Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2010-2
EDO's de primeira ordem:
linear e homogênea
Trajetórias ortogonais
Algumas aplicações de EDO

Nos exercícios 1 a 8 algumas das equações são lineares de primeira ordem. Identifique-as e ache sua solução geral.

1. $(1+x)ydx + xdy = 0$
2. $\left(x^2+y^2\right)dx - 2xydy = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} - y\tan(x) = \operatorname{sen}(x)$
4. $\left(2y - x^4\right)dx + xdy = 0$
5. $y^2dx - (2xy+3)dy = 0$
6. $y' + \dfrac{y}{\operatorname{sen}(x)} - y^2 = 0$
7. $x^3y' + 4x^2y + e^x = 0$
8. $\dfrac{dr}{d\theta} + 2r\cos(2\theta) = \operatorname{sen}(4\theta)$

Nos exercícios 9 e 10 resolva o problema de valor inicial.

9. $y' - xy = \left(1-x^2\right)e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad y(0) = 0$
10. $(y-1)x' - 3x = (y-1)^5, \quad x(-1) = 16$
11. Mostre que a equação $\cos(y)y' + 2x\operatorname{sen}(y) = -2x$ pode ser transformada numa equação linear e resolva o PVI com $y(0) = 0$. (sugestão: $z = \operatorname{sen}(y)$)

Nos exercícios 12 a 17 verifique quais equações são homogêneas e resolva-as.

12. $(5x-y)dx + 3xdy = 0$
13. $\left(x^2+y^2\right)dx - 2xydy = 0$
14. $(xy+1)dx + y^2dy = 0$
15. $xy' + y = 3$
16. $e^{\frac{y}{x}} + y' - \dfrac{y}{x} = 0$
17. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$
18. Considere a equação da forma $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$, onde a, b, c, A, B, C são constantes reais.

    Verifique que:

    (a) quando $aB - Ab \neq 0$, pode-se reduzir essa equação em uma equação homogênea nas variáveis z e w se $z = x - h$ e $w = y - k$, onde h e k são as soluções do sistema linear $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$

    (b) quando $aB - Ab = 0$ e a e b não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis x e z, se fizermos a substituição $z = ax + by$.

    (c) quando $aB - Ab = 0$ e A e B não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis x e z, se fizermos a substituição $z = Ax + By$.

Nos exercícios 19 a 21 use o método desenvolvido acima, para determinar a solução geral das equações.

19. $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$
20. $y' = \dfrac{x+y+4}{x+y-6}$
21. $y' = \dfrac{y}{x-y-1}$
22. Resolva o PVI $\quad y' = \dfrac{2x+y-4}{x-y+1}, \quad y(2) = 2.$
23. Encontre a família de curvas ortogonais à família de parábolas $y = cx^2$.
24. Encontre a família de curvas ortogonais à família de elipses $x^2 + 4y^2 = c$, $x > 0$, $y > 0$.

25. Encontre a família de curvas ortogonais à família de hipérboles $xy = c$, $c \neq 0$.

26. Encontre a família de curvas ortogonais à família de círculos que contém os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

27. Suponha que a taxa de desintegração de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância existente em cada instante de tempo.

    Numa amostra de uma certa substância quando decorridos 1200 anos há uma perda de 36% dessa substância.

    (a) Escreva a equação diferencial que descreve o processo de desintegração.
    (b) Determine a constante de desintegração dessa substância.
    (c) Determine a quantidade da amostra que desaparece em 600 anos.
    (d) Em quantos anos haverá apenas $1/50$ da quantidade original da amostra?
    (e) Lembre que a *meia vida* de uma substância radioativa é o tempo em que uma amostra da substância se desintegra à metade da quantidade original. Determine a meia vida dessa substância.

28. Resolva a equação $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E\,\text{sen}\,(wt)$ onde L, R, E e w são constantes e I é uma função de t. (Esta função dá a corrente em um circuito de resistência R e indutância L impulsionada por um gerador de corrente alternada de freqüência $\dfrac{w}{2\pi}$ e voltagem máxima E).

