



Universidade Federal Fluminense  
EGM - Instituto de Matemática  
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

### LISTA 8 - 2010-2

Teste de soluções de EDO  
EDO de variáveis separáveis  
Algumas aplicações de EDO

Nos exercícios 1 a 6, verifique se a função  $y = f(x)$ ,  $x \in I$  é solução da equação diferencial ordinária (EDO) dada.

1.  $f(x) = \sqrt{2 + x + x^2}$ ,  $I = (0, \infty)$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x}{2y}$

2.  $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ ,  $I = (0, \infty)$ ,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + 2x}{2y}$

3.  $f(x) = e^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ,  $I = \mathbb{R}$ ,  $y' - 2xy = 1$

4.  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ,  $I = \mathbb{R}$ ,  $y'' = y$

5.  $f(x) = e^{-x} + \frac{x}{3}$ ,  $I = \mathbb{R}$ ,  $y^{(iv)} + 4y''' - 3y' = x$

6.  $f(x) = 4 + 2 \ln x$ ,  $I = (0, \infty)$ ,  $x^2 y'' - xy' + y = 2 \ln x$

7. Determine os possíveis valores da constante  $p$  para que a função  $f(x) = x^p$  seja solução da equação  $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$ , no intervalo  $I = (0, \infty)$ .

Nos exercícios 8 a 12 diga se é possível garantir que o problema de valor inicial admite solução única. Quando admitir solução única, dê o maior intervalo admissível  $I$ ,  $I$  aberto, que contém a abscissa da condição inicial.

8.  $y' + xy = 3$ ,  $y(0) = 0$

9.  $xy' + y = 3$ ,  $y(0) = 1$

10.  $y' = y^{2/3}$ ,  $y(0) = 0$

11.  $y' = \frac{x-y}{x+y}$ ,  $y(1) = -1$

12.  $xy' + \frac{1}{2x+3} y = \ln|x-2|$ ,

com cada uma das condições iniciais:

(a)  $y(-3) = 0$       (c)  $y(1) = 7$

(b)  $y(-1) = 5$       (d)  $y(3) = 0$

Nos exercícios 13 a 16 verifique que a equação é de variáveis separáveis e resolva-a.

13.  $(x \ln y)y' = y$

15.  $xy \frac{dy}{dx} = (1 + x^2) \csc y$

14.  $xydx - 3(y-2)dy = 0$

16.  $x dx + ye^{-x^2} dy = 0$

Nos exercícios 17 a 19 resolva o problema de valor inicial (PVI).

17.  $y' = \frac{e^x}{y}$ ,  $y(0) = 1$

19.  $\frac{dy}{dx} = y - y^2$ , com cada condição inicial:

18.  $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$ ,  $y(1) = 1$

(a)  $y(0) = 2$       (b)  $y(2) = 0$       (c)  $y(0) = 1$

20. A seguinte equação diferencial aparece em trabalhos que estudam a acumulação de nebulosa no sistema solar:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax^{5/6}}{(b-Bt)^{3/2}}, \quad a, b, B \geq 0 \quad \text{constantes reais e } x = x(t)$$

(a) Determine a região do plano  $tx$  onde é possível garantir que esta equação possui soluções únicas.

(b) Determine a solução geral da equação

21. Volterra fez um modelo matemático para descrever a competição entre duas espécies  $x$  e  $y$  que habitam um meio ambiente dado, obtendo equações da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \times (a_1 + a_2 y) \\ \dot{y} &= y \times (b_1 + b_2 x) \end{aligned} \quad \text{onde } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ são constantes,}$$

$y(t) := y(x(t))$  e  $t$  é a variável tempo.

Usando a regra da cadeia  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$  e as duas equações acima, se

obtem  $\frac{dy}{dx} = \frac{y \times (b_1 + b_2 x)}{x \times (a_1 + a_2 y)}$ . Determine a solução geral desta equação.

22. Determine a função  $y = f(x)$  cujo gráfico contém o ponto  $(1, 1)$  tal que para todo  $(x, y)$  do gráfico de  $f$  a área da região  $A_2$  seja o dobro da área da região  $A_1$ , conforme figura ao lado.

