfrac{(1+i)^2}{3+2i}\right]$ (c) $\left|\dfrac{(1+i)^6}{i^3(1+2i)^2}\right|$ (e) $\dfrac{2\,e^{\pi i}}{2-i}$

   (b) $\text{Im}\left(\dfrac{2-i}{4-3i}\right)$ (d) $(1-i)^4$ (f) $\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2-2\pi i}}{e^{1+\pi i}}$

2. Encontre todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que:

   (a) $z^3 - i = 0$ (c) $z^2 = \dfrac{1}{1+i}$ (e) $z^3 = (1-i)^8$

   (b) $z^2 = 3 + i\sqrt{3}$ (d) $z^6 + 64 = 0$ (f) $z^{-4/3} = -1$

3. Seja $\text{Arg}(z)$, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$, o valor principal do argumento de z. Determine $\text{Arg}(z)$:

   (a) $z = -1 - i$ (b) $z = 1 - i\sqrt{3}$ (c) $z = -4i$ (d) $z = -3$

4. Represente, no plano complexo, as regiões:

   (a) $\text{Re}[(1+i)z] \geq 0$ (c) $|\, z - 1 - i \,| \leq |\, 1 + i \,|$ (e) $|\, z - i \,| + |\, z + 2i \,| \leq 4$

   (b) $\text{Im}(z - i) \geq 0$ (d) $0 < \text{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{2}$ (f) $\left|\text{Im}\left(\dfrac{1}{z+1}\right)\right| > 1$

5. Mostre que $1+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\ldots+\cos((n-1)\theta) = \dfrac{\text{sen}(n\theta/2)\cos((n-1)\theta/2))}{\text{sen}(\theta/2)}$, para $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Para cada uma das funções definidas a seguir por $f(z)$, determine $\text{Re}(f(z))$ e $\text{Im}(f(z))$ em termos de $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

   (a) $f(z) = z^3$ (b) $f(z) = z^2 + i$ (c) $f(z) = 2z^2 - 2z$ (d) $f(z) = 1/z$

7. Obtenha a imagem da região S pela aplicação f:

   (a) $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{6} \text{ e } |\, z \,| \leq 1\}; f(z) = z^3$

   (b) $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq |\, z \,| \leq 2 \text{ e } 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi\}; f(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z$

   (c) $S = \{z \in \mathbb{C}; \ln 2 \leq \text{Re}(z) \leq \ln 4 \text{ e } 0 \leq \text{Im}(z) \leq \pi\}; f(z) = e^z$

   (d) $S = \left\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1 \text{ e } \text{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{8}\right\}; f(z) = i - iz^6$

8. Encontre os valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem a equação $e^z = -1$.

9. Obtenha os zeros de $f(z) = \cosh(z)$.

10. Considere $P(z) = (1-i)z^3 + (5-i)z^2 + (6-4i)z$ e $Q(z) = (1-i)z(z+2+3i)(z+1-i)$. Mostre que P e Q possuem as mesmas raízes. Calcule $P(1)$ e $Q(1)$ e conclua que $P = Q$.

11. Obtenha as raízes de $\operatorname{senh}^2(z) + \cosh^2(z) = 1$.

12. Seja f a função definida por $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|\,z\,|}; & z \neq 0 \\ 0; & z = 0 \end{cases}$. f é contínua em $z = 0$?

13. Seja $f(z) = |\,z\,|^2$.
    (a) Mostre que $f\,'(0)$ existe e que $f\,'(0) = 0$.
    (b) Mostre que $z_0 = 0$ é o único número complexo tal que $f\,'(z_0)$ existe.

14. Use o ramo do logaritmo associado a $(-\pi, \pi)$ para calcular:
    (a) $\log(1-i)$
    (b) $\log(i)$
    (c) $\log(\sqrt{3}+i)$
    (d) $\log(-i)$
    (e) $|\,(-i)^{(-i)}\,|$
    (f) $(1+i)^i$

15. Determine os valores de $z_0 \in \mathbb{C}$ para os quais $f'(z_0)$ existe. Determine todos os pontos pertencentes a $\mathbb{C}$ em que f é analítica, para:
    (a) $f(z) = e^z$
    (b) $f(z) = \overline{z}$
    (c) $f(z) = x^2 + iy^2$
    (d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$
    (e) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$

16. Determine o conjunto de todos os pontos em que a função f dada por
$$f(x+iy) = \frac{x^3}{3} - \pi + \left(y - \frac{y^3}{3}\right) i$$
é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos. Em que pontos f é analítica ?

