uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 10 - 2010-2

Equação diferencial exata

EDO's especiais:

Bernoulli, Ricatti e Clairaut

Nos exercícios 1 a 6 identifique as equações diferenciais exatas e resolva-as.

1. $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0$
2. $y' = \dfrac{y-x+1}{-x+y+3}$
3. $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(xe^{xy}+1\right)dy=0$
4. $\left(3x^2y+e^y-e^x\right)dx+\left(x^3+xe^y\right)dy=0$
5. $(y+\cos x)dx+(x+\operatorname{sen} y)dy=0$
6. $\left(1+\ln x+\dfrac{y}{x}\right)dx=(1-\ln x)dy$

Nos exercícios 7 e 8 resolva o PVI.

7. $\left(e^x+y\right)dx+\left(2+x+ye^y\right)dy=0, \quad y(0)=1$
8. $\left(\dfrac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)\dfrac{dy}{dx}=y(y+\operatorname{sen} x), \quad y(0)=1$

Nos exercícios 9 e 10 verifique que $\lambda=\lambda(x,y)$ é um fator de integração que transforma a EDO dada em uma EDO exata e resolva a EDO.

9. $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0; \quad \lambda(x,y)=\dfrac{1}{xy^3}$
10. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}-2e^{-x}\operatorname{sen} x\right)dx+\left(\dfrac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0; \quad \lambda(x,y)=ye^x$

Nos exercícios 11 a 18 verifique se é possível encontrar um fator de integração do tipo $\lambda=\lambda(x)$ ou $\lambda=\lambda(y)$ que transforma a EDO dada em uma EDO exata. Em caso afirmativo, determine o fator de integração e resolva a EDO.

11. $yx^3dx-\left(x^4+y^4\right)dy=0$
12. $y'=e^{2x}+y-1$
13. $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$
14. $\left(\dfrac{x}{y+x^2}dx\right)+\left(\dfrac{y}{x+y^2}\right)dy=0$
15. $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+\left(x^2+y^2+2y\right)dy=0$
16. $dx+\left(\dfrac{x}{y}-\operatorname{sen} y\right)dy=0$
17. $ydx+\left(2xy-e^{-2y}\right)dy=0$
18. $e^xdx+\left(e^x\cot y+2y\csc y\right)dy=0$

Nos exercícios 19 a 22 identifique as equações do tipo Bernoulli e resolva-as.
[lembrando, tipo Bernoulli: $y'+p(x)y=q(x)y^n$, n constante real]

19. $y'-2xy=4xy^{1/2}$
20. $xy'-\dfrac{y}{2\ln x}=y^2$
21. $y'-xy=x^3+y^3$
22. $xdy-\left(y+xy^3(1+\ln x)\right)dx=0$

Nos exercícios 23 a 26 identifique as equações do tipo Ricatti e se é conhecida uma solução particular y_1, resolva-a. [lembrando, tipo Ricatti: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$]

23. $y' = (x+y)^2, \quad y_1 = -x + \tan x$
24. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy^2 + y^3, \ \ y_1 = x$
25. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1+2e^x)y + y^2, \quad y_1 = -e^x$
26. $y' = 9 + 6y + y^2$

Nos exercícios 27 e 27 verifique que as equações são do tipo Clairaut e encontre uma família de soluções e as soluções singulares na forma paramétrica. [lembrando, tipo Clairaut: y=xy'+F(y')]

27. $y = xy' + \ln(y')$
28. $y = (x+4)y' + (y')^2$

Nos exercícios 29 e 30 resolva o PVI.

29. $y' = \sec^2(x) - (\tan x)y + y^2$, se $y_1 = \tan x$ é uma solução da EDO e $y(0) = 1/2$.
30. $y = xy' + (y')^{-2}$, $y(-2) = 3$. Este PVI terá mais de uma solução. Isso contradiz o Teorema da Existência e Unicidade?

RESPOSTAS DA LISTA 10 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $x^2 + y^2 + (4-2x)y = C$
2. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 6y = C$
3. Não é exata
4. $x^3y + xe^y + e^x = C$
5. $xy + \operatorname{sen} x - \cos y = C$
6. $-y + y\ln x + x\ln x = C$
7. $e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = 3$
8. $-xy^2 + y\cos x + \arctan y = 1 + \pi/4$
9. $x^2 + 2\ln|y| - y^-2 = C$
10. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = C$
11. $\lambda(x) = \dfrac{1}{y^5}; \quad x^4 - 4y^4 \ln|y| = Cy^4$
12. $\lambda(x) = e^{-x}; \quad y = Ce^x + 1 + e^{2x}$
13. $\lambda(x) = e^{3x}; \quad \left(3x^2y + y^3\right)e^{3x} = C$
14. Não é possível
15. Não é possível
16. $\lambda(y) = y; \quad xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = C$
17. $\lambda(y) = \dfrac{e^{2y}}{y}; \quad xe^{2y} - \ln|y| = C$
18. $\lambda(y) = \operatorname{sen} y; \quad e^x \operatorname{sen} y + y^2 = C$
19. $y(x) = \left(-2 + Ce^{x^2/2}\right)^2$
20. $y(x) = \dfrac{3\sqrt{\ln x}}{C - 2\sqrt{(\ln x)^3}}$
21. Não é tipo Bernoulli
22. $y^2 = \dfrac{3}{x(1+2\ln x) + cx^{-2}}$
23. $y = -x + \tan x + \dfrac{\sec^2 x}{C - \tan x}$
24. Não é tipo Ricatti
25. $y = -e^x + \dfrac{1}{Ce^{-x} - 1}$
26. $y = -3 + \dfrac{1}{C - x}$
27. Família de soluções: $y = Cx + \ln C$
    Solução singular: $x = -\dfrac{1}{t}$; $y = -1 + \ln t$
28. Família de soluções: $y = Cx + 4C + C^2$
    Solução singular: $x = -4 - 2t$; $y = -t^2$
29. $y = \tan x + \dfrac{\sec x}{2 - \ln(\sec x + \tan x)}$
30. $y = -x + 1; \quad y = \dfrac{x}{2} + 4 \quad \text{e} \quad 4y^3 = 27x^2$
    Não, só seria contradição se as hipóteses estivessem satisfeitas e a tese não valesse, mas não é este o caso, o que não está satisfeita é a tese. Para testar as hipóteses teríamos que explicitar y' em termos de x e y, que neste caso é difícil. Mas com certeza uma das hipóteses falha, pois se não falhasse, a tese (solução única) seria válida.