RESPOSTAS DA LISTA 9 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $y(x) = \dfrac{C}{x}e^{-x}$
2. Não é linear
3. $y(x) = \dfrac{1}{2}\sec x \left(\text{sen}^2(x) + C\right)$
4. $y(x) = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{C}{x^2}$
5. $x(y) = -\dfrac{1}{y} + Cy^2$
6. Não é linear
7. $y(x) = \dfrac{1}{x^4}\left(e^x - xe^x + C\right)$
8. $r(\theta) = -1 + \text{sen}\,(2\theta) + Ce^{-\,\text{sen}\,(2\theta)}$
9. $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(x - \dfrac{1}{3}x^3\right), \quad x \in \mathbb{R}$
10. $x(y) = \left(\dfrac{y^2}{2} - y - \dfrac{7}{2}\right)(y-1)^3, \quad y < 1$
11. $y(x) = \text{arcsen}\left(e^{-x^2} - 1\right), \quad x \in \mathbb{R}$
12. $-\dfrac{5}{2}x + Cx^{\frac{1}{3}}$
13. $y = y(x)$ implícita em $y^2 = x^2 + Cx$
14. Não é homogênea
15. Não é homogênea
16. $y(x) = -x\ln(\ln(C|x|))$
17. $y = y(x)$ implícita em $y^2 = 2x^2\ln(C|x|)$
18. (a) Temos que $w = w(y) = y - k$ e $y = y(x)$, logo $w = w(y) \Rightarrow w = w(y(x))$.
    Mas $z = x - h$ ou $x = x(z) = z + h$. Logo $w = w(y(x(z)))$.
    Aplicando a regra da cadeia duas vezes obtemos: $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{dy}\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dz}$
    Observando que $\dfrac{dw}{dy} = 1$ e $\dfrac{dx}{dz} = 1$, concluímos que $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dy}{dx}$.
    Agora, substituindo x, y e $\dfrac{dy}{dx}$ na equação original, obtemos
    $$\frac{dw}{dz} = F\left(\frac{a(z+h) + b(w+k) + c}{A(z+h) + B(w+k) + C}\right) = F\left(\frac{az + bw + (ah + bw + c)}{Az + Bw + (Ah + Bk + C)}\right)$$
    Supondo que $aB - Ab \neq 0$, o sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ tem solução. Se $x = h$ e $y = k$ é a solução desse sistema, encontramos
    $$\frac{dw}{dz} = F\left(\frac{az + bwk + 0}{Az + Bwk + 0}\right)$$ que é uma equação homogênea nas variáveis z e w.

(b) Supondo que $aB = Ab$, a e b não são simultaneamente nulos, faz-se a substituição $z = ax + by$.

Podemos escrever $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right) =$

$F\left(\dfrac{b(ax+by+c)}{bAx+bBy+bC}\right) = F\left(\dfrac{b(ax+by+c)}{aBx+bBy+bC}\right) = F\left(\dfrac{b(ax+by+c)}{B(ax+by)+bC}\right) = F\left(\dfrac{b(z+c)}{Bz+bC}\right)$

Temos ainda que $\dfrac{dz}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$. Substituindo $\dfrac{dy}{dx}$ encontrado acima nesta última equação, obtemos $\dfrac{dz}{dx} = a + bF\left(\dfrac{b(z+c)}{Bz+bC}\right)$ que é uma equação de variáveis separáveis nas variáveis z e x.

(c) Análogo ao item anterior.

19. $\arctan\dfrac{y+5}{x-1} = \frac{1}{2}\ln C\left((x-1)^2+(y+5)^2\right)$

20. $y - x - 5\ln|x+y-1| = C$

21. y implícita em $y\ln(Cy) = 1 - x$

22. $\sqrt{2}\arctan\left(1+\dfrac{(y-2)^2}{2(x-1)^2}\right) = \ln\left(\dfrac{e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}}{2}\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]\right), \quad x > 1$

23. $x^2 + 2y^2 = C$

24. $y = Cx^4$

25. $x^2 - y^2 = C$

26. $(x-C)^2 + y^2 = C^2 - 1$

27. Suponha que $q(t)$ é a quantidade de substância quando decorridos t anos e q_0 a quantidade da substância no início de um período de t anos, isto é, $q_0 = q(0)$.

(a) $\dfrac{dq(t)}{dt} = kq(t)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

(b) Resolvendo o PVI, encontra-se $Q(t) = q_0e^{kt}$.

Calculando, $q(1200) = q_0e^{k.1200}$. Por outro lado, é dado que $q(1200) = \dfrac{64}{100}q_0$.

Resolvendo a equação $q_0e^{k.1200} = \dfrac{64}{100}q_0$, encontra-se $k = \dfrac{1}{600}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

(c) Substituindo o valor de k, encontra-se $q(t) = q_0e^{\frac{1}{600}\left(\ln\left(\frac{4}{5}\right)\right)t}$.

Calculando, a perda em 600 anos é igual a $q(0) - q(600) = q_0 - q_0e^{\frac{600}{600}\left(\ln\left(\frac{4}{5}\right)\right)} = q_0 - \dfrac{4}{5}q_0 = \dfrac{1}{5}q_0$.

Logo em 600 anos a perda é de 20%.

(d) $q(t) = q_0e^{\frac{1}{600}\left(\ln\left(\frac{4}{5}\right)\right)t} = \dfrac{1}{50}q_0$.

Resolvendo a equação, encontramos $t = 600\left(\dfrac{\ln 2 - \ln 25}{\ln 4 - \ln 5}\right) \cong 6.791,31$ anos.

(e) $q(t) = q_0e^{\frac{1}{600}\left(\ln\left(\frac{4}{5}\right)\right)t} = \dfrac{1}{2}q_0$.

Resolvendo a equação, encontramos $t = 600\left(\dfrac{-\ln 2}{\ln 4 - \ln 5}\right) \cong 1.863,77$ anos.

28. $I = \dfrac{E(R\,\mathrm{sen}\,\omega t - \omega L\cos\omega t)}{R^2+\omega^2L^2} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$