17. Seja f tal que $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh}(z)}{e^z - 1}$. Determine o domínio de f e indique em que pontos f é analítica.

18. Encontre uma função analítica f tal que $\operatorname{Re}(f'(z)) = 1 - 2y$.

19. Determine todos os pontos pertencentes a $\mathbb{C}$ em que a função f definida por $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$ é analítica.

20. Seja f a função dada por $f(x+iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$. Encontre os valores de z tais que $f'(z)$ existe.

21. Seja u a função real de duas variáveis reais definida por $u(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x) + 2xy$.
    (a) Encontre uma função v, real de duas variáveis reais, de modo que a função f dada por $f = u + iv$ seja analítica.
    (b) Expresse f na variável $z = x + iy$.

22. Encontre a função analítica f tal que $f(\pi) = \pi^2$ e $\operatorname{Im}[f(z)] = e^{-y} \operatorname{sen}(x) + 2xy$.

23. Mostre que se a função f dada por $f = u + iv$ e se a sua complexa conjugada $\overline{f} = u - iv$ são ambas analíticas em um domínio então f é constante neste domínio.

24. Cada uma das equações a seguir descreve uma curva no plano complexo. Esboce a curva e dê a sua orientação.

(a) $z = 1 + it, 0 \leq t \leq 1$

(b) $z = (1 + t^2) + it, 0 \leq t \leq 1$

(c) $z = (1 - t) + i(1 - t), 0 \leq t \leq 1$

(d) $z = 1 + 2i + e^{2\pi i t}, 0 \leq t \leq 1$

(e) $z = e^{-it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(f) $z = t + i, 0 \leq t \leq 1$

25. Calcule $\displaystyle\int_{1-2i}^{3+i} (2z + 3)\, dz$, ao longo do caminho dado por $z = (2t + 1) + (4t^2 - t - 2)i, 0 \leq t \leq 1$.

26. Calcule $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} f(z)\, dz$ em cada caso:

(a) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, sendo **C**: o segmento de reta unindo $z = i$ a $z = 1 + 2i$.

(b) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$, sendo **C**: $|z - i| = 2$ percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z - 3}$, sendo **C**: $|z + 3| = 2$ percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

(d) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z - i(\pi/2)}$, sendo **C**: $|z| = 2$ percorrida duas vezes no sentido trigonométrico.

(e) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z - 1}$, sendo **C**: $|z - 1| = 1$ percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

(f) $f(z) = \dfrac{e^z + z}{(z - 1)^4}$, sendo **C**: qualquer curva fechada envolvendo $z = 1$.

(g) $f(z) = \dfrac{5z^2 - 3z + 2}{(z - 1)^3}$, sendo **C**: $|z| = 2$, percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

(h) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z - 1)(z + 3)^2}$, sendo **C**: $|z| = 10$, percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

(i) $f(z) = \dfrac{\cosh(z)}{z^4}$, sendo **C**: a elipse dada por $z = 2\cos(t) + 3i\operatorname{sen}(t)\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(j) $f(z) = \dfrac{\log(z^2 + 2)}{(3z - 2)^2}$, sendo **C**: $|z| = 1$, percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

(k) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^5}$, sendo **C**: $|z| = 10$, percorrida uma vez no sentido trigonométrico.

27. Obtenha a série de Taylor em torno de $z = 0$ de:

(a) $f(z) = \displaystyle\int_0^z \operatorname{sen}(\omega^2)\, d\omega$

(b) $f(z) = \operatorname{senh}(z)$

28. Desenvolva as funções abaixo em série de Laurent em torno de z_0. Obtenha o raio de convergência R de cada série.

(a) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^3}; z_0 = 0$

(b) $f(z) = \dfrac{\cos(2z)}{z^2}; z_0 = 0$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z^4}; z_0 = 0$

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2}; z_0 = 0$

(e) $f(z) = \dfrac{1}{z}; z_0 = 1$

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^4}; z_0 = 1$

Sugestão para (f): use que $\dfrac{1}{z^4} = \dfrac{-1}{6}\dfrac{d^3}{z^3}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

