

**uff** Universidade Federal Fluminense  
 EGM - Instituto de Matemática  
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 6 - 2008-1**  
 Derivada por definição  
 Regras básicas de derivação  
 Diferenciabilidade  $\times$  continuidade

Nos exercícios 1. a 3. use a definição de derivada de uma função para calcular  $f'(x_0)$  e determine a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto  $(x_0, f(x_0))$ .

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ,  $x_0 = \sqrt{5}$       2.  $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$ ,  $x_0 = 0$       3.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$

4. Quantas retas tangentes ao gráfico de  $y = x^3 + 3x$  são paralelas à reta  $y = 6x + 1$ ? Determine as equações dessas tangentes.

5. Seja  $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{1^2} & , x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \geq 1 \end{cases}$        $f$  é diferenciável em  $x = 1$ ?       $f$  é contínua em  $x = 1$ ?

6. Seja  $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{1^2} & , x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \geq 1 \end{cases}$        $f$  é diferenciável em  $x = 1$ ?       $f$  é contínua em  $x = 1$ ?

7. Determine  $a$  e  $b$  de modo que  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ ax + b & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  seja diferenciável.

8. Seja  $f$  tal que  $|f(x)| \leq x^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Mostre que  $f$  é diferenciável em  $x = 0$ .

Derive cada função dos exercícios 9. a 17. (se possível, simplifique a função e/ou a derivada da função)

9.  $f(x) = 2(x^2 + 2x + 1) \tan x$       14.  $f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^4 + x^2 + 1}$   
 10.  $f(x) = \cos^2 x$       15.  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2)^2}$   
 11.  $f(x) = \sqrt{x} \sin x + x^{1/3}$       16.  $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$   
 12.  $f(x) = 2x \cos x \tan x$       17.  $f(x) = |2x - 8|$ ,  $x \neq 4$   
 13.  $f(x) = \frac{x \sec x}{x^2 + 2x + 3}$

Nos exercícios 18. a 21. use o gráfico da função para determinar os valores de  $x$  em que a função é diferenciável e indique os valores de  $x$  em que a derivada é (i) nula (ii) positiva (iii) negativa.

18.  $f(x) = |x + 3|$       19.  $f(x) = |x^2 - 9|$       20.  $f(x) = \sqrt{|x|}$       21.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x \leq 0 \\ 4 - x^2 & , x > 0 \end{cases}$

**RESPOSTAS**

1.  $f'(\sqrt{5}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 3}{x - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ;      reta tangente:  $y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{3}(x - \sqrt{5})$   
 2.  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ ;      reta tangente:  $y = -\frac{x}{2} + 2$       3.  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ ;      reta tangente:  $y = -4x + 4$   
 4. Duas retas tangentes:  $y = 6x - 2$  e  $y = 6x + 2$

5.  $f$  é diferenciável em  $x = 1$  pois  $f'(1) = -1/2$ ;  $f$  é contínua em  $x = 1$ , pois tem um teorema que garante que toda função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.

6.  $f$  não é contínua em  $x = 1$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ;  $f$  não é diferenciável em  $x = 1$  pois se fosse,  $f$  seria contínua em  $x = 1$  (tem um teorema que garante que toda função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto) e já provamos que  $f$  não é contínua em  $x = 1$ .

7.  $a = 2$  e  $b = -1$       8. Use o teorema do sanduíche para calcular a derivada pela definição

9.  $f'(x) = 2(x^2 + 2x + 1) \sec^2 x + 2(2x + 2) \tan x = 2(x + 1) [(x + 1) \sec^2 x + 2 \tan x]$

10.  $f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$

11.  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x + \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{\sin x + 2x \cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

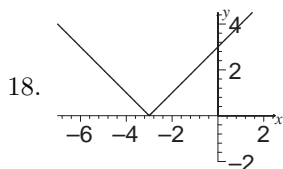
12.  $f(x) = 2x \cos x \tan x = 2x \sin x \Rightarrow f'(x) = 2(\sin x + x \cos x)$

13.  $f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 3)(x \sec x \tan x + \sec x) - [x(\sec x)(2x + 2)]}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{[3 - x^2 + (x^3 + 2x^2 + 3x) \tan x] \sec x}{(x^2 + 2x + 3)^2}$

14.  $f'(x) = \frac{(x^4 + x^2 + 1)[2(x^2 - 2x + 2)(2x - 2)] - (x^2 - 2x + 2)^2(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 - 2x + 2)(2x^4 - 3x^3 - 2)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$

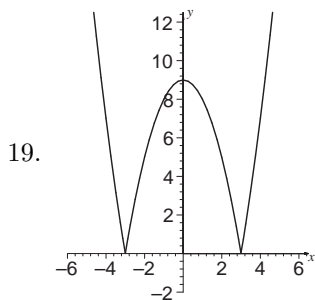
15.  $f'(x) = -2(x^2 + 2)^{-3}(2x) = \frac{-4x}{(x^2 + 2)^3}$       16.  $f'(x) = \begin{cases} -x \cos \frac{1}{x} + 3x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

17.  $x \neq 4, f(x) = |2x - 8| = \begin{cases} -2x + 8 & \text{se } x < 4 \\ 2x + 8 & \text{se } x > 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 4 \\ 2 & \text{se } x > 4 \end{cases} = \frac{2(x - 4)}{|x - 4|}$



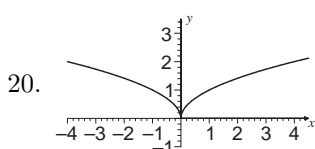
$f(x) = |x + 3|$  não é diferenciável em  $x = -3$  pois o gráfico tem um bico no ponto  $(-3, f(-3)) = (-3, 0)$ . É diferenciável em  $\mathbb{R} - \{-3\}$ .

- (i)  $\nexists x$  tal que  $f'(x) = 0$
- (ii)  $f'(x) > 0 : x \in (-3, \infty)$       (iii)  $f'(x) < 0 : x \in (-\infty, -3)$



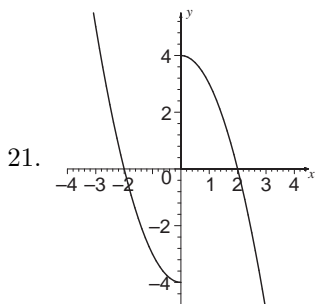
$f(x) = |x^2 - 9|$  não é diferenciável em  $x = \pm 3$  pois o gráfico tem um bico nos pontos  $(-3, f(-3)) = (-3, 0)$  e  $(3, f(3)) = (3, 0)$ . É diferenciável em  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ .

- (i)  $f'(x) = 0 : x = 0$
- (ii)  $f'(x) > 0 : x \in (-3, 0) \cup (3, \infty)$       (iii)  $f'(x) < 0 : x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$



$f(x) = \sqrt{|x|}$  não é diferenciável em  $x = 0$  pois o gráfico tem um bico no ponto  $(0, f(0)) = (0, 0)$ . É diferenciável em  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

- (i)  $\nexists x$  tal que  $f'(x) = 0$
- (ii)  $f'(x) > 0 : x \in (0, \infty)$       (iii)  $f'(x) < 0 : x \in (-\infty, 0)$



$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x \leq 0 \\ 4 - x^2 & , x > 0 \end{cases}$  não é contínua em  $x = 0$  pois o gráfico tem um salto em  $x = 0$ , logo  $f(x)$  não é diferenciável em  $x = 0$ . É diferenciável em  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

- (i)  $\nexists x$  tal que  $f'(x) = 0$
- (ii)  $\nexists x$  tal que  $f'(x) > 0$       (iii)  $f'(x) < 0 : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$