

UFF Universidade Federal Fluminense
 EGM - Instituto de Matemática
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 14 - 2008-1
 Crescimento e decrescimento de funções
 Máximos e mínimos relativos
 Máximos e mínimos absolutos

1. Aproxime $f(x) = e^x$ em $a = 0$ com um polinômio de Taylor de grau três e com um polinômio de grau quatro. A seguir, calcule os valores destas aproximações em $x = 0.2$ e $x = 1.0$ e compare com os valores corretos.
2. Use o polinômio de Taylor de ordem dois de $f(x) = x^{3/2}$ no ponto $a = 4$ para obter uma aproximação de $(4.2)^{3/2}$.
3. Calcule os polinômios de Taylor de ordem um, dois e três das funções $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ em $a = 0$ e da função $y = g(x) = \ln(x)$ em $x = 1$. A seguir, calcule os valores destas aproximações em $x = 0.2$ e $x = 1.0$ e compare com os valores corretos.
4. Seja $f(x) = \arctan x$.
 - (a) Determine o polinômio de Taylor de grau 7 de $f(x)$ em torno de $x = 0$;
 - (b) Usando (a), calcule $\arctan(0,3)$ e estime o erro;
 - (c) Determine o polinômio de Taylor de grau 14 de $g(x) = \arctan x^2$ em torno de $x = 0$.
 (Sugestão: use o polinômio de Taylor de $f(x) = \arctan x$.)
5. Prove que se f é uma função par, então o polinômio de Taylor de grau n em torno de $x = 0$ contém apenas potências pares de x . (Sugestão: prove que f par $\implies f'$ ímpar $\implies f''$ par $\implies f'''$ ímpar $\implies \dots \implies f^{(2k)}$ par $\implies f^{(2k+1)}$ ímpar.)

Nos exercícios 6. a 8. dê os intervalos em que a função é crescente e em que é decrescente.

6. $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$
7. $g(t) = \frac{3t^2 + 4t}{1 + t^2}$
8. $F(u) = \frac{u^2 - u + 1}{2(u - 1)}$
9. Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x, \forall x > 0$.
10. Mostre que $\sin x < x, \forall x > 0$.
 (Sugestão: para $x \geq \pi/2$, use propriedades da trigonometria, para $0 < x < \pi/2$, use derivada)
11. Prove a desigualdade $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, x \neq 0$.
 (Sugestão: prove para $x > 0$ e depois use o fato de que as funções de ambos os lados são pares)
12. Prove, para $x > 0$, a desigualdade $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$.
13. Mostre que:
 - (a) $e^x > x, \forall x \in \mathbb{R}$
 - (b) $e^x > \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0$

Nos exercícios 14. a 16. localize os pontos onde ocorrem os extremos absolutos das funções nos intervalos dados.

14. $f(x) = x^3 - 3x^2, x \in [-1, 3]$
15. $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x, x \in [0, 4\pi]$
16. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2, x \in [-2, 2]$
17. Mostre que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ tem máximo absoluto em $x = e$. Conclua que $\pi^e < e^\pi$.

18. Ache a inclinação máxima da curva $y = x^3 - 3x + 3$ no intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.
19. Mostre que $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ tem exatamente uma raiz real e localize-a em um intervalo de amplitude máxima 1.
20. Mostre que $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ tem exatamente duas raízes reais e localize-as em intervalos de amplitude máxima $\pi/2$.
21. Prove que para todo $x > 0$ vale a seguinte desigualdade: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
(Sugestão: estude o crescimento da expressão do lado esquerdo e determine o mínimo absoluto dessa expressão no intervalo dado).
22. A concentração C de certa substância química no fluxo sangüíneo em t horas após ter sido injetado no músculo é dada por $C = \frac{3t}{54 + t^3}$. Em que instante a concentração é máxima? Qual é a concentração máxima?

