

**uff** Universidade Federal Fluminense  
EGM - Instituto de Matemática  
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 11 - 2010-2**

EDO linear de ordem  $n$ :  
PVI, existência e unicidade  
Funções L. I. e Wronskiano  
Conjunto fundamental de soluções  
EDO linear de 2ª ordem: redução de ordem

Nos exercícios 1 a 4 determine o maior intervalo na vizinhança de  $x_0$  onde se tem certeza que o PVI (problema de valor inicial) dado tem solução única.

- $2y^{iv} - 3x^2y'' + 4xy = 3 \operatorname{sen} x$ ;  $y(\pi) = 2$ ;  $y'(\pi) = -1$ ;  $y''(\pi) = 0$ ;  $y'''(\pi) = 1$
- $2y^{iv} - 3x^2y'' + 4xy = 3 \ln x$ ;  $y(2) = -1$ ;  $y'(2) = 0$ ;  $y''(2) = 0$ ;  $y'''(2) = 2$
- $(x^2 - 4)y''' + (x - 1)y' + 4xy = e^{2x}$ ;  $y(-1) = -1$ ;  $y'(-1) = 1$ ;  $y''(-1) = 0$
- $(x^2 - 4)y''' + (x - 1)y' + 4xy = \frac{1}{x}$ ;  $y(-1) = -1$ ;  $y'(-1) = 1$ ;  $y''(-1) = 0$

Nos exercícios 5 e 6 verifique que qualquer membro da família dada é uma solução da EDO linear no intervalo  $I$ . Encontrar, se possível, a única solução que satisfaz as condições iniciais dadas.

- $x^2y'' - 20y = 0$ ; família:  $y = C_1x^5 + \frac{C_2}{x^4}$  em  $I = (0, \infty)$   
condições iniciais:  $y(1) = 4$ ;  $y'(1) = 2$
- $y''' - 2y'' + 2y' = \cos x + 2 \operatorname{sen} x$ ; família:  $y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x$  em  $I = \mathbb{R}$   
condições iniciais:  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 6$ ,  $y''(0) = 6$
- Sabe-se que  $y = C_1 + C_2x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  é uma família a dois parâmetros de soluções de  $x^2y'' - y' = 0$ .
  - Mostre que não existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  para que um membro da família satisfaça as condições  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . Explique porque isso não constitui uma violação do Teorema da Existência e Unicidade para um PVI linear.
  - Encontre dois membros da família que satisfazem  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

Nos exercícios 8 a 13 verifique se o conjunto de funções dadas são linearmente independentes. Se forem linearmente dependentes determine a relação de dependência entre elas.

- $2x - 3$ ,  $x^2 + 1$ ,  $2x^2 - x$
- $2x - 3$ ,  $2x^2 + 1$ ,  $3x^2 + x$
- $2x - 3$ ,  $x^2 + 1$ ,  $2x^2 - x$ ,  $x^2 + x + 1$
- $2x - 3$ ,  $x^3 + 1$ ,  $2x^2 - x$ ,  $x^2 + x + 1$
- $e^x$ ,  $e^{-x}$ ,  $\operatorname{senh} x$
- $x$ ,  $x \ln x$ ,  $x^2 \ln x$ ,  $x > 0$
- Mostre que as funções  $y = x$ ,  $y = x^{-2}$ ,  $y = x^{-2} \ln x$ ,  $x > 0$  formam um conjunto fundamental (base) de soluções da EDO  $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$ . Forme a solução geral.

Nos exercícios 15 a 18 encontre uma segunda solução da EDO linear de 2ª ordem, a partir da solução dada, isto é, use o método da redução de ordem para encontrar uma segunda solução.

- $y'' - y = 0$ ,  $y_1 = \cosh x$
- $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ ,  $y_1 = x^4$
- $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$ ,  $y_1 = e^{-2x}$
- $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ ,  $y_1 = x^3 \ln x$

Nos exercícios 19 e 20 resolva o PVI, se uma solução  $y_1(x)$  da EDO é dada.