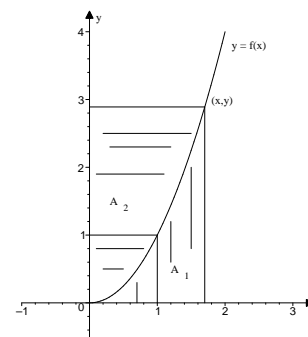


Fig. do ex. 24

23. Uma colônia de bactérias aumenta sua população a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presentes em cada instante de tempo. Se em quatro horas a população triplica, em quanto tempo ela será 27 vezes a quantidade inicial?

RESPOSTAS DA LISTA 8 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Sim, é solução. Primeiro verifica-se que  $f(x) = \sqrt{2+x+x^2}$  é bem definida  $\forall x \in \mathbb{R}$ , logo está definida em  $I = (0, \infty)$  e é diferenciável em  $I$ . Também  $y = \sqrt{2+x+x^2} \Rightarrow y^2 = 2+x+x^2 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 1+2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{2y}$ , a EDO foi satisfeita.

2. Não é solução pois  $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$  só é bem definida quando  $x \in [-2, 1]$ , logo para  $x \in (1, \infty) \subset (0, \infty)$  essa função não está definida. É fato que  $y = \sqrt{2-x-x^2}$  satisfaz a EDO, verifique.

3. Sim, é solução. Primeiro sabemos que a função  $e^{x^2}$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  e a função  $e^{-t^2}$  é contínua para todo  $t \in [0, x], x \in \mathbb{R}$ , logo a integral está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  e assim a função  $f$  também está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,  $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-x^2}$ .

Aplicando as regras de derivação, encontramos

$$y' = 2xe^{x^2} + e^{x^2} e^{-x^2} + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2xe^{x^2} + 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad \text{Substituindo } y' \text{ e } y \text{ na EDO,}$$

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2} + 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1, \text{ a EDO foi satisfeita.}$$

4. Sim, é solução. Primeiro sabemos que as funções  $e^{-x}$  e  $e^x$  são bem definidas e têm derivadas de primeira e segunda ordem para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo a função  $f$  é bem definida e tem derivada de primeira e segunda ordem para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \Rightarrow y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \Rightarrow y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \text{ Vemos que } y'' = y, \text{ a EDO está satisfeita.}$$

5. Não é solução. Primeiro sabemos que as funções  $e^{-x}$  e  $x/3$  são bem definidas e têm derivadas até a quarta ordem para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo a função  $f(x) = e^{-x} + \frac{x}{3}$  é bem definida e tem derivada até a quarta ordem para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$y = e^{-x} + \frac{x}{3} \Rightarrow y' = -e^{-x} + \frac{1}{3} \Rightarrow y'' = e^{-x} \Rightarrow y''' = -e^{-x} \Rightarrow y^{(iv)} = e^{-x}. \text{ Substituindo } y^{(iv)}, y''' \text{ e } y' \text{ na EDO, } y^{(iv)} + 4y''' - 3y' = e^{-x} - 4e^{-x} + 3e^{-x} - 3 \cdot \frac{1}{3} = -1 \neq x1, \text{ a EDO não está satisfeita.}$$

6. Sim, é solução. Sabemos que a função constante 4 e a função  $\ln x$  estão bem definidas e são diferenciáveis para todo  $x \in (0, \infty)$ , logo a função  $f(x) = 4 + 2 \ln x$  é bem definida e diferenciável para todo  $x \in (0, \infty)$ .

$$y = 4 + 2 \ln x \Rightarrow y' = \frac{2}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{2}{x^2}. \text{ Substituindo } y'', y' \text{ e } y \text{ na EDO,}$$

$$x^2 y'' - xy' + y = -x^2 \cdot \frac{2}{x^2} - x \cdot \frac{2}{x} + 4 + 2 \ln x = -2 - 2 + 4 + 2 \ln x = 2 \ln x, \text{ a EDO está satisfeita.}$$