RESPOSTAS

1. $p_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ e $p_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$. $p_3(0.2) = 1.221333333 \dots$, $p_3(1.0) = 2.6666666 \dots$, $p_4(0.2) = 1.2214$ e $p_4(1.0) = 2.70833333 \dots$
2. $p_2(x) = 8 + 3(x - 4) + 3(x - 4)^2/16$ e $p_2(4.2) = 8.6075$.
3. Para $f(x) = \sqrt{1+x}$ temos $p_1(x) = 1 + x/2$, $p_2(x) = 1 + x/2 - x^2/8$, $p_3(x) = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16$, $p_1(0.2) = 1.1$, $p_2(0.2) = 1.095$, $p_3(0.2) = 1.0955$. Para $g(x) = \ln(x)$ temos $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = (x - 1) - (x - 1)^2/2$, $p_3(x) = (x - 1) - (x - 1)^2/2 + (x - 1)^3/3$, $p_1(1.2) = 0.2$, $p_2(1.2) = 0.18$ e $p_3(1.2) = 0.182666666 \dots$
4. (a) $\arctan x \cong x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ (b) $\arctan(0,3) \cong 0,291454757$ erro $\leq 10^{-4}$
(c) $\arctan x^2 \cong x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^{10} - \frac{1}{7}x^{14}$
5. Primeiro vamos provar duas afirmações gerais sobre funções:
 - (i) F é par $\implies F'$ é ímpar. De fato, se F é par então $F(-x) = F(x)$, derivando os dois lados dessa equação, obtemos $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, ou ainda $F'(-x) = -F'(x)$, que significa que F' é ímpar.
 - (ii) F é ímpar $\implies F'$ é par. De fato, se F é ímpar então $F(-x) = -F(x)$, derivando os dois lados dessa equação, obtemos $F'(-x) \cdot (-1) = -F'(x)$, ou ainda $F'(-x) = F'(x)$, que significa que F' é par.
 Agora, considere o polinômio de Taylor $P_n(f(x)) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.
 De (i) e (ii) temos f par $\implies f'$ ímpar $\implies f''$ par $\implies f'''$ ímpar $\implies \dots \implies f^{(2k)}$ par $\implies f^{(2k+1)}$ ímpar. Assim, quando f é par, todas as derivadas de ordem ímpar é uma função ímpar, isto é, $f^{2k+1}(-x) = -f^{2k+1}(x)$. Quando $x = 0$, obtemos $f^{2k+1}(0) = -f^{2k+1}(0)$. Mas o único número igual ao seu simétrico é o número zero, logo $f^{2k+1}(0) = 0$, isto é, todos os termos de ordem ímpar do polinômio de Taylor são nulos. Concluímos que o polinômio de Taylor só terá termos de ordem par.
6. Crescente em $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{6}, \infty)$, decrescente em $(0, \sqrt[3]{6})$.
7. Crescente em $(-\frac{1}{2}, 2)$, decrescente em $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$.

8. Crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, decrescente em $(0, 1) \cup (1, 2)$.

9. Primeiro vamos mostrar que $f(x) > 0, \forall x > 0$.

(i) $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \forall x \neq 0 \implies f$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

(ii) A função f é contínua em \mathbb{R} pois f é diferenciável em \mathbb{R} .

Por (i) e (ii) concluímos: f é crescente em $(0, \infty)$ e contínua em $[0, \infty) \implies f(x) > f(0), \forall x > 0$.

Finalmente, como por hipótese $f(0) = 0$, concluímos que $f(x) > 0, \forall x > 0$.

Agora vamos mostrar que $f(x) < x, \forall x > 0$. Mas $f(x) < x, \forall x > 0 \iff x - f(x) > 0, \forall x > 0$.

Considerando $F(x) = x - f(x)$ temos que provar que $F(x) > 0, \forall x > 0$. Provando:

(i) $F'(x) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0, x \neq 0 \implies f$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

(ii) A função F é contínua em \mathbb{R} pois é a diferença de funções contínuas em \mathbb{R} .

Por (i) e (ii) concluímos: F é crescente em $(0, \infty)$ e contínua em $[0, \infty) \implies F(x) > F(0), \forall x > 0$.

Como $F(0) = 0 - f(0) = 0$, concluímos que $F(x) > 0, \forall x > 0$.

10. Para $x \geq \frac{\pi}{2}$. Como $1 < \frac{\pi}{2}$ e $\sin x \leq 1$, temos que $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$. Logo $\sin x < x$.

Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Como $\sin x < x \iff x - \sin x > 0$, considere $F(x) = x - \sin x$.

Como F é a soma de funções contínuas em \mathbb{R} , concluímos que F é contínua em \mathbb{R} . (*)

$F'(x) = 1 - \cos x$ e sabemos que $\cos x < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Logo $F'(x) = 1 - \cos x > 0 \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Assim concluímos que F é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. (**)

Pelas conclusões (*) e (**), temos que $F(x) = x - \sin x > F(0) = 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

11. Como $\forall x > 0, \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \iff \forall x > 0, (\cos x) - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$, considere $F(x) = (\cos x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Como $F(0) = 1 - 1 + 0 = 0$, se provarmos que (i) F é contínua em $[0, \infty)$ e (ii) F é crescente em $(0, \infty)$ concluiremos que $F(x) > F(0) = 0, \forall x > 0$. Provando (i) e (ii):

(i) F é contínua em \mathbb{R} pois é a soma, diferença e quociente de funções contínuas em \mathbb{R} .

(ii) Para provar que F é crescente em $(0, \infty)$ basta provar que $F'(x) > 0, \forall x > 0$. Mas $F'(x) = -\sin x + x$.