- $y'' - 3(\tan x)y' = 0$ ;  $y_1(x) = 1$ ;  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 6$
- $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ ,  $y_1(x) = x^2 + x^3$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 3$

RESPOSTAS DA LISTA 11 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1.  $(-\infty, \infty)$

2.  $(0, \infty)$

3.  $(-2, 2)$

4.  $(-2, 0)$

5.  $x^2 y'' - 20y = x^2 (20C_1 x^3 + 20C_2 x^{-6}) - 20(C_1 x^5 + C_2 x^{-4}) = 20C_1 x^5 + 20C_2 x^{-4} - 20C_1 x^5 - 20C_2 x^{-4} = 0$   
 $x_0 = 1 \in I = (0, \infty)$ ; única solução:  $y = x^5 + 1/x^4$

6. Determinando as derivadas até a ordem 3 e simplificando, encontra-se

$$y' = e^x [(-C_2 + C_3) \sin x + (C_3 + C_2) \cos x] + \cos x \implies 2y' = e^x [(-2C_2 + 2C_3) \sin x + (2C_3 + 2C_2) \cos x] + 2 \cos x$$

$$y'' = e^x [2C_3 \cos x - 2C_2 \sin x] - \sin x \implies -2y'' = e^x [-4C_3 \cos x + 4C_2 \sin x] + 2 \sin x$$

$$y''' = e^x [(2C_3 - 2C_2) \cos x - (2C_2 + 2C_3) \sin x] - \cos x$$

$$\text{Substituindo na EDO dada, } y''' - 2y'' + 2y' = e^x [(2C_3 - 2C_2 - 4C_3 + 2C_3 + 2C_2) \cos x] +$$

$$+ e^x [(-2C_2 - 2C_3 + 4C_2 - 2C_2 + 2C_3) \sin x] - \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x = \cos x + 2 \sin x$$

c.q.d.

$$\text{Única solução: } y = 1 + e^x (2 \cos x + 3 \sin x) + \sin x$$

7. (a)  $y = C_1 + C_2 x^2 \implies y' = 2C_2 x \implies y'(0) = 0 \neq 1$ . Neste caso a hipótese  $a_2(x) = x^2 \neq 0$  do teorema da existência e unicidade não está satisfeita, logo não é possível garantir que existe solução que satisfaz o PVI.

(b)  $y = x^2$  e  $y = -x^2$ . Na verdade qualquer parábola  $y = C_2 x^2$  satisfaz o PVI.

8. São L. I. porque  $W(2x - 3, x^2 + 1, 2x^2 - x) = -14 \neq 0$

9. São L. D. Relação de dependência:  $(2x - 3) + 3(2x^2 + 1) - 2(3x^2 + x) = 0$

10. São L. D. Relação de dependência:  $2(2x - 3) + 13(x^3 + 1) - 3(2x^2 - x) - 7(x^2 + x + 1)$

11. São L. I. porque  $W(2x - 3, x^3 + 1, 2x^2 - x, x^2 + x + 1) = 156 \neq 0$

12. São L. D. Relação de dependência:  $e^x - e^{-x} - 2 \sinh x = 0$

13. São L. I. porque  $W(x, x \ln x, x^2 \ln x) = 2x + x \ln x \neq 0, \forall x \neq e^{-2}$ . Atenção: para ser L. I. basta o wronskiano ser não nulo em um dos pontos do intervalo.

14. Para ver que são soluções é preciso derivar cada função, substituir no lado esquerdo da EDO e verificar que se anula.

São L. I. porque  $W(x, x^{-2}, x^{-2} \ln x) = 9/x^6 \neq 0, \forall x > 0$ .

15.  $y_2 = \sinh x$

16.  $y_2 = x^4 \ln |x|$

17.  $y_2 = x$

18.  $y_2 = x^3$

19. Solução geral:  $y = C_1 + C_2(\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|)$

Solução do PVI:  $y = 2 + 6(\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|)$

20. Solução geral:  $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$  Solução do PVI:  $y = -3x^2 + 3x^3$