29. Classifique as singularidades isoladas das funções definidas a seguir:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$

(b) $f(z) = \dfrac{senz}{z}$

(c) $f(z) = \dfrac{z(z-\pi)^2}{\text{sen}^2(z)}$

(d) $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z(z-1)}$

(e) $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(f) $f(z) = \dfrac{\text{sen}(z)}{z^3}$

(g) $f(z) = z^4\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(h) $f(z) = e^{1/z^2}$

(i) $f(z) = \dfrac{1-e^{z^2}}{z^4}$

30. Calcule os resíduos das funções abaixo em $z = z_0$.

(a) $f(z) = \dfrac{1-\cos^2(z)}{z^7}; z_0 = 0$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{-z}+z-1}{z^2\,\text{sen}(z)}; z_0 = 0$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3}; z_0 = 1$

(d) $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^6}; z_0 = 0$

(e) $f(z) = e^{1/z^2}; z_0 = 0$

(f) $f(z) = \dfrac{z^3+5}{(z+1)(z^4-1)}; z_0 = 1$

31. Obtenha a série de Laurent de $\dfrac{1}{(z-3)(z-5)}$ em torno de $z_0 = 3$ para:

(a) $0 < |\,z-3\,| < 2$

(b) $|\,z-3\,| > 2$

32. Seja f dada por $f(z) = \dfrac{z}{\text{senh}(z)}$.

(a) Obtenha e classifique as singularidades de f.

(b) Calcule o resíduo de f em cada singularidade obtida em (a).

33. Seja f dada por $f(z) = \dfrac{e^{tz}\cos(z)}{(z-\pi)^3(z-2\pi)}$. Obtenha os três primeiros termos da série de Laurent em torno de $z = \pi$ e calcule $\text{Res}(f, \pi)$.

34. Obtenha os três primeiros termos da série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-\pi)}$ para $0 < |\,z-\pi\,| < \pi$.

35. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{4\cos(\theta)-5}\,d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+cos\theta}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx$

36. Calcule

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-2}{s^2-4s+13}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s+3)(s-1)^2}\right\}$

Respostas

1. (a) $\dfrac{4}{13}$ (b) $\dfrac{2}{25}$ (c) $\dfrac{8}{5}$ (d) -4 (e) $\dfrac{-4}{5} - \dfrac{2i}{5}$ (f) $-\sqrt{2}$ e

2. (a) $z_1 = e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$; $z_2 = e^{5i\pi/6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$; $z_3 = -i$

   (b) $z_1 = \sqrt[4]{3}\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right)$; $z_2 = -z_1$

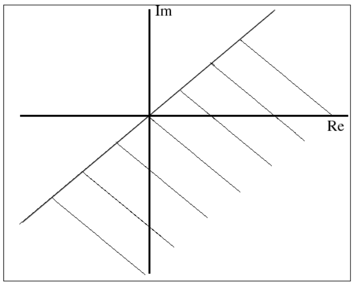
   (c) $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{-i\pi/8} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\left[\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right]$; $z_2 = -z_1$

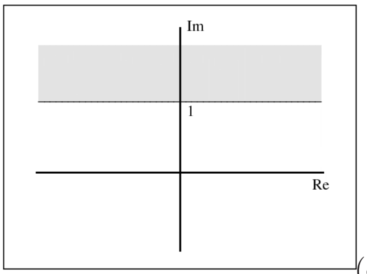
   (d) $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = 2i$; $z_3 = -\sqrt{3} + i$; $z_4 = -\sqrt{3} - i$; $z_5 = -2i$; $z_6 = \sqrt{3} - i$

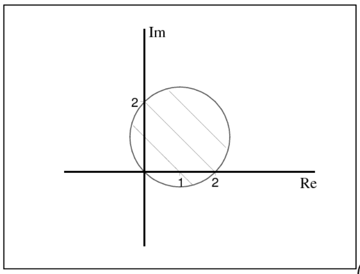
   (e) $z_1 = 2\sqrt[3]{2}$; $z_2 = 2\sqrt[3]{2}\left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $z_3 = 2\sqrt[3]{2}\left(\dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

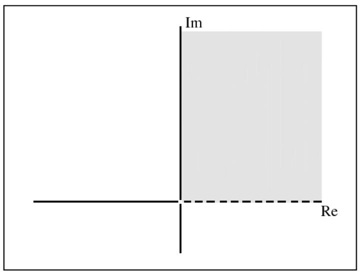
   (f) $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $z_3 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $z_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