Logo basta provar que $-\sin x + x > 0, \forall x > 0$, isto é, $\sin x < x, \forall x > 0$, já provado no exercício 5.

Agora, seguindo a sugestão, $x < 0 \implies -x > 0 \implies F(-x) > 0$ (provado acima). Mas $F(-x) = (\cos(-x)) - 1 + \frac{(-x)^2}{2} = F(x)$. Logo $\forall x < 0, F(x) = F(-x) > 0$.

12. Considere $G(x) = (\sin x) - x + \frac{x^3}{6}$. Temos $G'(x) = (\cos x) - 1 + \frac{x^2}{2}$. Esta é a função F do exercício

6. e já provamos que $(\cos x) - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$. Assim, concluímos que G é crescente em $(0, \infty)$.

(*)

Como G é a soma de funções contínuas em \mathbb{R} , concluímos que G é contínua em \mathbb{R} . (**)

Pelas conclusões (*) e (**), temos que $G(x) = (\sin x) - x + \frac{x^3}{6} > G(0) = 0, \forall x > 0$.

13. (a) Vamos analisar cada possibilidade.

(i) Supondo $x < 0$. Sabemos que $e^x > 0$, $\forall x$, em particular quando $x < 0$ temos que $e^x > 0 > x$.

(ii) Supondo $x \geq 0$. Para $x = 0$, $e^0 = 1 > 0$. Considere a função $f(x) = e^x - x$, contínua em $[0, \infty)$. Derivando, $f'(x) = e^x - 1$. Mas $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x - x > 0 \Rightarrow e^x > x$.

(b) Considere a função $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, contínua em $[0, \infty)$. Derivando $f'(x) = e^x - x$. Foi mostrado no item anterior que $e^x > x, \forall x$, logo $f'(x) > 0$. Mas $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^2}{2}$.

14. A função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-1, 3]$, logo f satisfaz as hipóteses do Teorema dos Valores Extremos (é o teorema de Weierstrass). Aplicando esse teorema, comparamos os valores $f(-1)$ e $f(3)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão no interior de $[-1, 3]$. Concluimos que: $\text{mín } f = f(-1) = f(2) = -4$ e $\text{máx } f = f(0) = f(3) = 0$.

15. A função $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$ é contínua em \mathbb{R} pois é a soma de produto e composta de funções contínuas em \mathbb{R} , logo f é contínua no intervalo fechado e limitado $[0, 4\pi]$. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, comparamos os valores $f(0)$ e $f(4\pi)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão em $(0, 4\pi)$. Concluimos: $\text{mín } f = f(5\pi/6) = (17\pi/6) = -3\sqrt{3}/2$ e $\text{máx } f = f(\pi/6) = (13\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$.

16. A função polinomial $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2, 2]$. Assim, pelo Teorema dos Valores Extremos, comparamos os valores $f(-2)$ e $f(2)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão em $(-2, 2)$. Concluimos: $\text{mín } f = f(-2) = -\frac{26}{15}$ e $\text{máx } f = f(2) = \frac{86}{15}$.

17. Domínio de $f = (0, \infty)$. Derivando, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Analisando o sinal de $f'(x)$, temos $f'(x) > 0$ quando $0 < x < e$; $f'(x) < 0$ quando $x > e \Rightarrow f$ é crescente quando $0 < x < e$; f é decrescente quando $x > e$. Logo f tem um máximo relativo no único ponto crítico $x = e$. Como f é contínua em $x = e$, concluimos que f tem um máximo absoluto em $x = e$.

Provando a desigualdade: f tem máximo absoluto em $x = e \Rightarrow f(\pi) < f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow f(\pi) = \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$. Como $e > 0$ e $\pi > 0$, temos: $e \ln \pi < \pi$. Aplicando a propriedade de logaritmo de potência, temos $e \ln \pi = \ln \pi^e$, logo $\ln \pi^e < \pi$. Sabemos que a função exponencial é estritamente crescente, logo $e^{\ln \pi^e} < e^\pi$. Sabemos que $e^{\ln x} = x, \forall x > 0$, em particular $e^{\ln \pi^e} = \pi^e$. Logo, $\pi^e < e^\pi$.

18. Máx $f' = f'(5/2) = 63/4$.

19. Estudando o crescimento de f e aplicando o Teorema do Valor Intermediário, conclui-se que a única raiz está em $(-2, -1)$.

20. Idem anterior, uma raiz está em $(-\pi/2, 0)$ e a outra em $(0, \pi/2)$.

21. No intervalo $(0, \infty)$, o mínimo absoluto de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ é igual a $f(1) = 2$. Logo $f(x) \geq f(1) = 2$.

22. No instante $t = 3$. A concentração máxima é $\frac{1}{9} = 0,1111... = 0, \bar{1}$.