uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 11 - 2007-1
Teorema de Gauss

Use o **Teorema de Gauss** na resolução dos exercícios 1. a 10.

1. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3}{3} + y, \dfrac{y^3}{3}, \dfrac{z^3}{3} + 2\right)$ através da superfície S do sólido W definido por $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1,\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$, com campo de vetores normais a S apontando para fora de W.

2. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(2x + xy, -zy, \dfrac{z^2}{2} - yz\right)$, S é a superfície cilíndrica fechada limitada pelos planos $z = 0$ e $z = 1$, cuja base no plano xy é limitada pelas curvas de equações $x^2 + (y-1)^2 = 4, y \geq 1$; $x^2 + (y+1)^2 = 4, y \leq -1$; $(x-2)^2 + y^2 = 1, x \geq 2$; $(x+2)^2 + y^2 = 1, x \leq -2$, e $\vec{n}$ é a normal exterior a S.

3. Encontre o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(e^y + \cos yz, -2zy + \operatorname{sen} xz, z^2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ através da superfície S, orientada positivamente, união das superfícies S_1 e S_2, onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$, e S_2 é definida por $z = 1 + x^2 + \dfrac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.

4. Seja S a parte da superfície $x^2 + y^2 = 4$ delimitada pelos planos $z = 0$ e $z + y = 2$, e seja $\vec{F}(x,y,z) = (x + y^2)\vec{\imath} + (y - xy)\vec{\jmath} + (z + x^5y^{10})\vec{k}$. Fixe uma orientação sobre S e calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

5. Seja a superfície cônica S de vértice $(0,0,h)$ e de base situada no plano xy com raio 1 e $\vec{n}$ com a componente $\vec{k}$ não negativa. Seja $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{\imath} - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{\jmath} + 2(z+1)\vec{k}$, sendo f de classe C^2. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

6. Considere a superfície fechada S obtida girand-se o segmento de reta que liga os pontos $(1,0,1)$ e $(0,0,3)$ em torno do eixo z. Calcule $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$, onde $\vec{n}$ é o campo de vetores normais a S e $\vec{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por $\vec{F}(x,y,z) = \left(-\dfrac{y^3}{3} + ze^x, \dfrac{x^3}{3} - \cos yz, xy\right)$.

7. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}(x,y,z)$ através da superfície do sólido W limitado pelas esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $x^2+y^2+z^2 = b^2$, $a < b$, orientadas com sentidos opostos ($\vec{n}$ para fora do sólido W).

8. Sejam $f,\ g : I\!\!R^3 \to I\!\!R$ de classe C^2. Seja B um compacto e seja S a fronteira de B, com normal unitária exterior $\vec{n}$. Lembrando que $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de g na direção de $\vec{n}$, prove:

   (a) $\displaystyle\iint_S \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_B \nabla^2 g\, dxdydz$

   (b) $\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_B (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dxdydz$

   (c) $\displaystyle\iint_S f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_B (f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2)\, dxdydz$

9. Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ um campo vetorial em $I\!R^3$ e W a pirâmide de vértices O, A, B, C, onde $O = (0,0,0)$, $A = (0,1,0)$, $B = (0,0,1)$ e $C = (c,1,0)$ $(c > 0)$. Calcule o valor de c sabendo que
$$\iint_{S_W} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_{ABC}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 1$$
onde S_W é a superfície da pirâmide W, S_{ABC} é a face de vértices A, B, C, e $\vec{n}$ é o campo de vetores normais apontando para fora da pirâmide.

10. Seja W uma região fechada e limitada de $I\!R^3$, cuja fronteira, ∂W, é a união de duas superfícies S_1 e S_2, orientadas com vetor normal exterior a W. Considere o vetor normal a S_1 com terceira componente positiva. Qual o valor de $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^2+z^2}, y + 2\sqrt{5}, -2y)$ sabendo que S_1 é uma porção do plano $2y + z = 1$ com 5 unidades de área e que W possui 30 unidades de volume.

Use o **Teorema de Gauss no plano** na resolução dos exercícios 11. e 12.

11. Sejam $\vec{F}(x,y) = \left(2x - xy^2, \dfrac{y^3}{3}\right)$ e $C : \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

    Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds$, onde $\vec{n}$ é a normal à curva com componente $y \ge 0$.

12. Seja $\vec{F}(x,y) = x^{10}\vec{\imath} + (3x - 10x^9y)\vec{\jmath}$. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds$, onde C é a curva do exercício anterior com o mesmo $\vec{n}$.

RESPOSTAS DA LISTA 11

1. $\dfrac{\pi}{15}\left(890 + 3\sqrt{2}\right)$
2. $10\pi + 16$
3. 6π
4. 16π. Orientação de $\vec{n}$ no sentido de afastamento da origem.
5. $\dfrac{2\pi}{3}(h+3)$
6. $\dfrac{\pi}{2}$
7. $4\pi(b-a)$
8. Como g é de classe $\mathcal{C}^2$, temos que g é diferenciável e $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{n}} = \nabla g \cdot \vec{n}$. Agora basta aplicar o teorema de Gauss e propriedades com o operador nabla.
9. $c = 1$
10. 10
11. π
12. $\dfrac{3}{2}$