Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 12 - 2007-1
Integral de superfície: miscelânea

1. Calcule a área da parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$, fora do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, e acima do plano xy.

2. O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é cortado por um plano $ax + by + z = 2$. Determine a relação entre a e b para que a região do plano delimitada pelo cilindro tenha área $\pi\sqrt{5}$.

3. Seja a superfície de revolução obtida girando-se o círculo $(y-1)^2 + z^2 = 1$ em torno do eixo z:

   (a) Dê uma parametrização de S;

   (b) Calcule a área de S;

   (c) Calcule $\displaystyle\iint_S (1 + x^2y^2z)dS$.

4. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, com $\vec{n}$ apontando para fora de S, sendo $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (2z - x - y)\vec{k}$ e S é a calha dada por $y - z = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ e $y + z = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

5. Seja S a parte da superfície $x^2 + y^2 = 4$ delimitada pelos planos $z = 0,\ z + y = 2$ e seja $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (1 + xy^2 + z^2)\vec{k}$. Fixe uma orientação sobre S e calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

6. Calcule $\displaystyle\oint_C (1+y)z\,dx + (1+z)x\,dy + (1+x)y\,dz$ ao longo do triângulo C com vértices $P_1(1,0,0),\ P_2(0,1,0)$ e $P_3(0,0,1)$ e orientado de P_1 a P_2.

7. Calcule $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = -y^2\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$, $S : x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 2, z \geq 1$ e $\vec{n}$ a normal que aponta para cima.

8. Seja C a curva dada pela interseção das superfícies cujas equações são $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y + z = 2$. Fixe uma orientação sobre C e calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sabendo que $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

9. Seja B um compacto e seja S a fronteira de B, com normal exterior $\vec{n}$. Se $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ e $r = \|\vec{r}\|$, prove que $\displaystyle\iiint_B r\,dV = \frac{1}{12}\iint_S \nabla r^3\cdot\vec{n}\,dS$.

10. Fixe uma orientação sobre C e determine a relação entre a e b para que $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \pi$, onde $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{\imath} + 2x\vec{\jmath} - 2y\vec{k}$ e C é a curva dada pela interseção das superfícies $(y-1)^2 + z^2 = 1$ e $ax + by + z = 2$, $a \neq 0$ e $b > 2$.

11. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3}{3} + y, \dfrac{y^3}{3}, \dfrac{z^3}{3} + 2\right)$ através da superfície S do sólido W definido por $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, com campo de vetores normais a S apontando para fora de W.

12. Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ um campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, f(x,y,z))$, onde f de classe $\mathcal{C}^1$, tal que $\nabla f\cdot\vec{\imath} = -3$ em $\mathbb{R}^3$ e C é a interseção da superfície $x^2 + y^2 = 1$ com plano $z - y = 2$, com uma orientação tal que quando projetada no plano $z = 0$ produz um percurso no sentido horário.

13. Demonstre que a área da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, dentro do parabolóide $\dfrac{x^2}{b}+\dfrac{y^2}{b}=2(z+a)$ é $4\pi ab$, sempre que $0<b\leq a$.

14. Seja S a superfície de equação $2z=x^2+y^2$, onde $0\leq z\leq k$ e $k>0$:

    (a) Dê uma parametrização para S;

    (b) Sabendo-se que a área de S vale $\dfrac{14\pi}{3}$, determine o valor de k;

    (c) Calcule $\displaystyle\iint_S (2+xy-yz)dS$.

15. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $U=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0),(1,1,1)\}$ e tal que $\text{div}\vec{F}=0$ em U. Sejam S_1 e S_2 superfícies esféricas de centro $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$, respectivamente, e raios iguais a $\dfrac{1}{4}$, com normais exteriores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Seja S_3 uma superfície esférica, centrada na origem e raio 5, com normal exterior $\vec{n}_3$. Calcule $\displaystyle\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{n}_3\,dS$, sabendo-se que $\displaystyle\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS=3\pi$ e $\displaystyle\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_2\,dS=2\pi$.

16. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, sendo S a fronteira de $B=\{(x,y,z)\in I\!R^3; x^2+y^2\leq 1, x^2+y^2\leq z\leq 5-x^2-y^2\}$, com normal exterior $\vec{n}$ e $\vec{F}(x,y,z)=3xy\vec{\imath}-\dfrac{3}{2}y^2\vec{\jmath}+z\vec{k}$.

17. Suponha que a superfície esférica de raio 1 tem uma densidade por unidade de área igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo z. Determine a massa total da superfície esférica.

18. Seja S a calota esférica dada pela equação $x^2+y^2+(z-2)^2=4$, onde $0\leq z\leq 2$. Sobre S fixe a orientação $\vec{n}$ tal que $\vec{n}(0,0,0)=-\vec{k}$ e considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)=(y+z^2)\vec{\imath}+(xz^2-y)\vec{\jmath}+(2z+xy^2+x^2y^3)\vec{k}$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície orientada S.

RESPOSTAS DA LISTA 12

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$

2. $a^2+b^2=4$

3. (a) $\varphi(t,\theta)=((1+\cos t)\cos\theta,(1+\cos t)\,\text{sen}\,\theta,\,\text{sen}\,t),\quad 0\leq t\leq 2\pi,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$

   (b) $4\pi^2$

   (c) $4\pi^2$

4. 0

5. 16π, $\vec{n}=\dfrac{(x,y,0)}{2}$

6. $\dfrac{3}{2}$

7. 0

8. $2\sqrt{2}\pi$ quando a projeção de $\mathcal{C}$ no plano xy é percorrida no sentido anti-horário.

10. $b+2=3a$ se a componente de $\vec{\imath}$ for positiva, $\quad b+2=a$ caso contrário

11. $\dfrac{\pi}{15}\left(890+3\sqrt{2}\right)$

12. π

14. (a) $\varphi(x,y)=\left(x,y,\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$, $x^2+y^2\leq 2k$

    (b) $k=\dfrac{3}{2}$

    (c) $\dfrac{28\pi}{3}$

15. 5π

16. 4π

17. $\dfrac{8\pi}{3}$

18. $-\dfrac{32\pi}{3}$