uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 2 - 2007-1
Mudança de variáveis diversas na integral dupla.
Aplicações à Física.

1. Calcule as integrais abaixo, usando uma conveniente mudança de coordenadas:

(a) $\displaystyle\int\int_D \frac{(x+y)^7}{y-x}\,dy\,dx$, sendo D a região limitada pelas retas $y+x=3,\ y+x=4,\ y-1=1$ e $y+2x=1$.

(b) $\displaystyle\int\int_D \frac{y+2x}{y-2x-1}\,dy\,dx$, onde D é a região limitada pelas retas $y-2x=2,\ y+2x=2,\ y-2x=1$ e $y+2x=1$.

2. Sejam $D=(x,y);1+x^2\leq y\leq 2+x^2,\ x\geq 0$ e $y\geq x+x^2$ e $E=(u,v);1\leq v\leq 2,\ v\geq u$ e $u\geq 0$.

(a) Verifique que $E=\varphi(D)$, onde $(u,v)=\varphi(x,y)$, com $u=x$ e $v=y-x^2$

(b) Verifique que a área de D é igual a área de E.

3. Considere a transformação do plano uv no plano xy definida por $T(u,v)=(x,y)=\left(u+v,u^2-v\right)$. Seja R_{uv} a região do plano uv limitada pelos eixos u e v e pela reta $u+v=2$. Seja $R_{xy}=T\left(R_{uv}\right)$, a imagem de R_{uv} por T.

(a) Esboce R_{xy} (b) Calcule $\displaystyle\iint_{R_{xy}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+4x+4y}}\ dx\,dy$

4. Se A é a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ prove que $A=\pi ab$.

5. Se V é o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ prove que $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$.

6. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2=8y$ pela reta $y=2$ e pelo eixo y, sabendo que a densidade de massa varia proporcionalmente com a distância à reta $y=-1$.

7. Calcule o centro de massa da lâmina $L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0\right\}$ se a densidade é proporcional à distância de (x,y) ao eixo x.

Algumas observações sobre definições e nomenclaturas da Física:

Obs.1 Diz-se que a lâmina delgada é homogênea quando a densidade de massa ρ é constante.

Obs.2 Centróide é o centro de massa da lâmina delgada homogênea.

Obs.3 Sabe-se que o momento de inércia I de uma partícula de massa m em relação a um eixo E ou a um ponto P é dado pela fórmula $I=mr^2$, sendo r a distância da partícula ao eixo E ou ao ponto P. Usando Soma de Riemann, é possível provar que para uma lâmina delgada L que tem densidade de massa contínua, o momento de inércia I de L em relação aos eixos coordenados e a origem O são calculados pelas fórmulas, em relação:
ao eixo x, $I_x=\displaystyle\iint_L y^2\rho(x,y)\,dx\,dy$; ao eixo y, $I_y=\displaystyle\iint_L x^2\rho(x,y)\,dx\,dy$; à origem O, $I_O=I_x+I_y$.

8. Ache o centróide da semi-circunferência de raio a.

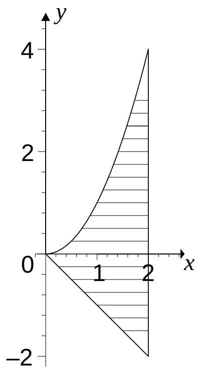
9. Ache os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 para uma lâmina ocupando a região $R: 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2-x$, se a função de densidade de masssa é dada por $\rho(x,y)=x+2y$ gramas por centímetro quadrado.

10. Calcule as coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$ do centro de massa de uma chapa homegênea D com o formato de um triângulo de vértices $(0,5),\ (0,-5)$ e $(5,0)$.

11. Uma placa fina é limitada pela circunferência $x^2+y^2=a^2$ e tem densidade $\delta(x,y)=\dfrac{a^2}{a^2+x^2+y^2}$. Calcule o momento de inércia polar em função de sua masa m.

RESPOSTAS DA LISTA 2 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. (a)$(4^8-3^8)\dfrac{\ln 3}{16}$ (b)$\dfrac{1}{4}$

2. (a) 

(b) 2

3. Faça a mudança de variáveis $u=ax$ e $v=by$ e use coordenadas polares.

4. Idem anterior.

5. $\dfrac{176}{15}$

6. $\left(0,\dfrac{3\pi}{32}\right)$

7. A semi-circunferência de raio a e base $2a$ tem o centróide situado no raio perpendicular à base a uma distância $\dfrac{4a}{3\pi}$ dessa base.

8. $I_x=\dfrac{56}{15}$; $I_y=\dfrac{8}{3}$; $I_O=\dfrac{32}{5}$

9. $\left(\dfrac{5}{3},0\right)$

10. $ma^2\left(\dfrac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)$