5^a Lista , EDO

Professor: Sergio Licanic

Lembrar: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto.

a) Um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = \sum_{k=0}^{n} a_{1,k}(t)x_k(t) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} & = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(t)x_k(t), \quad t \in I \end{cases} \tag{1}$$

é chamado um sistema de equações diferenciais linear de primer ordem homogêneo.
Um vetor $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ onde $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ são soluções do sistema (1) é dito um vetor solução do sistema (1).

b) Um conjunto fundamental de soluções da equação (1) no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ é qualquer conjunto de n vetores solução do sistema (1) $X_i(t) = (x_{1,i}(t), \ldots, x_{n,i}(t))$, $1 \leq i \leq n$, linearmente independentes.

A matriz $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$ é chamada a matriz fundamental (ou matriz de Wronski) do sistema (1) no intervalo I.

c) Toda vector solução $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ da equação (1) é combinação linear de um conjunto fundamental de vetores solução da mesma equação.

.

1_ Encontrar os autovalores e autovetores da matriz associada ao sistemas de equações diferencias seguintes e dar a solução geral do sistema:

$a)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 9x_1 - 3x_2 \end{cases}$ $b)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -6x_1 + 5x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -5x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $c)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 5x_2 \end{cases}$ $d)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$

$e)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 5x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $f)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $g)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 9x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 \end{cases}$ $h)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 18x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 9x_2 \end{cases}$

2_ Resolver os seguintes sistemas sujeitos à condições iniciais dadas.

$a)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$ $b)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 \end{cases}$ $c)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3 + x_2 \end{cases}$

$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ $\quad x_1(1) = 1, x_2(1) = 1, x_3(1) = 2$ $\quad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, x_3(0) = 2$

3_ No seguinte exercício ache a matriz fundamental $\Phi(t)$ e sua inversa $\Phi^{-1}(t)$ para os seguintes sistemas (X_1, X_2 são um conjunto fundamental de soluções do sistema):

a) X'$=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$X , $X_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} e^{7t} \\ 3e^{7t} \end{pmatrix}$.

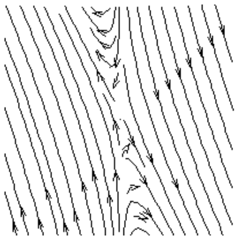
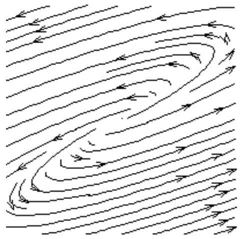
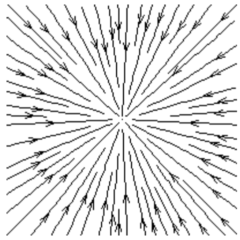
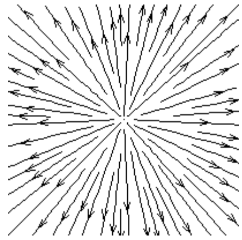
b) X'$=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$X , $X_1 = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$

4_ Ache a matriz $\Psi(t)$ que satisfaz $\Psi(0) = I$ para os sistemas do exercício anterior.

5_ Qual dos seguintes desenhos representa a equação diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = -x \\ y'(t) = -y \end{cases}$$

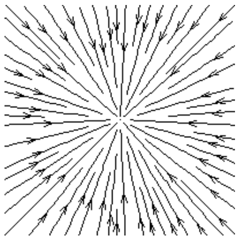
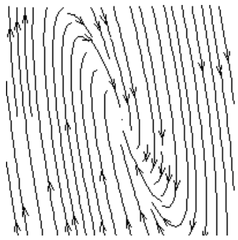
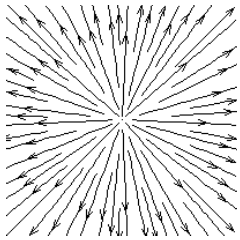
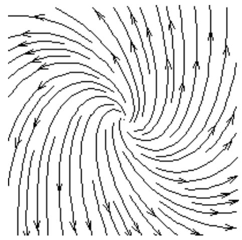
A região do gráfico é $[-2,2] \times [-2,2]$ e as zetas apontam a direção em que t cresce.

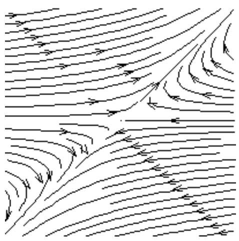
6_ Qual dos seguintes gráficos representa a equação diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = x - y \\ y'(t) = 2x + 2y \end{cases}$$

A região do gráfico é $[-2,2] \times [-2,2]$ e as zetas apontam a direção em que t cresce.

7_ Qual das seguintes equações diferenciais tem o seguinte gráfico?



$$\begin{cases} x'(t) = -3x + 4y \\ y'(t) = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -8x - 4y \end{cases}$$

.

8_ Transforme a equação diferencial dada em um sistema de equações de primer ordem e resolva.

$a)$ $y^{(3)} + y^{(2)} = 0$ $b)$ $y^{(3)} + cosx.y = 0$ $c)$ $y^{(4)} + y^{(2)} = 0$

$d)$ $3y^{(3)} + 5y = 0$ $e)$ $y^{(2)} + y = 0$ $f)$ $tang(x)y^{(3)} + sen(x)y^{(2)} = 0$

9_ Resolva o exercício **1** _ usando transformada de Laplace.