$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Métodos Matemáticos II

1. Para cada função periódica dada, escreva a expressão da série de Fourier na forma complexa.

   (a) $f(t) = \begin{cases} A\,\mathrm{sen}(t), & 0 < t < \pi \\ 0, & -\pi \leq t \leq 0 \\ \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$

   (b) $f(t) = A|\,t\,|, |\,t\,| \leq 2$, periódica de período 4 e $A > 1$.

   (c) $f(t) = \begin{cases} A, & |\,t\,| \leq 1 \\ 0, & 1 < |\,t\,| < 2 \\ \text{periódica de período } 4 \end{cases}$

   (d) $f(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 < t < \pi \\ -1/2, & -\pi < t < 0 \\ \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$

   (e) $f(t) = \begin{cases} e^t, & -\pi < t < \pi \\ 0, & -2\pi < t < -\pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \\ \text{periódica de período } 4\pi \end{cases}$

2. Considere G_τ e S_a as funções tais que $G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |\,t\,| < \tau/2 \\ 0, & |\,t\,| \geq \tau/2 \end{cases}$ e $Sa(t) = \begin{cases} \frac{sen(t)}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ e obtenha as transformadas de Fourier de cada função dada.

   (a) $f(t) = AG_2(t)$

   (b) $f(t) = A[G_4(t+8) + G_4(t-8)]$

   (c) $f(t) = \begin{cases} A\cos(t), & |\,t\,| < \pi/2 \\ 0, & |\,t\,| \geq \pi/2 \end{cases}$

3. Mostre que a transformada de Fourier de uma função par f pode ser dada por $F(\omega) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt$ e, se f for ímpar, a transformada de Fourier pode ser dada por $F(\omega) = -2i\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt$. Sugestão: use que $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$.

4. Seja f uma função tal que $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \mid t \mid < 1 \\ 0, & \mid t \mid \geq 1 \end{cases}$.

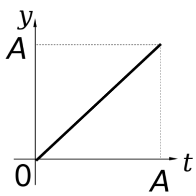
   (a) Obtenha $\mathcal{F}\{f(t)\}$.

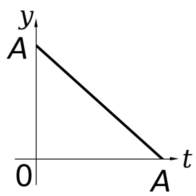
   (b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^3} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

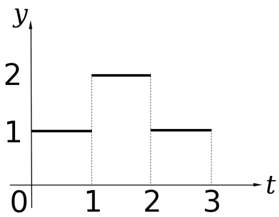
5. Se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f(t)$, calcule:

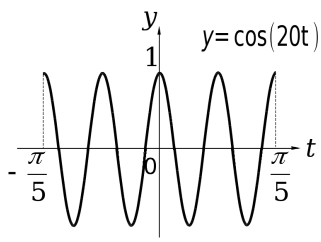
   (a) $\mathcal{F}\{tf(2t)\}$
   (b) $\mathcal{F}\{(t-2)f(t)\}$
   (c) $\mathcal{F}\{(t-2)f(-2t)\}$
   (d) $\mathcal{F}\{tf'(t)\}$
   (e) $\mathcal{F}\{f(1-t)\}$
   (f) $\mathcal{F}\{(1-t)f(1-t)\}$

6. Use que $\mathcal{F}\{G_\tau(t)\} = \tau S_a\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ e as propriedades da transformada de Fourier para obter $\mathcal{F}\{f(t)\}$ para cada função f cujo gráfico é dado.

