Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 10 - 2007-1
Teorema de Stokes

Nos exercícios 1. a 3. use o **Teorema de Stokes** para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando, em cada caso, a orientação da curva C.

1. $\displaystyle\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -2\pi\sqrt{2}$, onde C é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

2. $\displaystyle\oint_C (8x - 2y)\,dx + y\,dy + 3z\,dz = 4\sqrt{3}$, onde C é a fronteira do triângulo equilátero situado no plano de vértices $P = (2, 2, 0)$, $Q = (2, 6, 0)$ e $R = (2 + \sqrt{3}, 4, 3)$.

3. $\displaystyle\oint_C 2xy\,dx + \left[(1 - y)z + x^2 + x\right] dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right) dz = \pi$, onde C é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

Use o **Teorema de Stokes** na resolução dos exercícios 4. a 10.

4. Seja C uma curva simples plana fechada, no espaço, que limita uma região de área A. Seja $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ um vetor unitário normal ao plano de C. Calcule $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_{C^+} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$.

5. Seja C a curva sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que começa no ponto (1,0,0) e termina no ponto (1,0,1), como mostra a Fig. 1. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z)$ é dado por $\vec{F}(x, y, z) = y(x - 2)\vec{\imath} + x^2y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

6. Considere a lata cilíndrica L de raio 1 com um bordo diferenciável e uma orientação como mostra a Fig. 2. Seja $\vec{F}(x, y, z) = -2y^3\vec{\imath} + 2x^3\vec{\jmath} + 3z^2\vec{k}$. Qual é o valor de $\displaystyle\int_{\partial L} \vec{F} \cdot d\vec{r}$?

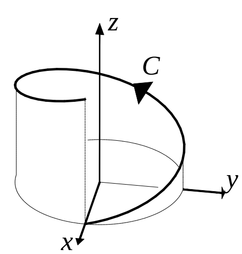

Fig. 1

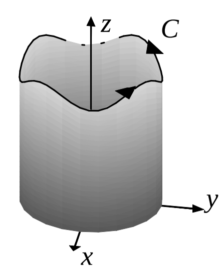

Fig. 2

7. Seja $\vec{F}$ o campo vetorial no $I\!R^3$ dado por $\vec{F}(x, y, z) = (y - z)\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} - xz\vec{k}$. Calcule $\displaystyle\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sabendo-se que S consiste das cinco faces do cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ que não estão no plano xy, com $\vec{n}$ apontando para fora de S.

8. Calcule $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y, 2x, xyz)$ e S é a superfície lateral da pirâmide de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(1, 3, 0)$ e $(1, 3, 3)$ com vetor $\vec{n}$ exterior a S.

9. Seja $\vec{F} = \left(e^x \operatorname{sen} y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}, e^x \cos y + \dfrac{y}{x^2 + y^2}, z^2\right)$. Mostre que é nula a integral do campo $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva fechada C de classe $\mathcal{C}^1$ por partes que não corte o envolve z.

10. Seja C a circunferência de raio a, no plano $2x + 2y + z = 4$, centrada no ponto $(1, 2, -2)$. Se $\vec{F}(x, y, z) = (y - x, z - x, x - y)$, determine o valor de a para que $\displaystyle\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{8\pi}{3}$.

RESPOSTAS DA LISTA 10

4. A 5. $2\pi + \dfrac{1}{2}$ 6. 3π 7. -4 8. $\dfrac{3}{2}$ 10. $a = 1$