uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

*Cálculo III*– A –
**LISTA 1 - 2007-1**
Integral dupla em retangulares.
Integral dupla em polares.
Aplicações geométricas.

Calcule as integrais dos exercícios 1. a 4.

1. $\displaystyle\int\int_R xe^{xy}dxdy,$ onde $R=[0,2]\times[0,1]$

2. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{3\cos\theta} r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)drd\theta$

3. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{x^2} e^{y/x}dy\,dx$

4. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x^2+1}\,dy\,dx,$
onde $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x\le y\le 1\}$

Nos exercícios 5. e 6. para a região $R$ dada decomponha $\displaystyle\iint_R f(x,y)$ nas duas possíveis ordens de integração.

5. $R$ é a região limitada pelas curvas $x^2-y^2=1$ e $3x=2y^2$.

6. $R$ é a região que não contêm a origem e é limitada pelas curvas $y^2-x^2=1$ e $x^2+y^2=9$.

Nos exercícios 7. e 8. inverta a ordem de integração.

7. $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\;dx\,dy$

8. $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\;dx\,dy$

Nos exercícios 9. a 11. calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies de equações dadas.

9. $3x+2y+z=6,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

10. $x^2+y^2=b^2,\ y+z=a$ e $z=0,$ onde $a\ge b>0$.

11. $x=0,\quad y=0,\ z=0,\quad x+y=1$ e $z=1-y^2$.

12. Use integral dupla para calcular a área das regiões delimitadas pela curvas $x=4-y^2$, $x+y+2=0$..

Calcule as integrais dos exercícios 13. e 14. pela inversão da ordem de integração.

13. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{-3x^2}\;dx\,dy$

14. $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \mathrm{sen}\,y^3\;dy\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\;dy\,dx$

Use coordenadas polares para calcular as integrais dos exercícios 16. a 20.

16. $\displaystyle\iint_R e^{x^2+y^2}\;dx\,dy,\quad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x^2+y^2\le 16 \text{ e } -x\le y\le x\}$

17. $\displaystyle\iint_R \frac{dx\,dy}{2-x^2-y^2}\;,\quad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 1\}$

18. $\displaystyle\int_0^a\int_y^a \sqrt{a^2-x^2}\;dx\,dy$

19. $\displaystyle\int_{-4}^4\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} e^{-x^2-y^2}\;dy\,dx$

20. $\displaystyle\int_1^3\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\;dx\,dy$

21. Calcule $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, sendo o semicírculo $D = (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2+y^2 \le 1, y \ge 0$

22. Calcule o volume do sólido que não contém a origem e é limitado pelo gráfico de $z = 4 - r^2$, pelo cilindro $r = 1$ e pelo plano $z = 0$.

23. Calcule o volume do sólido interior à esfera $z^2 + r^2 = 16$ e ao cilindro $r = 4\cos\theta$.

24. Calcule a área da região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ \ x^2+y^2 \ge 1\}$

25. Calcule o volume da região do espaço no primeiro octante, compreededida entre os cilindros $x^2+y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, $a$ constante positiva.

26. Calcule o volume do elipsóide $x^2 + y^2 + 4z^2 \le 4$.

27. Calcule a área da região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 1\}$.

RESPOSTAS DA LISTA 1

1. $e^2 - 3$

2. $\frac{12}{5}$

3. $e^2 - \frac{3}{2}$

4. $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2$

5. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{3x/2}}^{\sqrt{3x/2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{3x/2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{3x/2}}^{-\sqrt{x^2-1}} f(x,y)\,dy\,dx =$
$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{2y^2/3}^{\sqrt{y^2+1}} f(x,y)\,dx\,dy$

6. $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{x^2+1}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-2}^{2} \int_{\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-3}^{-\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy +$
$\int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{-\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{5}}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

7. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3 \int_{x-2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$

8. $\int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

9. $6$

10. $\pi a b^2 - 3$

11. $\frac{5}{12}$

12. $\frac{56}{3}$

13. $\frac{e^3-1}{6e^3}$

14. $\frac{1-\cos(8)}{3}$

15. $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

16. $\frac{\pi}{4}(e^16 - 1)$

17. $\pi \ln 2$

18. $\frac{a^3}{3}$

19. $\pi\left(1 - e^{-16}\right)$

20. $2\ln(\sqrt{2}+1)$

21. $\frac{16}{9}$

22. $\frac{9\pi}{2}$

23. $\frac{128}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$

24. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

25. $\frac{2a^3}{3}$

26. $\dfrac{16\pi}{3}$

27. $\dfrac{5\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}$