Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7 - 2010-2

Integral imprópria

Nos exercícios 1 a 12 use a definição para verificar se a integral imprópria converge ou diverge. Calcule o valor das integrais impróprias que convergem.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2-3x+2}$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}$
6. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{sen} t\,dt$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$
9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
10. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$
11. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx$
12. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{senh} t\,dt, \quad s>1$

13. Calcule a área da região R limitada pela curva de equação $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ e por sua assíntota, situada à direita do eixo y.

14. Calcule a área da região R situada no primeiro quadrante e abaixo da curva de equação $y = e^{-x}$.

Nos exercícios 15 a 23 discuta a convergência da integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)$ para a função f dada.

15. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$
16. $f(x) = e^{-x}\ln x$
17. $f(x) = \dfrac{1}{x+e^x}$ (compare com $\dfrac{1}{e^x}$)
18. $f(x) = \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}$
19. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3+x^2+1}$
20. $f(x) = \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x}$ (compare com $\dfrac{1}{x}$)
21. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}$
22. $f(x) = e^x\ln x$
23. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ (compare com $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}$)

24. Discuta a convergência de $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^s\ln x}$ (Sugestão: Para $s>1$, compare com $\dfrac{1}{x^s}$; para $s=1$, calcule a integral; para $s<1$, compare com $\dfrac{1}{x\ln x}$)

Nos exercícios 25 a 31 discuta a convergência das integrais impróprias.

25. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}}\,dx$ (compare com $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^8}}$)
26. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s}$ (calcule a integral)
27. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x\ln x}$ (compare com $\dfrac{1}{x+x\ln x}$)
28. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (compare com $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$)
29. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\operatorname{sen} x}$ (compare com $\dfrac{1}{x}$)
30. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$ (calcule a integral)
31. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\,dx$ (discuta $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\right| dx$ e use um teorema)
32. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ (use integração por partes na $\displaystyle\int_1^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ e depois passe o limite quando $t\to\infty$

RESPOSTAS DA LISTA 7

1. 2
2. diverge (∞)
3. $\ln 2$
4. 0
5. diverge (∞)
6. $\dfrac{\ln 3}{2}$
7. $\dfrac{1}{2}$
8. 2
9. 1
10. $\dfrac{2\sqrt{26}}{3}$
11. diverge (∞)
12. $\dfrac{1}{s^2-1}$
13. $2\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx = \frac{64}{3}$
14. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$
15. divergente, pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \neq 0$
16. convergente, pois $x \geq 1 \Longrightarrow 0 \leq e^{-x}\ln x \leq e^{-x}x \Longrightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\ln x\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}x\,dx = \frac{2}{e}$
17. convergente, pois $x \geq 1 > 0 \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{e^x+x} < \dfrac{1}{e^x} \Longrightarrow 0 < \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x+x}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \frac{1}{e}$
18. convergente, pois $\forall x \neq 0,\ 0 \leq \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$
19. divergente, pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x^2+1} = 1 \neq 0$
20. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x} \geq \dfrac{1}{x} \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\operatorname{sen} x}{x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$
21. convergente, pois $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \Longrightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$
22. divergente, pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x \ln x = \infty \neq 0$
23. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} > 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}\,dx = \infty$
24. $s>1$: convergente, pois $x \geq e \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{x^s \ln x} \leq \dfrac{1}{x^s} \Longrightarrow 0 < \displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x^s\ln x}\,dx \leq \int_e^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{e^{1-s}}{s-1}$

    $s=1$: divergente, pois $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \infty$

    $s<1$: divergente, pois $x \geq e > 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^s\ln x} \geq \dfrac{1}{x\ln x} \Longrightarrow \displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x^s\ln x}\,dx \geq \int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \infty$
25. converge, pois $\forall x \neq 0 \Longrightarrow 0 < \dfrac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}} < \dfrac{x^2}{\sqrt{x^8}} = \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow 0 < \displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$
26. $s \leq 1$: divergente, pois $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx = \infty$

    $s>1$: convergente, pois $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx = \frac{1}{s-1}$
27. diverge: $x \geq 1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+x\ln x} \geq \dfrac{1}{x+x\ln x} > 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x\ln x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x+x\ln x}\,dx = \infty$
28. convergente, pois $0 < x \leq 1 \Longrightarrow 0 < \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$
29. divergente, pois $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{x\operatorname{sen} x} > \dfrac{1}{x} > 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\operatorname{sen} x}\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \infty$
30. divergente, pois $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx = \int_2^3 \left(1+\frac{5}{4(x-2)}-\frac{5}{4(x+2)}\right)\,dx = \infty$
31. convergente. Justificativa: a função $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^3}}$ é contínua, portanto integrável em $[1,b], b>0$, o que torna possível aplicar o teorema, $\displaystyle\int_1^\infty |f(x)|\,dx$ é convergente $\Longrightarrow \displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ é convergente.

    $x \geq 1 \Longrightarrow 0 \leq \left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} \Longrightarrow \displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\right| dx$ é convergente

    $\overset{\text{(teorema acima)}}{\Longrightarrow} \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\,dx$ é convergente.