1^a Lista , EDO

Professor: Sergio Licanic

1_ Escrever os primeiros três termos das seguintes seqüencias:

$a)\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $b)\dfrac{2n-1}{3n+2}$ $c)\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}$

$d)\dfrac{(-1)^{n-1}}{2.4.6.\cdots.2n}$ $e)\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ $f)\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

2_ Provar que

$a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0\ (p>0)$ $b)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1\ (p>0)$

$c)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $d)\lim_{n\to\infty}x^n=0\ (|x|<1)$

3_ Provar $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ e $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$.

4_ Decidir se as seguintes seqüencias convergem ou divergem. Caso convergir dê o valor.

$a_n=\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}$ $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ $a_n=\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}$

$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $a_n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $a_n=na^n$ sendo $|a|<1$

$a_n=\frac{n^2+5n-2}{5n^2}$ $a_n=\frac{\log_a(n)}{n}$ sendo $a>1$ $a_n=\frac{n}{2^n}$

5_ Seja $\{a_n\}_n$ seqüência. Prove:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge se e somente se $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}a_n$ converge, sendo $m\in\mathbb{N}$ (e calcule a que numero converge).

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge então $a_n\to 0$.

6_ Seja $s_n=\sum_{i=1}^{n}a^{i-1}=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1}$.
Prove que $s_n-as_n=1-a^n$. Então, se $a\neq 1$, $s_n=\frac{1-a^n}{1-a}$.

Se $|a|<1$, concluir que $\sum_{i=1}^{\infty}a^{i-1}=\dfrac{1}{1-a}$ (chamada serie geométrica). Calcule $\sum_{i=m}^{\infty}a^{i-1}$, sendo $m\in\mathbb{N}$.

7_ Provar que a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (chamada serie harmonica) diverge. (Sug. observar que $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}>\frac{1}{2}$ e assim sucesivamente).

8_ Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n/(n+1))$.

9_ Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ series de termos positivos. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

a) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.

b) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ e $\sum b_n$ converge se e somente se $\sum a_n$ converge.

c) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

10_ Sejam $\sum a_n$ serie de termos positivos. Mostre que se $\sum a_n$ converge então $\sum a_n^2$ tambem converge, mas a reciproca é falsa.

11_ Use o criterio da integral para determinar a convergencia (ou divergencia) de:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \quad b)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(ln\ n)^p} \quad c)\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ ln\ n\ ln(\ ln\ n)}$$

12_ Para que valores de $a > 0$ a serie $\sum \frac{a^n n!}{n^n}$ converge?.

13_ Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a serie $\sum \frac{a^n}{n}$ converge?. E quando é absolutamente convergente?

14_ Dizer, em cada item abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ então $\sum a_n$ converge.

b) Se $\sum a_n$ diverge e $\sum b_n$ diverge então $\sum(a_n + b_n)$ diverge.

c) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ então $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge.

d) Se $\sum a_n$ converge então $\sum(-1)^n a_n$ converge.

15_ Determine a convergencia ou divergencia das siguintes series:

$$a)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)} \quad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad d)\sum_{n=1}^{\infty} \left((n)^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$$

$$e)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{6^n} \quad f)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \quad g)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3} \quad h)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

16_ Verifique quais das seguintes series convergem absolutamente.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \quad b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \quad d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$