7.  $p = 1$  ou  $p = 4$

8.  $y' = 3 - xy = F(x, y)$ . As funções  $F$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = -x$  são contínuas no conjunto aberto  $U = \mathbb{R}^2$  e  $(0, 0) \in U$ , logo o Teorema da Existência e Unicidade garante que existe uma única função  $y = y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $y(0) = 0$ .
9.  $y' = \frac{3-y}{x} = F(x, y)$ . A função  $F$  é definida no conjunto aberto  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ . Neste caso garantimos que não existe nenhuma função pois se existisse, o ponto  $(0, 1)$  que dá a condição inicial deveria estar no domínio  $U$  de  $F(x, y)$ , mas  $(0, 1) \notin U$ .
10.  $y' = y^{2/3} = F(x, y)$ . A função  $F$  é contínua em  $U = \mathbb{R}^2$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2}{3y^{1/3}}$  é contínua no conjunto aberto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$ . O ponto da condição inicial é  $(0, 0) \in U$ , mas  $(0, 0) \notin A$ , logo não é possível aplicar o Teorema da Existência e Unicidade para garantir que existe uma única função  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ ,  $I$  intervalo aberto contendo  $x = 0$  e tal que  $y(0) = 0$ . Observe que não foi dito que não existe tal função, só foi dito que não conseguimos garantir que existe.
11. Não existe, análogo ao exercício 9.
12.  $y' = -\frac{y}{x(2x+3)} + \frac{\ln|x-2|}{x} = F(x, y)$ . As funções  $F$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x(2x+3)}$  são contínuas no conjunto aberto  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, x \neq -3/2, x \neq 2\}$ . O Teorema da Existência e Unicidade garante a existência de uma única função nos quatro casos, a saber:
- o ponto  $(-3, 0) \in U$ , existe uma única  $y = f(x)$ , tal que  $x \in I = (-\infty, -3/2)$ .
  - o ponto  $(-1, 5) \in U$ , existe uma única  $y = g(x)$ , tal que  $x \in I = (-3/2, 0)$ .
  - o ponto  $(1, 7) \in U$ , existe uma única  $y = h(x)$ , tal que  $x \in I = (0, 2)$ .
  - o ponto  $(3, 0) \in U$ , existe uma única  $y = y(x)$ , tal que  $x \in I = (2, \infty)$ .
13.  $y = e^{\sqrt{\ln(Cx^2)}} \quad \text{ou} \quad y = e^{-\sqrt{\ln(Cx^2)}}$
14.  $x = \sqrt{6y - 12 \ln|y| + C} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{6y - 12 \ln|y| + C}$
15.  $y = y(x)$  definida implicitamente pela equação  $\sin y - y \cos y = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C$
16.  $y = \sqrt{C - e^{x^2}} \quad y = \sqrt{C - e^{x^2}} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{C - e^{x^2}}$
17.  $y = \sqrt{2e^x - 1}, \quad x > -\ln 2$
18.  $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \tan(\operatorname{arccot} x) = \tan\left(\arctan \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
19. (a)  $y(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-x}}, \quad x > -\ln 2$  (b)  $y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$  (obs. essa solução é singular) (c)  $y(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$
20. Precisa-se dividir em 2 casos:  $B = 0$  e  $B > 0$ .
- Quando  $B = 0$ . A região é  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ .  
Quando  $B > 0$ . A região é  $\left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t > \frac{b}{B}, x > 0\right\}$ .
  - Quando  $B = 0$ . Família de soluções:  $x(t) = \frac{(at + C)^6}{6^6 b^6}$ .  
Quando  $B > 0$ . Família de soluções:  $x(t) = \left(\frac{a}{3B(b - Bt)^{1/2}} + C\right)^6$ .
21. Quando  $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ , a região de soluções únicas é  $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } y\}$ . Solução geral:  $y = Cx^{\frac{b_1}{a_1}} e^{\frac{b_2}{a_1}x}, C \in \mathbb{R}$ .  
Quando  $a_1 = 0, a_2 \neq 0$ , a região de soluções únicas é  $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixos } x \text{ e } y\}$ .  
Solução geral:  $y = \frac{b_1}{a_2} \ln|x| + \frac{b_2}{a_2}x + C, \quad C \in \mathbb{R}$ .  
Quando  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ , a região de soluções únicas é  $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } y\} - \{\text{reta } y = \frac{a_1}{a_2}\}$ .  
Solução geral:  $y = y(x)$  definida implicitamente pela equação  $a_1 \ln|y| + a_2 y = b_1 \ln|x| + b_2 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$ .
22.  $y = x^2$
23. 12 horas