(a) 

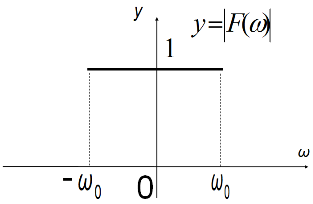
(b) 

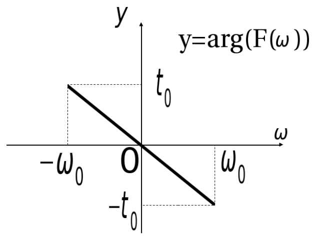
(c) 

(d) 

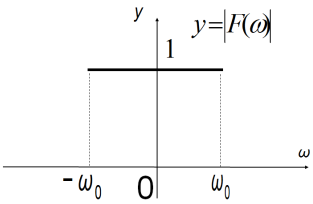
7. Obtenha a função f cuja transformada de Fourier, $F(\omega)$, é dada por:

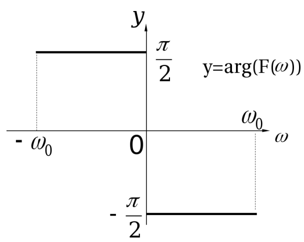
(a)



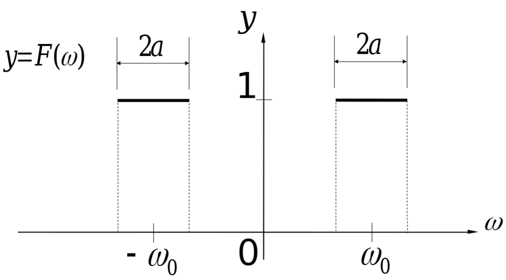


(b)





(c)



8. Seja a um número real positivo e seja g_a uma função tal que $g_a(t) = \begin{cases} 1 - t/a, & 0 < t < a \\ 1 + t/a, & -a < t < 0 \\ 0, & |\,t\,| > a \end{cases}.$

   (a) Mostre que $\mathcal{F}\{g_a(t)\} = a\,\mathrm{Sa}^2(\omega a/2)$.
   (b) Esboce o gráfico de g_a.
   (c) Obtenha $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\mathrm{Sa}^2(t)}{\pi}\right\}$.
   (d) Obtenha $\mathcal{F}\left\{\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Sa}^2(t)\cos(3t)\right\}$.
   (e) Calcule $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Sa}(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$.

9. Use convolução para obter:

   (a) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}\right\}$
   (b) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right\}$

10. Refaça o exercício anterior usando: Para o item a), a propriedade da derivada da transformada de Fourier e, para o item b), a decomposição em frações parciais.

11. Calcule $\mathcal{F}\{f(t)\}$ para $f(t) = \begin{cases} t, & |\,t\,| < 1 \\ 0, & |\,t\,| \geq 1 \end{cases}$ e mostre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(t\cos(t) - \mathrm{sen}(t))^2}{t^4}\,dt = \pi/3$.

12. Sabendo que $\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\omega^2/4a}$, calcule $\displaystyle\int_0^\infty e^{-at^2}\cos(\omega t)\,dt$.

13. Calcule $\mathcal{F}\{f(t)\}$ para $f(t) = \dfrac{a}{\pi}\,\mathrm{Sa}(at)$.

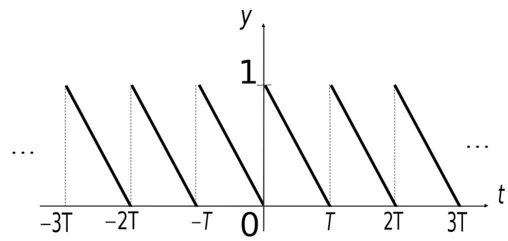
14. Seja f uma função tal que $f(t) = e^{-a|t|}$. Obtenha:

    (a) $\mathcal{F}\{f(t)\}$
    (b) $\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{a^2+t^2}\right\}$
    (c) $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\cos(bt)}{a^2+t^2}\right\}$

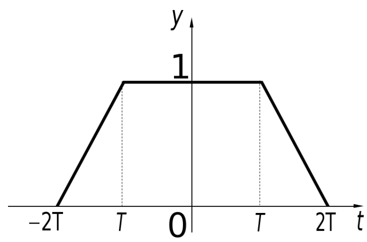
15. Seja f uma função tal que $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Obtenha $\mathcal{F}\{f(t)\}$.