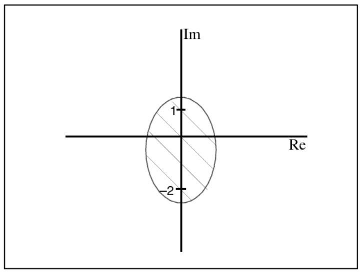
3. (a) $\dfrac{-3\pi}{4}$ (b) $\dfrac{-\pi}{3}$ (c) $-\dfrac{\pi}{2}$ (d) π

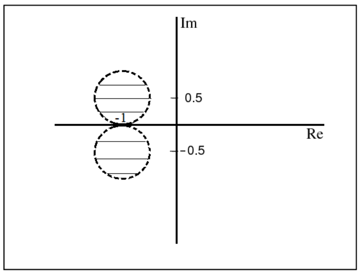
4. (a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


5.

$$1+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\ldots+\cos((n-1)\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}r^k+\sum_{k=0}^{n-1}s^k\right), r=e^{i\theta}, s=e^{-i\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r^n-1}{r-1}+\frac{s^n-1}{s-1}\right), r=e^{i\theta}, s=e^{-i\theta}, r,s\neq 1 \text{ (fórmula da soma de PG)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}+\frac{e^{-in\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(e^{in\theta}-1)e^{-i\theta/2}}{(e^{i\theta}-1)e^{-i\theta/2}}+\frac{(e^{-in\theta}-1)e^{i\theta/2}}{(e^{-i\theta}-1)e^{i\theta/2}}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(e^{in\theta}-1)e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}+\frac{(e^{-in\theta}-1)e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(e^{in\theta}-1)e^{-i\theta/2}}{2i\,\mathrm{sen}(\theta/2)}-\frac{(e^{-in\theta}-1)e^{i\theta/2}}{2i\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{4i\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\left((e^{in\theta}-1)e^{-i\theta/2}-(e^{-in\theta}-1)e^{i\theta/2}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{4i\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\left((e^{in\theta}-1)e^{-in\theta/2}e^{in\theta/2}e^{-i\theta/2}+(e^{-in\theta}-1)e^{in\theta/2}e^{-in\theta/2}e^{i\theta/2}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{4i\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\left((e^{in\theta/2}-e^{-in\theta/2})e^{i(n-1)\theta/2}+(e^{-in\theta/2}-e^{in\theta/2})e^{-i(n-1)\theta/2}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\left(\mathrm{sen}(n\theta/2)e^{i(n-1)\theta/2}+\mathrm{sen}(n\theta/2)e^{-i(n-1)\theta/2}\right), \theta\neq 2k\pi$$
$$=\frac{\mathrm{sen}(n\theta/2)}{2\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\left(e^{i(n-1)\theta/2}+e^{-i(n-1)\theta/2}\right), \theta\neq 2k\pi$$

$$=\frac{\mathrm{sen}(n\theta/2)\cos((n-1)\theta/2)}{\mathrm{sen}(\theta/2)}, \theta\neq 2k\pi$$

6. (a) $\begin{cases}\mathrm{Re}[f(z)]=x^3-3xy^2\\ \mathrm{Im}[f(z)]=3x^2y-y^3\end{cases}$

(b) $\begin{cases}\mathrm{Re}[f(z)]=x^2-y^2\\ \mathrm{Im}[f(z)]=2xy+1\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\mathrm{Re}[f(z)]=2x^2-2y^2-2x\\ \mathrm{Im}[f(z)]=4xy-2y\end{cases}$

(d) $\begin{cases}\mathrm{Re}[f(z)]=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ \mathrm{Im}[f(z)]=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$

7. (a) $S=\{z\in\mathbb{C}; 0\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \frac{\pi}{2} \text{ e } |\,z\,|\leq 1\}$

(b) $S=\{z\in\mathbb{C}; 0\leq |\,z\,|\leq 2 \text{ e } \frac{\pi}{4}\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \frac{5\pi}{4}\}$

(c) $S=\{z\in\mathbb{C}; 2\leq |\,z\,|\leq 4 \text{ e } \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$

