Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 10 - 2008-1
Funções inversas
Teorema da Função Inversa
Funções trigonométricas inversas

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x} - x^3, \quad x > 0.$

   (a) Mostre que f tem inversa em $(0, \infty)$; (b) Calcule $f^{-1}(0)$ e $\left(f^{-1}\right)'(0)$;

   (c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $\left(0, f^{-1}(0)\right)$.

2. Sendo f uma função invertível, derivável, tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 7$, $f'(1) = 3$ e $f'(2) = 4$, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x \leq 0 \\ 1 - x^2, & x > 0 \end{cases}$. Se f^{-1} existir, calcule $\left(f^{-1}\right)'(x)$ e esboce os gráficos de f e f^{-1}.

   Resolva as equações dos exercícios 4. a 11.

4. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ 8. $\tan x = 0$ 10. $\tan x = -1$

5. $\cos x = 0$ 7. $\cos x = -1$ 9. $\tan x = 1$ 11. $\sec x = -2$

Nos exercícios 12. a 19. encontre o valor de x.

12. $x = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}$ 14. $x = \operatorname{arcsen} -\frac{1}{2}$ 16. $x = \arctan 0$ 18. $x = \arctan -1$

13. $x = \arccos 0$ 15. $x = \arccos -1$ 17. $x = \arctan 1$ 19. $x = \operatorname{arcsec} -2$

Deduza as fórmulas dos exercícios 20. a 22.

20. $\operatorname{arcsec} x - \arccos \dfrac{1}{x} = 0$ 21. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ 22. $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$

Nos exercícios 23. e 24. derive a função.

23. $f(x) = \operatorname{arcsen}^3\left((x+1)^2\right) + \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

24. $g(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Nos exercícios 25. e 26. encontre y', se $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação dada.

25. $x \arctan y = x^2 + y^2$ 26. $\operatorname{arcsen}(xy) = x + y$

Nos exercícios 27. a 29. verifique a igualdade.

27. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3}{3} \operatorname{arcsen} x + \dfrac{x^2 + 2}{9}\sqrt{1 - x^2}\right) = x^2 \operatorname{arcsen} x$

28. $\dfrac{d}{dx}\left(\arctan \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

29. $\dfrac{d}{dx}\left(\arctan \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\right) = 2$

30. Seja $f(x) = 2\left(x^2 + 1\right) \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que f é invertível;

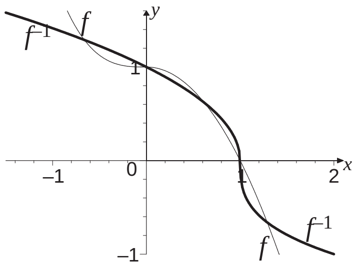
    (b) Verifique que $f(-1) = -\pi$ e calcule $\left(f^{-1}\right)'(-\pi)$;

RESPOSTAS

1. (a) Como $f'(x) = -\dfrac{1+3x^4}{x^2} < 0$ em $(0,\infty)$, f satisfaz as hipóteses do TFI (teorema da função inversa). Logo f é invertível em $(0,\infty)$;
   (b) $f^{-1}(0) = 1$ e $\left(f^{-1}\right)'(0) = -1/4$;
   (c) $x + 4y = 4$

2. $\dfrac{1}{3}$

3. $\left(f^{-1}\right)'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}, & x > 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 1 \end{cases}$



4. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

6. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

7. $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

8. $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

9. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

10. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

11. $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

12. $x = \dfrac{\pi}{3}$

13. $x = \dfrac{\pi}{2}$

14. $x = -\dfrac{\pi}{6}$

15. $x = \pi$

16. $x = 0$

17. $x = \dfrac{\pi}{4}$

18. $x = -\dfrac{\pi}{4}$

19. $x = \dfrac{2\pi}{3}$

20. Sabemos que $y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x,\ \ 0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \le \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos y} = x,\ \ 0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \le \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \cos y$. Substituindo a primeira e a última relação na equação dada, obtemos $y - \arccos(\cos y) = y - y = 0$.

21. Deduzida em aula.

22. Sabemos que $y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, $\cos y = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$, mas no intervalo considerado $\cos y \ge 0$, logo $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

23. $f'(x) = 3\operatorname{arcsen}^2\left((x+1)^2\right)\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2+1}}} \cdot \dfrac{-1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}(2x) =$

$= \dfrac{6(x+1)\operatorname{arcsen}^2\left((x+1)^2\right)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} + \dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}}$

24. $g'(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \times \dfrac{(1+\cos x)(\operatorname{sen} x) - (1-\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2|\operatorname{sen} x|}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(1+y^2\right)(2x - \arctan y)}{x - 2y\left(1+y^2\right)} = \dfrac{\left(1+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}{x^2 - 2xy\left(1+y^2\right)}$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{1-x^2y^2} - y}{x - \sqrt{1-x^2y^2}}$

30. (a) $f'(x) = 2 + 4x\arctan x \neq 0$ pois (i) $f'(0) = 2$; (ii) $x > 0 \Rightarrow \arctan x > 0 \Rightarrow x\arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$; (iii) $x < 0 \Rightarrow \arctan x < 0 \Rightarrow x\arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$.
Logo aplicando o Teorema da Função Inversa, f possui inversa f^{-1}.
(b) $f(-1) = 4\arctan(-1) = -\pi$; $\left(f^{-1}\right)'(-\pi) = \dfrac{1}{2+\pi}$.