16. Use a identidade de Parseval para calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

17. Considere f a função cujo esboço do gráfico é dado a seguir. Obtenha $f'(t)$, vista como distribuição.



18. Considere f a função cujo esboço do gráfico é dado a seguir. Esboce os gráficos de $f'(t)$ e $f''(t)$, vistas como distribuições.



19. Mostre que $(f * \delta)(t) = f(t)$.

20. Use a relação $f(u)\delta(u-u_0) = f(u_0)\delta(u-u_0)$ e calcule $\mathcal{F}\{sen(t)\}$:

    (a) Usando a transformada de Fourier de $f(t) = cos(t)$ e a propriedade da transformada de Fourier da derivada.
    (b) Usando a transformada de Fourier de $f(t) = cos(t)$ e a propriedade da transformada de Fourier do deslocamento no tempo.

Respostas

1. (a) $Sf(t) = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$, $C_n = \begin{cases} \dfrac{A}{2\pi}\dfrac{1+(-1)^n}{1-n^2} \ , \ n \neq 1 \,\mathrm{e}\, n \neq -1 \\ \dfrac{A}{4i} \ , \ n = 1 \\ -\dfrac{A}{4i} \ , \ n = -1 \end{cases}$ [

   (b) $Sf(t) = f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n$, $C_n = \begin{cases} \dfrac{-4A}{(2k+1)^2\pi^2} e^{(2k+1)\pi i t/2} \ , \ n \neq 0 \\ 1 \ , \ n = 0 \end{cases}$

   (c) $Sf(t) = \dfrac{A}{2} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{n\pi i t/2}$

   Note que $Sf(t) \neq f(t)$ nos pontos de descontinuidade de f.

   (d) $Sf(t) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} e^{i(2k+1)t}$. De novo, $Sf(t) \neq f(t)$ nos pontos de descontinuidade de f.

   (e) $Sf(t) = \dfrac{\mathrm{senh}(\pi)}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2int}}{1-2in}, Sf(t) \neq f(t)$

2. (a) $F(\omega) = 2ASa(\omega)$

   (b) $F(\omega) = 20ASa(10\omega) - 12ASa(6\omega)$

   (c) $F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2A}{1-w^2}\cos\left(\dfrac{\pi\omega}{2}\right), & w \neq \pm 1 \\ \frac{A\pi}{2}, & w = 1 \\ -\frac{A\pi}{2}, & w = -1 \end{cases}$

4. (a) $\dfrac{4\,(\,\mathrm{sen}(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\omega^3}$

   (b) $\dfrac{-3\pi}{16}$

5. (a) $\dfrac{i}{4}F'\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$

   (b) $iF'(\omega) - 2F(\omega)$

   (c) $\dfrac{-i}{4}F'\left(\dfrac{-\omega}{2}\right) - F\left(\dfrac{-\omega}{2}\right)$

   (d) $-F(\omega) - \omega F'(\omega)$

   (e) $e^{-i\omega}F(-\omega)$

   (f) $ie^{-i\omega}F'(-\omega)$

6. (a) $iA\dfrac{d}{d\omega}\left(e^{-i\omega\pi/8}S_a\left(\dfrac{\omega\pi}{8}\right)\right)$

   (b) $-iA\dfrac{d}{d\omega}\left(e^{-i\omega\pi/8}S_a\left(\dfrac{\omega\pi}{8}\right)\right) + \dfrac{A\pi}{4}e^{-i\omega\pi/8}S_a\left(\dfrac{\omega\pi}{8}\right)$

   (c) $\left(e^{-\frac{i}{2}\omega} + 2e^{-\frac{3}{2}i\omega} + e^{-\frac{5}{2}i\omega}\right)S_a(\dfrac{\omega}{2})$.

   (d) $\dfrac{2\pi}{5}\left[S_a\left(\dfrac{(\omega-20)\pi}{5}\right) + S_a\left(\dfrac{(\omega+20)\pi}{5}\right)\right]$.