(d) $S=\{z\in\mathbb{C}; |\,z-1\,|\leq 1, \mathrm{Re}(z)\geq 0, \mathrm{Im}(z)\geq 0 \text{ e } 1+\mathrm{Re}(z)\geq \mathrm{Im}(z)\}$

8. $z=(2k+1)\pi i\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

9. $\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) i$, onde $k \in \mathbb{Z}$

10. É claro que as raízes de Q são $z_1 = 0, z_2 = -(2+3i)$ e $z_3 = -1+i$. Como $P(z_1) = P(z_2) = P(z_3) = 0$, P e Q são polinômios de grau 3 com as mesmas raízes. Além disso, $P(1) = Q(1)$ e logo $P = Q$.

11. $k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

12. Não: $\exists \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|\, z\,|} \Longrightarrow \exists \lim\limits_{\mathrm{Re}(z)\to 0,\, \mathrm{Im}(z)=0} \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|\, z\,|}$. Mas, $\lim\limits_{\mathrm{Re}(z)\to 0,\, \mathrm{Im}(z)=0} \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|\, z\,|} = \lim\limits_{\mathrm{Re}(z)\to 0} \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|\, \mathrm{Re}(z)\,|} = \nexists$.

13. (a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|\, z\,|^2}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z\bar{z}}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \bar{z} = 0$

    (b) $\exists f\,'(z_0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|\, z\,|^2 - |\, z_0\,|^2}{z - z_0}$. Então,
    $f\,'(z_0) = \lim\limits_{x\to 0, x\in\mathbb{R}} \dfrac{|\, z_0 + x\,|^2 - |\, z_0\,|^2}{z_0 + x - z_0} = \lim\limits_{x\to 0, x\in\mathbb{R}} \dfrac{|\, z_0\,|^2 + 2x\,\mathrm{Re}(z_0) + x^2 - |\, z_0\,|^2}{x} = 2\,\mathrm{Re}(z_0)$ e
    $f\,'(z_0) = \lim\limits_{y\to 0, y\in\mathbb{R}} \dfrac{|\, z_0 + iy\,|^2 - |\, z_0\,|^2}{z_0 + iy - z_0} = \lim\limits_{y\to 0, y\in\mathbb{R}} \dfrac{|\, z_0\,|^2 + 2y\,\mathrm{Im}(z_0) + y^2 - |\, z_0\,|^2}{z_0 + iy - z_0} = -2i\,\mathrm{Im}(z_0)$.
    Assim, $\mathrm{Re}(z_0) = -i\,\mathrm{Im}(z_0)$, logo $z_0 = 0$.

14. (a) $\dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{i\pi}{4}$
    (b) $\dfrac{i\pi}{2}$
    (c) $\ln(2) + \dfrac{i\pi}{6}$
    (d) $-\dfrac{i\pi}{2}$
    (e) $e^{-\pi/2}$
    (f) $e^{i\ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}}$

15. (a) $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Portanto, f é analítica em $\mathbb{C}$.
    (b) f não é derivável em nenhum ponto. Consequentemente, f não é analítica em nenhum ponto.
    (c) Note que f satisfaz Cauchy-Riemann em $S = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ (pontos da reta). As correspondentes derivadas parciais de primeira ordem são contínuas. Assim, f é derivável nos pontos co conjunto S, mas não é analítica.
    (d) $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \neq 0$. Logo, f é analítica em $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid z_0 \neq 0\}$.
    (e) f não é derivável em nenhum ponto. Consequentemente, f não é analítica em nenhum ponto.

16. f é derivável em $\{z \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 = 1\}$. f não é analítica em nenhum ponto.

17. $D_f = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 2k\pi i\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. f é analítica em D_f.

18. $f(z) = (x - 2xy) + i(y - y^2 + x^2)$.

19. $\mathbb{C} - \{-1; \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i; \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\}$

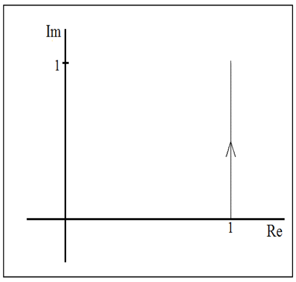
20. f' só existe em $z = -1 - i$.

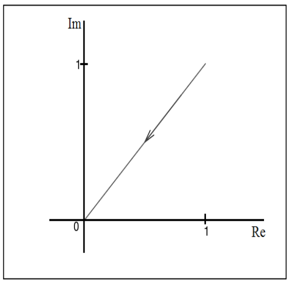
21. (a) $v(x, y) = e^y \cos(x) + y^2 - x^2$
    (b) $f(z) = i[e^{-iz} - z^2]$

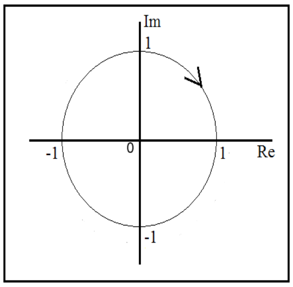
22. $f(x + iy) = (e^{-y}\cos(x) + x^2 - y^2 + 1) + i(e^{-y}\,\mathrm{sen}(x) + 2xy)$

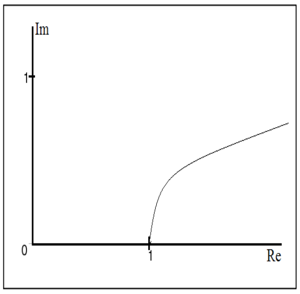
23. Use as condições de Cauchy-Riemann.

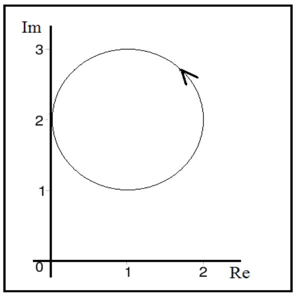
24.

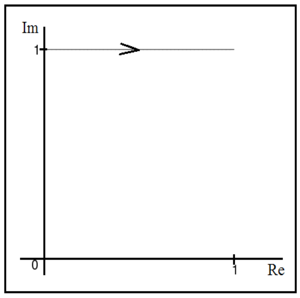
(a) 

(c) 

(e) 

(b) 

(d) 

(f) 

25. $17 + 19i$

26. (a) $\dfrac{1+i}{2}$
(b) -4π
(c) 0
(d) 4π
(e) $4\pi i$
(f) $\dfrac{\pi i e}{3}$
(g) $10\pi i$
(h) $\dfrac{\pi i}{4}\left(\dfrac{e}{16} - \dfrac{5e^{-3}}{16}\right)$
(i) 0
(j) $\dfrac{4\pi i}{33}$
(k) $\dfrac{\pi i}{12}$

27. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

28. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-3}}{n!}, R = \infty$
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n-2}}{2n!}, R = \infty$
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-2}, R = 1$
(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^{n-2}}{3^{n+1}}, R = 3$
(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, R = 1$
(f) $\displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+3)(k+2)(k+1)(z-1)^k, R = 1$

29. (a) $z = \pm i$ polos simples
(b) $z = 0$, singularidade removível
(c) $z = n\pi, n \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = 0; \text{ polo simples} \\ n = 1; \text{ removível} \\ n \neq 0, 1; \text{ polos duplos} \end{cases}$
(d) $z = 0$ é removível, $z = 1$ é polo simples
(e) $z = 0$ é essencial
(f) $z = 0$ é polo duplo
(g) $z = 0$ é essencial
(h) $z = 0$ é essencial
(i) $z = 0$ é polo duplo

30. (a) $2/45$
(b) $1/2$
(c) 0
(d) 0
(e) 0
(f) $3/4$

31.

$\dfrac{-1}{2(z-3)} - \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-3)^n}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z-3)^{n+2}}$

32. (a) $z = n\pi i, n \in \mathbb{Z} : n = 0$ é removível, outras são polos simples.
    (b) $(-1)^n n\pi i$

33. $a_{-3} = \dfrac{e^{t\pi}}{\pi}; a_{-2} = \dfrac{(t\pi+1)e^{t\pi}}{\pi^2}; a_{-1} = \dfrac{(2+2t\pi+\pi^2t^2-\pi^2)e^{t\pi}}{2\pi^3} = \text{Res}(f,\pi)$

34. $a_{-1} = \dfrac{1}{\pi^2}; a_0 = \dfrac{-2}{\pi^3}; a_1 = \dfrac{3}{\pi^4}$

35. (a) $\pi/16$ (b) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

36. (a) $e^{2t}\cos(3t)$ (b) $\dfrac{e^{-3t}+(4t-1)e^{t}}{8}$