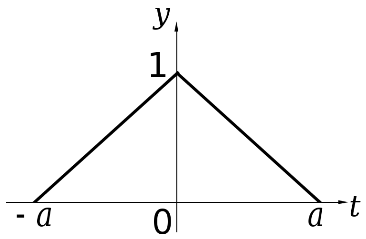
7. (a) $\dfrac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{Sa}\,(\omega_0 t - t_0)$

   (b) $\dfrac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega_0 t}{2}\right)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\omega_0 t}{2}\right)$

   (c) $\dfrac{2a}{\pi}\,\mathrm{Sa}(at)\cos(\omega_0 t)$

8. (a) Defina $g(t) = g(t/a)$. (Lembre que $g(t) = \triangle(t/2)$.) Como $\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\mathcal{F}\{g_a(t)\} = a\,\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega a}{2}\right)$

   (b)



(c) Note que $\mathcal{F}^{-1}\{g_a(t)\} = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{g_a(-t)\} = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{g_a(t)\}$ pois $g_a(t)$ é par. Em particular, tomando $a = 2$, $\mathcal{F}^{-1}\{g_2(\omega)\} = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{g_2(\omega)\} = \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Sa}^2(t)$

Logo, $\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Sa}^2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g_2(t)\}$ e portanto, $\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Sa}^2(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\mathcal{F}^{-1}\{g_2(t)\}\right\} = g_2(\omega)$

(d) $\mathcal{F}\left\{\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Sa}^2(t)\cos(3t)\right\} = [g_2(\omega-3) + g_2(\omega+3)]$

(e) $\pi g_2(t)$

9. (a) $te^{-t}U(t)$, U é a função degrau. (b) $\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)U(t)$.

11. $\mathcal{F}\{f(t)\} = \begin{cases} \dfrac{2i}{\omega^2}(w\cos(\omega) - \mathrm{sen}(\omega)) & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}.$

Logo, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(t\cos(t) - \mathrm{sen}(t))^2}{t^4}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} |\,F(\omega)\,|^2\,d\omega = \frac{2\pi}{4}\int_{\mathbb{R}} |\,f(t)\,|^2\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{\pi}{3}.$

12. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-at^2}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\cos(\omega t)\,dt = \mathrm{Re}\,\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-i\omega t}\,dt\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\omega^2/4a}.$

13. $G_{2a}(\omega)$

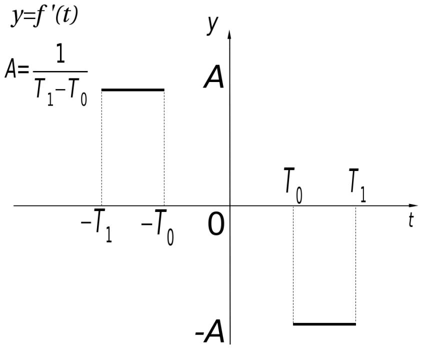
14. (a) $\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ (b) $\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\,\omega\,|}$ (c) $\dfrac{\pi}{2a}\left(e^{-a|\,\omega-b\,|} + e^{-a|\,\omega+b\,|}\right)$

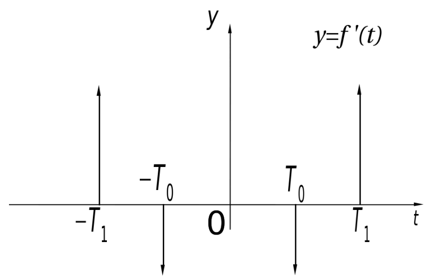
15. $\dfrac{1}{1+i\omega}$

16. $\dfrac{\pi}{4}$

17. $f\,'(t) = \delta(t+3T) + \delta(t+2T) + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T)$.

18.





$f''(t) = A\delta(t - T_1) - A\delta(t + T_0) - A\delta(t - T_0) + A\delta(t - T_1)$.

20. $i\pi[\delta(\omega - 1)] - \delta(\omega + 1)]$ para os itens a) e b).